4. Folgen und Grenzwerte
4.2 Grenzwertsätze für Folgen

Rechenregeln für konvergente Folgen

Satz 4.11

Die Folgen (a_n) und (b_n) seien konvergent mit dem Grenzwert a bzw. b. Dann gilt:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$, *falls* $b \neq 0$ *und* $b_n \neq 0$ *für* $n \geq n_0$

Beispiel 4.12

Wir bestimmen den Grenzwert von (a_n) mit $a_n = \dfrac{n^2 - n}{2n^2 + 1}$.

Zwei Beispiele

Eine Folge $(a_n - b_n)$ kann konvergieren, obwohl (a_n) und (b_n) divergent sind, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel 4.13

$a_n = \sqrt{n^2 + n}, \qquad b_n = n.$
(a_n) und (b_n) sind bestimmt divergent gegen ∞.
Wir betrachten $(a_n - b_n)$.

Wir betrachten noch folgendes wichtige Beispiel:

Beispiel 4.14

Wir betrachten (a_n) mit $a_n = q^n$ für ein $q \in \mathbb{C}$.

Ein Satz über Nullfolgen

Satz 4.15

Sei (a_n) eine Folge und (b_n) eine Nullfolge.

1. *Gilt $|a_n| \leq |b_n|$ ab einem $n_0 \in \mathbb{N}$, so ist auch (a_n) Nullfolge.*
2. *Ist (a_n) beschränkt, so ist $(a_n b_n)$ eine Nullfolge.*

Beispiel 4.16

Wir betrachten $a_n = \dfrac{i^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Rechenregel für reelle Folgen

Für den Rest dieses Abschnitts betrachten wir reelle Folgen.

Satz 4.17

Die Folgen (a_n) und (b_n) seien konvergent mit dem Grenzwert a bzw. b. Dann gilt: Aus $a_n \leq b_n$ für $n \geq n_0$ folgt $a \leq b$.

Vorsicht! Aus $a_n < b_n$ für alle n folgt *nicht* $a < b$!

Beispiel 4.18

Wir betrachten $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ und $b_n = 1 + \frac{2}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

4. Folgen und Grenzwerte | 4.2 Grenzwertsätze für Folgen

Monotone Folgen

Da reelle Folgen spezielle reelle Funktionen sind, überträgt sich der Monotoniebegriff. Z.B. heißt (a_n) streng monoton wachsend, falls $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Beispiel 4.19

1. (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ ist streng monoton fallend.
2. (a_n) mit $a_n = 2^n$ ist streng monoton wachsend.
3. Die Folge der Fibonacci-Zahlen (Bsp. 4.2.8) ist monoton wachsend, aber nicht streng monoton wachsend.
4. (a_n) mit $a_n = (-1)^n$ ist nicht monoton.

Die reelle Folge (a_n) heißt nach oben (unten) beschränkt, wenn es ein $M > 0$ gibt, so dass $a_n \leq M$ ($a_n \geq M$) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Sina Ober-Blöbaum | Mathematik für Chemiker

Grenzwertsatz für monotone Folgen

Satz 4.20

Es sei (a_n) eine reelle Folge.

1. *Ist (a_n) monoton wachsend und nach oben beschränkt, dann ist (a_n) konvergent.*
2. *Ist (a_n) monoton fallend und nach unten beschränkt, dann ist (a_n) konvergent.*

Der Satz gilt auch, wenn (a_n) erst ab einem bestimmten Index $n_0 \in \mathbb{N}$ monoton ist.

Beispiel 4.21

Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ mit

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \qquad \text{für } n \geq 0.$$

Anhang: Beweis von Satz 4.15

Sei $\varepsilon > 0$. Da (b_n) eine Nullfolge ist, existiert $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass $|b_n| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$.

1. Es folgt $|a_n| \leq |b_n| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$, d.h. (a_n) ist eine Nullfolge.
2. Da (a_n) beschränkt ist, gibt es eine Schranke $S > 0$ mit $|a_n| \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt $|a_n b_n| \leq S|b_n| = |Sb_n|$. Da (Sb_n) nach Satz 4.11 eine Nullfolge ist, folgt die Behauptung mit Teil 1. $\square$

Anhang: Beweis von Satz 4.20

1. Sei $\varepsilon > 0$.
   Da (a_n) nach oben beschränkt ist, gibt es eine kleinste obere Schranke S für (a_n). Dann ist $S - \varepsilon$ *keine* obere Schranke für (a_n), d.h. es gibt $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ mit $S - \varepsilon < a_{n_\varepsilon}$.
   Da (a_n) monoton wachsend ist, folgt $S - \varepsilon < a_{n_\varepsilon} \leq a_n \leq S$ für alle $n \geq n_\varepsilon$ und damit $|a_n - S| = S - a_n < \varepsilon$ für alle $n \geq n_\varepsilon$.
   Also konvergiert (a_n) gegen S.

2. wird ähnlich bewiesen. $\square$