3. Funktionen

3.1 Bezeichnungen

Definition einer Funktion

Definition 3.1

Gegeben seien Mengen D_f und Z . Eine **Funktion**

$$f : D_f \rightarrow Z$$

ordnet jedem Element $x \in D_f$ genau ein Element $f(x) \in Z$ zu.

Beispiele

Eine konkrete Funktion wird entweder mit Hilfe einer *Zuordnungsvorschrift* („Formel“) oder durch Aufzählen aller zugeordneten Paare angegeben.

Beispiel 3.2

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f : D_f \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = x^2$$

$$D_g = [0, \infty)$$

$$g : D_g \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } g(x) = \sqrt{x+1}$$

Beispiel 3.3

$$D_f = \{a, b, c\}, Z = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\},$$

$$f : D_f \rightarrow Z \text{ mit } f(a) = \alpha, f(b) = \beta, f(c) = \gamma.$$

Bezeichnungen

Sei $f : D_f \rightarrow Z$ eine Funktion mit der Zuordnungsvorschrift $f(x)$.
Dann heißen

- x *Argument* oder *unabhängige Variable*,
- $f(x)$ *Funktionswert* bzw. Wert von f an der Stelle x ,
- D_f *Definitionsmenge* oder *Definitionsbereich* von f ,
- Z *Zielmenge* von f .

Die **Bildmenge** B_f von f ist die Menge aller Funktionswerte $f(x)$ für $x \in D_f$, d.h. $B_f = \{f(x) : x \in D_f\} =: f(D_f)$.

Beispiel 3.4

$$D_f = \mathbb{R}, \quad f : D_f \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = x^2$$

$$\implies B_f = [0, \infty)$$

$$D_g = [0, \infty), \quad g : D_g \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } g(x) = \sqrt{x+1}$$

$$\implies B_g = [1, \infty)$$

Der maximale Definitionsbereich

Ist D_f nicht explizit angegeben, so verwendet man den sogenannten „maximalen Definitionsbereich“, d.h. die größte Menge, für welche die Zuordnungsvorschrift definiert ist. Dabei muss allerdings aus dem Zusammenhang hervorgehen, aus welcher Grundmenge die Variable x überhaupt stammt.

Beispiele 3.5

- ① $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ hat den maximalen reellen Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
- ② $g(x) = \sqrt{x + 1}$ hat den maximalen reellen Definitionsbereich $D_g = [-1, \infty)$.

Der Graph einer Funktion

Definition 3.6

Der Graph einer Funktion $f : D_f \rightarrow Z$ ist die Menge

$$\text{gr}(f) = \{(x, f(x)) : x \in D_f\}.$$

Falls D_f und Z Teilmengen der reellen Zahlen sind, ist der Graph von f eine Teilmenge der Ebene $\mathbb{R}^2$.

Beispiele 3.7

- ① $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = ax + b$. $B_f = \mathbb{R}$, falls $a \neq 0$.
- ② $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^x$. $B_f = (0, \infty)$.

Die Graphen werden jeweils an der Tafel skizziert.

Spezielle Eigenschaften

Definition 3.8

Eine Funktion $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D_f \subseteq \mathbb{R}$ heißt

- *beschränkt*, falls eine Schranke $M > 0$ existiert mit

$$\forall x \in D_f : |f(x)| \leq M.$$

- *gerade*, falls $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D_f$ gilt.
- *ungerade*, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D_f$ gilt.
- *periodisch* (mit der Periodenlänge $L > 0$), falls $f(x + L) = f(x)$ für alle $x \in D_f$ gilt.

Beispiel 3.9

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ist beschränkt und gerade.