4. Folgen und Grenzwerte
4.5 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

Grenzwerte von Funktionen

Definition 4.41

Sei $D_f \subseteq \mathbb{R}$, $f : D_f \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$.
$f(x)$ **konvergiert gegen** a für $x \to x_0$, falls für *jede* Folge (x_n) mit $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ gilt:

$$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a.$$

Man schreibt dann $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ oder $f(x) \overset{x\to x_0}{\longrightarrow} a$.

Beispiel 4.42

$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$
2. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$

Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen

Satz 4.43

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$. Aus $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$ folgt

- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b$,
- $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = a\,b$,
- $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$, *falls* $b \neq 0$.

Beispiel 4.44

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} =$
2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} =$

Uneigentliche Grenzwerte von Funktionen

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x_n) = \pm\infty$, falls für *jede* Folge (x_n) mit $x_n \in D_f \setminus \{x_0\}$ gilt:

$$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pm\infty.$$

Beispiel 4.45

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} =$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x_n) = a$, falls für *jede* Folge (x_n) in D_f gilt:

$$x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pm\infty \quad \Longrightarrow \quad f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a.$$

Beispiel 4.46

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2} =$

Einseitige Grenzwerte

Wird die Bedingung in Definition 4.41 nur für Folgen $x_n \to x_0$ mit $x_n < x_0$ (bzw. $x_n > x_0$) verlangt, so spricht man vom linksseitigen (bzw. rechtsseitigen) Grenzwert und schreibt $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$ (bzw. $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x)$).

Beispiele 4.47

1. $\lim_{x \to 0-} \operatorname{sgn}(x) =$
   $\lim_{x \to 0+} \operatorname{sgn}(x) =$
2. $\lim_{x \to 1-} \frac{1}{x-1} =$
   $\lim_{x \to 1+} \frac{1}{x-1} =$

Stetigkeit

Definition 4.48

Sei $D_f \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D_f \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

- f heißt **stetig in** $x_0 \in D_f$, falls $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.
- f heißt **stetig**, falls f in jedem $x_0 \in D_f$ stetig ist.

Beispiel 4.49

1. $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$
3. $f : \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Rechenregeln für stetige Funktionen

Satz 4.50

*Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$.
Dann sind $f + g$, $f \cdot g$ und f/g (hier für $g(x_0) \neq 0$) stetig in x_0.*

Beispiel 4.51

$$f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

Nach Satz 4.50 sind alle Polynome stetig.
Man kann auch zeigen, dass Potenzreihen im Bereich der absoluten Konvergenz stetig sind. Insbesondere sind e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$ und $\cosh x$ stetig auf $\mathbb{R}$.

Rechenregeln für stetige Funktionen (2)

Satz 4.52

Seien $g : D_g \to \mathbb{R}$ und $h : D_h \to \mathbb{R}$ Funktionen, für die $B_g \subseteq D_h$ gilt.

Ist g stetig in $x_0 \in D_g$ und h stetig in $y_0 = g(x_0) \in D_h$, so ist die Verkettung $f = h \circ g$ stetig in x_0.

Beispiel 4.53

Die Funktion f, definiert durch $f(x) = e^{\sin(x^2+1)}$, ist stetig auf $\mathbb{R}$.

Maximum und Minimum, Zwischenwertsatz

Satz 4.54 (Existenz von Maximum und Minimum)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann hat f ein Maximum und ein Minimum in $[a, b]$, d.h. es gibt $x_1, x_2 \in [a, b]$, so dass für alle $x \in [a, b]$ gilt

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Man schreibt $f(x_1) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$ und $f(x_2) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$.

Satz 4.55 (Zwischenwertsatz)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Beispiel 4.56

Besitzt die Gleichung $x = \cos(x)$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ eine Lösung?