5. Differentialrechnung
5.3 Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Der Mittelwertsatz (MWS)

Satz 5.15 (Mittelwertsatz)

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar. Dann gibt es mindestens ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Spezialfall:

Satz 5.16 (Satz von Rolle)

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a,b) differenzierbar. Ist $f(a) = f(b)$, so existiert mindestens ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Folgerungen aus dem Mittelwertsatz

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in (a, b) differenzierbar. Dann gilt

1. $f'(x) = 0$ in $(a, b) \iff f$ ist konstant.
2. $f'(x) \geq 0$ in $(a, b) \iff f$ ist monoton wachsend.
3. $f'(x) \leq 0$ in $(a, b) \iff f$ ist monoton fallend.
4. $f'(x) > 0$ in $(a, b) \implies f$ ist streng monoton wachsend.
5. $f'(x) < 0$ in $(a, b) \implies f$ ist streng monoton fallend.

Die Differentialgleichung $f'(x) = af(x)$

Sei $a \in \mathbb{R}$ konstant. Welche differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genügen der Beziehung $f'(x) = af(x)$?

Die Regel von de L'Hôpital

Satz 5.17 (Regel von de L'Hôpital)

Seien f und g in (a,b) differenzierbar und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Gilt

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = 0 \quad \textit{oder} \quad \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a+} g(x) = \infty$$

und existiert $\lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, *so folgt*

$$\lim_{x \to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Für $x_0 = b$ gilt der entsprechende Satz mit linksseitigem Grenzwert.

Regel von de L'Hôpital (2)

Beispiel 5.18

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$
2. $\lim_{x \to 0+} x \ln(x)$

Der Satz von Taylor

Satz 5.19

Die Funktion f sei auf (a, b) $n+1$-mal differenzierbar und $x_0, x \in (a, b)$. Dann gibt es mindestens ein $\theta \in (0, 1)$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

$T_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ heißt n-tes **Taylorpolynom** von f um die **Entwicklungsstelle** x_0.

Beispiel 5.20

Für $f(x) = e^x$ und $g(x) = \cos(x)$ berechnen wir das n-te Taylorpolynom um $x_0 = 0$.