3. Funktionen
3.2 Umkehrfunktion

Injektivität und Surjektivität

Definition 3.10

Eine Funktion $f : D_f \to Z$ heißt

- **injektiv** (eineindeutig), falls gilt: $x \neq \tilde{x} \implies f(x) \neq f(\tilde{x})$,
- **surjektiv**, falls $B_f = Z$ gilt,
- **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist.

Beispiel 3.11

Es sei $f : D_f \to Z$ mit $f(x) = x^2$. Untersuchen Sie jeweils, ob f injektiv bzw. surjektiv ist.

1. $D_f = \mathbb{R}, \qquad Z = \mathbb{R}$
2. $D_f = \mathbb{R}, \qquad Z = [0, \infty)$
3. $D_f = [0, \infty), \qquad Z = \mathbb{R}$
4. $D_f = (-\infty, 0], \qquad Z = [0, \infty)$

Bemerkungen, Definition der Umkehrfunktion

- $f : D_f \to Z$ ist injektiv, falls gilt: $f(x) = f(\tilde{x}) \implies x = \tilde{x}$.
- $f : D_f \to B_f$ ist stets surjektiv, denn $B_f = f(D_f)$ nach Definition.

Also ist die folgende Definition sinnvoll:

Definition 3.12

Sei $f : D_f \to B_f$ eine injektive Funktion. Die Funktion $g : B_f \to D_f$, die jedem $y \in B_f$ genau das $x \in D_f$ zuordnet, für welches $y = f(x)$ gilt, heißt **Umkehrfunktion** von f; geschrieben als $g = f^{-1}$.

- Es gilt also $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ für alle $y \in B_f$ sowie $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$ für alle $x \in D_f$.
- Die Zuordnungsvorschrift für f^{-1} lässt sich oft durch Auflösen der Gleichung $y = f(x)$ nach x bestimmen.

Beispiele zur Umkehrfunktion

Beispiel 3.13

Wir bestimmen die Umkehrfunktion der folgenden Funktionen:

1. $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit $f(x) = x^2$
2. $g : (-\infty, 0] \to [0, \infty)$ mit $g(x) = x^2$
3. $h : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ mit $h(x) = 10^x$
4. $u : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ mit $u(x) = e^x$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{gr}\left(f^{-1}\right) &= \left\{(y, f^{-1}(y)) : \; y \in D_{f^{-1}}\right\} \\
&= \left\{(y, x) : \; y \in B_f, \; x = f^{-1}(y)\right\} \\
&= \left\{(y, x) : \; y \in B_f, \; y = f(x)\right\} \\
&= \left\{(y, x) : \; (x, y) \in \operatorname{gr}(f)\right\},
\end{aligned}$$

d.h. $\operatorname{gr}\left(f^{-1}\right)$ entsteht aus $\operatorname{gr}(f)$ durch Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden.

Ein weiteres Beispiel

Beispiel 3.14

$f(x) = x^2 - 4x + 1$

Monotonie

Definition 3.15

Eine Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ mit $D_f \subseteq \mathbb{R}$ heißt

- *monoton wachsend*, falls gilt: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$.
- *streng monoton wachsend*, falls gilt: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2)$.
- *monoton fallend*, falls gilt: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$.
- *streng monoton fallend*, falls gilt: $x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$.
- f heißt *(streng) monoton*, falls f (streng) monoton wachsend oder fallend ist.

Eine streng monotone Funktion $f : D_f \to \mathbb{R}$ ist automatisch injektiv.