4. Folgen und Grenzwerte
4.4 Konvergenzkriterien für unendliche Reihen

Einfache Rechenregeln

Aus Satz 4.11 folgt

Satz 4.30

1. *Aus* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$ *und* $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = b$ *folgt* $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = a + b$.
2. *Falls* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$ *und* $\lambda \in \mathbb{C}$, *so ist* $\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda a_k) = \lambda a$.

Vorsicht! Im Allgemeinen ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_k \neq \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$!

Absolute Konvergenz

Definition 4.31

Die unendliche Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

Beispiel 4.32

Die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k$ ist für alle $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ absolut konvergent.

Das Cauchy-Produkt

Satz 4.33

Wenn $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergieren, dann gilt

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) \qquad \textit{(Cauchy-Produkt).}$$

Beispiel 4.34

Für $|q| < 1$ gilt

$$\frac{1}{(1-q)^2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} q^k q^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n.$$

Kriterien für absolute Konvergenz

Satz 4.35

Die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *ist absolut konvergent, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.*

1. ***Majorantenkriterium:***
   $|a_k| \leq b_k$ *(für* $k \geq k_0$*) und* $\sum\limits_{k=k_0}^{\infty} b_k$ *ist konvergent.*
2. ***Wurzelkriterium**: Es gibt eine reelle Zahl* $q < 1$ *mit*
   $$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q \qquad \text{für } k \geq k_0.$$
3. ***Quotientenkriterium**: Es gibt eine reelle Zahl* $q < 1$ *mit*
   $$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q \qquad \text{für } k \geq k_0.$$

Zur Anwendung der Kriterien

Im Wurzel- bzw. Quotientenkriterium verwendet man praktisch oft die stärkere Bedingung

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1.$$

Beispiele 4.36

1. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ mit $p \geq 2$.
2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}$
3. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

Potenzreihen

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ heißt **Potenzreihe** mit Entwicklungspunkt $z_0 \in \mathbb{C}$. Häufig ist $z_0 = 0$.

Beispiele 4.37

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ konvergiert für alle $z \in \mathbb{C}$ (Quotientenkrit.) und
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \qquad z \in \mathbb{C}.$$
2. $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ konvergiert für $|z| < 1$ (geom. Reihe) und
$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \qquad |z| < 1.$$

Weitere Beispiele für Potenzreihen

Beispiele 4.38

1. $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ für $x \in \mathbb{R}$.
2. $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ für $x \in \mathbb{R}$.
3. $\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ für $x \in \mathbb{R}$.
4. $\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ für $x \in \mathbb{R}$.
5. $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$ für $|x| < 1$.

Das Leibniz-Kriterium

Eine Reihe der Form $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ mit $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ heißt **alternierend**.

Satz 4.39 (Leibniz-Kriterium)

Die alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ *ist konvergent, falls* (a_k) *eine* monoton fallende Nullfolge *ist.*

Beispiel 4.40

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ ist konvergent (mit dem Wert $\ln 2$).

Beispiel 4.40 zeigt, dass es konvergente Reihen gibt, die nicht absolut konvergieren.