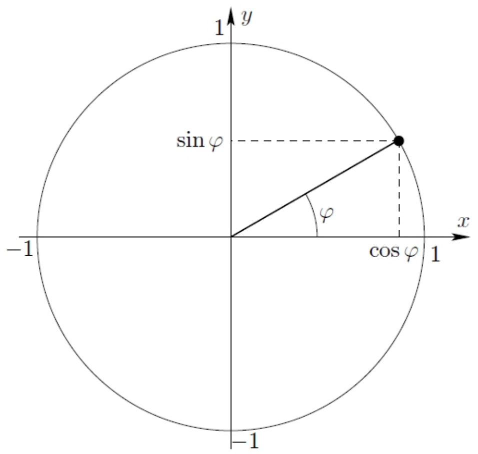
3. Funktionen
3.3 Trigonometrische und hyperbolische Funktionen

Definition von Sinus und Cosinus

Definition 3.16

Es sei $P(x|y)$ der Punkt auf dem Einheitskreis, für den der Winkel von der positiven reellen Halbachse aus (im Bogenmaß) gerade φ beträgt (Winkel math. positiv, also gegen den Uhrzeigersinn). Dann definieren wir:

$$\sin\varphi := y \quad \text{und} \quad \cos\varphi := x.$$

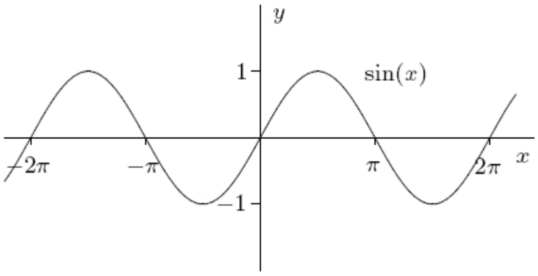


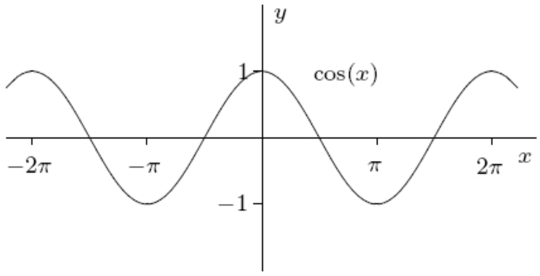
Dadurch sind $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ für Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ erklärt. Für andere Werte $\varphi \in \mathbb{R}$ definieren wir

$$\sin\varphi := \sin(\varphi - 2k\pi) \quad \text{und} \quad \cos\varphi := \cos(\varphi - 2k\pi),$$

wobei $k \in \mathbb{Z}$ so gewählt ist, dass $\varphi - 2k\pi \in [0, 2\pi)$ gilt.

Die Funktionen $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ entstehen also durch 2π-periodische Fortsetzung von $[0, 2\pi)$ auf $\mathbb{R}$.





Eigenschaften von $\sin x$ und $\cos x$

Mit dem Satz des Pythagoras folgt:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Additionstheoreme: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Folgerungen:

- $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x, \qquad \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$
- $\sin(x + \pi) = -\sin x, \qquad \cos(x + \pi) = -\cos x$
- $\sin 2x = 2\,\sin x \cos x, \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Bemerkungen

- Ist α ein Winkel in Gradmaß (also 360° für den Vollkreis), so muss zur Berechnung von Sinus und Cosinus α erst ins Bogenmaß umgerechnet werden, d.h. $x = \alpha \frac{2\pi}{360^\circ}$

Beispiel 3.17

$\sin 60^\circ = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

- Die Funktion $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist beschränkt, ungerade und 2π-periodisch.
- Die Funktion $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist beschränkt, gerade und 2π-periodisch.
- Es gilt $B_{\sin} = B_{\cos} = [-1, 1]$.

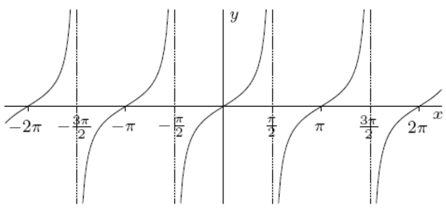
Tangens und Cotangens

Mittels Sinus und Cosinus definiert man

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Die Tangensfunktion tan ist π-periodisch, ungerade und im Intervall $(-\pi/2, \pi/2)$ streng monoton wachsend. Die Bildmenge ist $\mathbb{R}$.



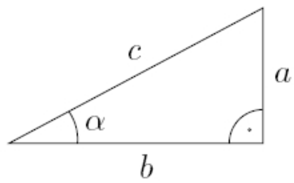
Der Graph des Cotangens ergibt sich aus dem Zusammenhang

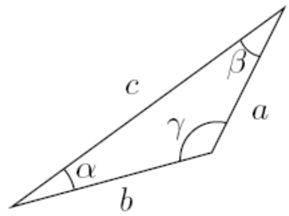
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin(x + \pi/2)}{-\cos(x + \pi/2)} = -\tan(x + \pi/2).$$

Anwendung: Berechnung von Längen

In rechtwinkligen Dreiecken gilt:

- $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$
- $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$
- $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$
- $\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$





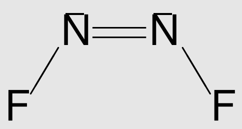
In beliebigen Dreiecken gilt:

- Sinussatz: $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$
- Cosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b\cos\gamma$

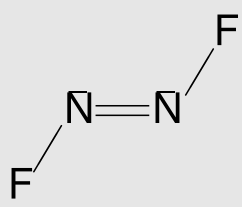
Ein Anwendungsbeispiel

Beispiel 3.18

Die Verbindung N_2F_2 existiert in zwei räumlich verschiedenen Formen (Isomeren):



Cis-N_2F_2

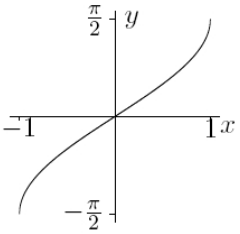


Trans-N_2F_2

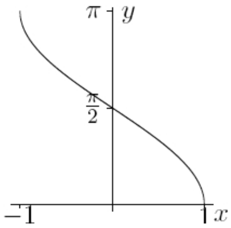
Bei beiden Isomeren beträgt der N-N-Abstand 0.125 nm, der N-F-Abstand 0.144 nm und die F-N-N-Winkel 115°. Welchen Abstand haben die Fluoratome jeweils?

Die Arcus-Funktionen

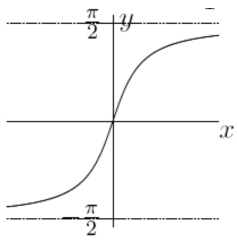
- Der **Arcussinus**: Wir betrachten $f(x) = \sin(x)$ auf $D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Dann ist f injektiv mit $B_f = [-1, 1]$. Also existiert die Umkehrfunktion $\arcsin : B_f \to D_f$.
- Der **Arcuscosinus**: Schränken wir $f(x) = \cos(x)$ auf $D_f = [0, \pi]$ ein, dann ist f injektiv mit $B_f = [-1, 1]$. Also existiert die Umkehrfunktion $\arccos : B_f \to D_f$.
- Der **Arcustangens**: $f(x) = \tan(x)$ ist auf $D_f = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ injektiv mit $B_f = \mathbb{R}$. Daher existiert die Umkehrfunktion $\arctan : B_f \to D_f$.



arcsin(x)



arccos(x)

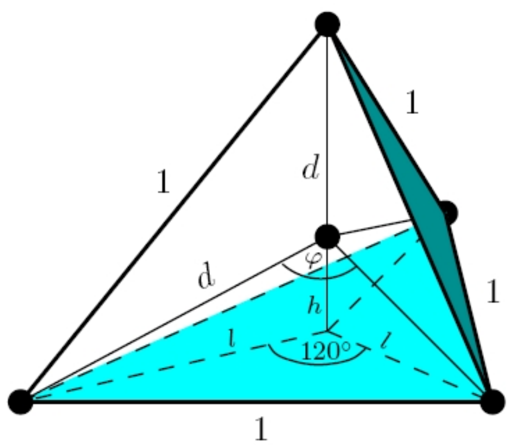


arctan(x)

Anwendungsbeispiel

Beispiel 3.19

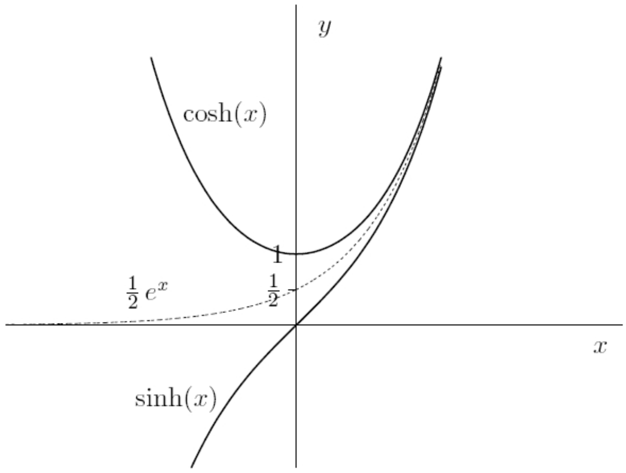
Die räumliche Struktur gewisser Kristalle bzw Moleküle, z.B. Methan (CH_4), ist ein Tetraeder.
Wir berechnen den *Tetraederwinkel* φ.



Hyperbolische Funktionen

Sinus hyperbolicus: $\sinh x := \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ für $x \in \mathbb{R}$

Cosinus hyperbolicus: $\cosh x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ für $x \in \mathbb{R}$



Eigenschaften

- Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt $(\cosh t)^2 - (\sinh t)^2 = 1$.
  (Die Gleichung $y^2 - x^2 = 1$ beschreibt eine Hyperbel.)
- $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist ungerade und streng monoton wachsend, also injektiv. Außerdem ist sinh surjektiv, also $B_{\sinh} = \mathbb{R}$.
  Die Umkehrfunktion ist der **Areasinus hyperbolicus**

$$\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

- $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gerade, also insbesondere *nicht* injektiv.
  Es gilt $B_{\cosh} = [1, \infty)$. Schränkt man cosh auf $[0, \infty)$ ein, dann ist $\cosh : [0, \infty) \to [1, \infty)$ bijektiv.
  Die Umkehrfunktion ist der **Areacosinus hyperbolicus**

$$\operatorname{arcosh} : [1, \infty) \to [0, \infty).$$