3. Funktionen
3.4 Komplexe Zahlen

Motivation: Die imaginäre Einheit i

Die quadratische Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat *keine reelle Lösung*.

Also definiert man einfach eine neue „imaginäre Zahl“ i, die $x^2 + 1 = 0$ löst. i kann also als Ersatz für die in $\mathbb{R}$ nicht existierende Wurzel aus -1 angesehen werden. Formal ist dann $-i$ eine weitere Lösung der Gleichung.

Mit Hilfe von i kann man

$$x^2 + p \cdot x + q = 0$$

auch im Fall $D := p^2/4 - q < 0$ formal lösen:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{-D}\sqrt{-1} = -\frac{p}{2} \pm i\sqrt{-D}.$$

Definition der komplexen Zahlen

Unter einer **komplexen Zahl** z versteht man eine Zahl der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $i^2 = -1$. Dabei heißen

- x der **Realteil** von z (kurz $\mathrm{Re}\, z$),
- y der **Imaginärteil** von z (kurz $\mathrm{Im}\, z$) und
- i **imaginäre Einheit**.

Für die Menge aller komplexen Zahlen schreiben wir $\mathbb{C}$, d.h.

$$\mathbb{C} = \{x + iy \ : \ x, y \in \mathbb{R}\} \qquad \text{mit } i^2 = -1.$$

Für zwei komplexe Zahlen $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$ definieren wir

1. $z_1 = z_2 \iff (x_1 = x_2 \text{ und } y_1 = y_2)$
2. $z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
3. $z_1 \cdot z_2 := x_1\, x_2 - y_1\, y_2 + i\,(x_1\, y_2 + x_2\, y_1)$

Rechnen mit komplexen Zahlen

Man rechnet mit komplexen Zahlen wie mit reellen Zahlen, wobei aber $i^2 = -1$ zu beachten ist:

Beispiel 3.20

$z_1 = 1 + 2i, \qquad z_2 = -2 - i$

1. $z_1 + z_2 =$
2. $z_1 - z_2 =$
3. $z_1 \cdot z_2 =$
4. $\dfrac{1}{z_2} =$
5. $\dfrac{z_1}{z_2} =$

Konjugiert komplexe Zahl, Betrag

Definition 3.21

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ definieren wir

- $\overline{z} := x - iy$ (zu z **konjugiert komplexe Zahl**)
- $|z| := \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ (**Betrag** von z)

Dann gilt für $z \neq 0$: $$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Beispiel 3.22

$z = 1 + 2i$

1. $\overline{z} =$
2. $|z| =$
3. $\dfrac{1}{z} =$

Die Gauß'sche Zahlenebene

Da komplexe Zahlen aus zwei unabhängigen Anteilen bestehen, kann man sie mit Punkten der Ebene identifizieren.

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \quad \leftrightarrow \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

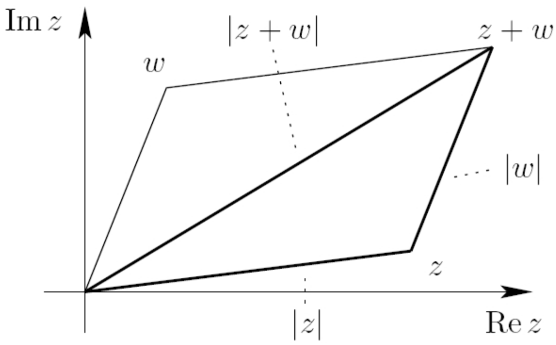
Man erweitert dadurch den reellen Zahlenstrahl zur komplexen Zahlenebene, der sogenannten **Gauß'schen Zahlenebene**.

- Die x-Achse heißt **reelle Achse**, die y-Achse **imaginäre Achse**.
- $\overline{z}$ erhält man aus z durch Spiegelung an der rellen Achse.
- Nach dem Satz von Pythagoras ist $|z|$ der Abstand der komplexen Zahl z vom Ursprung.

Eigenschaften des Betrags

Für $|\cdot|$ gilt

- $|z| = 0 \iff z = 0$,
- $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$,
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ (Dreiecksungleichung).



Betrachtet man Polynome über $\mathbb{C}$, also

$$P(z) = z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + a_1\, z + a_0$$

mit Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$, so besitzt jedes Polynom vom Grad n *genau n komplexe Nullstellen*, wobei mehrfache Nullstellen (d.h. Faktorisierung mit Faktor $(z - z_0)^k$) mit ihrer Vielfachheit (also k) zu zählen sind.

Bei Polynomen mit reellen Koeffizienten treten komplexe Nullstellen immer in konjugiert komplexen Paaren (also z_0 und $\bar{z}_0$) auf.

Beispiele 3.23

Wir bestimmen die Nullstellen der folgenden Polynome:

1. $z^3 + 1$
2. $z^3 + i\, z^2 + z + i$

Polarkoordinaten

Jedes $z \in \mathbb{C}$ lässt sich auch in **Polarkoordinaten** durch Angabe einer Länge und eines Winkels darstellen:

$$z = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$$

mit dem Radius $r = |z|$ und dem Winkel φ. Dieser Winkel wird auch **Argument** von z, kurz $\arg(z)$, genannt.

Da es beim Winkel auf Vielfache von 2π nicht ankommt, hat man mehrere Möglichkeiten, das Intervall für $\arg(z)$ festzulegen. Oft wählt man das Intervall $(-\pi, \pi]$.

Beispiel 3.24

1. $z = 1 + i$
2. $z = -i$
3. $z = -2$

Die komplexe Exponentialfunktion

Euler'sche Formel: $\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}, \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$

Folgerungen:

- $e^{i\varphi}e^{i\psi} = e^{i(\varphi+\psi)}, \qquad \varphi, \psi \in \mathbb{R}.$
- Für die komplexen Zahlen $z = |z|e^{i\varphi}$, $w = |w|e^{i\psi} \in \mathbb{C}$ in Polarkoordinaten gilt $zw = |z||w|e^{i(\varphi+\psi)}$. Also werden bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen die Beträge (Längen) multipliziert und die Argumente (Winkel) addiert.

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist die **komplexe Exponentialfunktion** definiert durch

$$e^z = e^{x+iy} := e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Wie im Reellen gilt für alle $z, w \in \mathbb{C}$: $\qquad e^{z+w} = e^z e^w.$