4. Folgen und Grenzwerte
4.3 Unendliche Reihen

Definition

Sei $(a_k)_{k\geq 0}$ eine Folge.

Definition 4.22

Die Folge $(s_n)_{n\geq 0}$ der **Partialsummen** $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ heißt **unendliche Reihe** und wird mit $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet.

Ganz entsprechend betrachtet man auch $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} a_k$ für $(a_k)_{k\geq n_0}$.

Beispiel 4.23

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^{-k}$ b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k$ c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

Konvergenz

Definition 4.24

Die unendliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **konvergent**, falls die Folge (s_n) der Partialsummen konvergiert. Dann nennt man $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ den **Wert der Reihe** und schreibt kurz $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = s$. Sonst heißt die Reihe **divergent**.

Das Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ steht also sowohl für die Folge der Partialsummen (s_n) als auch für den Grenzwert, falls dieser existiert.

Beispiel 4.25

$\sum_{k=0}^{\infty} k$ ist divergent.

Die geometrische Reihe

Satz 4.26

*Die **geometrische Reihe***

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots \quad \textit{mit } q \in \mathbb{C}$$

hat die Partialsummen

$$s_n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \textit{falls } q \neq 1 \\ n+1 & \textit{falls } q = 1 \end{cases}$$

(s_n) *(und damit die geometrische Reihe) ist genau dann konvergent, wenn* $|q| < 1$ *gilt. Dann ist*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \qquad |q| < 1.$$

Die harmonische Reihe

Satz 4.27

Konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$*, so ist* (a_k) *eine Nullfolge.*

Vorsicht! Aus $a_n \to 0$ folgt *nicht* die Konvergenz der Reihe!

Satz 4.28 (Harmonische Reihe)

Die ***harmonische Reihe***

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

ist bestimmt divergent.

Anhang: Beweis von Satz 4.26

Für $q = 1$ ist offenbar $s_n = n + 1$, also $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ divergent.

Für $q \neq 1$ gilt

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + q + q^2 + \ldots + q^n \\ q\, s_n &= \quad\; q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1} \\ \Longrightarrow \qquad s_n - q\, s_n &= 1 - q^{n+1} \\ \Longrightarrow \qquad s_n &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

Ist $|q| < 1$, so folgt $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ und daher $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$.
Sei nun $|q| \geq 1$, $q \neq 1$. Wäre (s_n) konvergent, so müsste nach Satz 4.11 auch (q^{n+1}) konvergieren. Aus Beispiel 4.14 wissen wir aber, dass (q^{n+1}) divergent ist.
Zusammen: Die geometrische Reihe ist genau dann konvergent, wenn $|q| < 1$. $\square$

Anhang: Beweis von Satz 4.28

Es ist

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \quad & 1 && \\
& +\frac{1}{2} && = \frac{1}{2} \\
& +\frac{1}{3} + \frac{1}{4} && \geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\
& +\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} && \geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \\
& +\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} && \geq 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \\
& +\frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32} && \geq 16 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{2} \\
& + \cdots && \vdots
\end{aligned}
$$

Für $n = 2^m$ gilt deshalb $s_n \geq 1 + \frac{m}{2}$, d.h. (s_n) ist bestimmt divergent gegen $+\infty$. $\square$