5. Differentialrechnung
5.2 Ableitungsregeln

Summen-, Produkt- und Quotientenregel

Satz 5.6

Seien f, g in x_0 differenzierbar.

Dann sind auch $af + bg$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$), $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (falls $g(x_0) \neq 0$) differenzierbar in x_0 und es gilt:

1. $(af + bg)'(x_0) = af'(x_0) + bg'(x_0)$,
2. $(f\,g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0)$,
3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Insbesondere:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2},$$

falls g in x_0 differenzierbar mit $g(x_0) \neq 0$.

Ableitung von Polynomen und rationalen Funktionen

1. Für $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, gilt $f'(x) = nx^{n-1}$, $x \in \mathbb{R}$.
2. Mit Satz 5.6 folgt, dass alle Polynome auf $\mathbb{R}$ differenzierbar sind:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \implies p'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot nx^{k-1}.$$

3. Alle rationalen Funktionen (also Funktionen der Form $\frac{P(x)}{Q(x)}$ mit Polynomen P, Q) sind differenzierbar auf ihrem maximalen Definitionsbereich, d.h. außerhalb der Nullstellen von Q.

Ableitung von Potenzreihen

Man kann zeigen, dass Potenzreihen im Innern ihres Konvergenzbereiches „gliedweise differenziert“ werden können.

Beispiele 5.7

1. $f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x$
2. $f(x) = \sin(x) \implies f'(x) = \cos(x)$
3. $f(x) = \cos(x) \implies f'(x) = -\sin(x)$
4. $f(x) = \sinh(x) \implies f'(x) = \cosh(x)$
5. $f(x) = \cosh(x) \implies f'(x) = \sinh(x)$
6. $f(x) = \ln(1+x)$, $|x| < 1 \implies f'(x) = \frac{1}{1+x}$

Beispiele

Beispiele 5.8

1. $f(x) = e^x \sin x$
2. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
3. $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Die Kettenregel

Satz 5.9

Es seien f im Punkt x_0 und g im Punkt $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist die verkettete Funktion $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ im Punkt x_0 differenzierbar mit

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)\,.$$

*Dabei heißt $g'(f(x_0))$ die **äußere Ableitung** und der Faktor $f'(x_0)$ **innere Ableitung**.*

Beispiele 5.10

1. $h(x) = e^{x^3+1}$
2. $h(x) = \sin \frac{1}{x^2+1}$

Ableitung von Umkehrfunktionen

Satz 5.11

Sei $f : D_f \to B_f$ ($D_f, B_f \subset \mathbb{R}$) eine bijektive Funktion, die in einer Umgebung $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq D_f$ um x_0 differenzierbar ist. Es gelte $f'(x_0) \neq 0$. Dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} im Punkt $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beispiele 5.12

1. $f(x) = e^x$ mit $D_f = \mathbb{R}$, $B_f = (0, \infty)$
2. $f(x) = \sin x$ mit $D_f = (-\pi/2, \pi/2)$, $B_f = (-1, 1)$

Weitere Beispiele

Beispiele 5.13

1. $f(x) = x^r$ mit $r \in \mathbb{R}$
2. $f(x) = x \ln(x) - x$

Beispiel 5.14

$f(x) = x + e^x$ mit $D_f = \mathbb{R}$, $B_f = \mathbb{R}$.
f streng monoton wachsend, also injektiv, d.h. invertierbar.
Welchen Wert hat $(f^{-1})'(1)$?

Ableitungen elementarer Funktionen

Es sei $c \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
c	0	$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
x^r	rx^{r-1}	$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = \tan^2(x) + 1$	$\operatorname{arcosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$