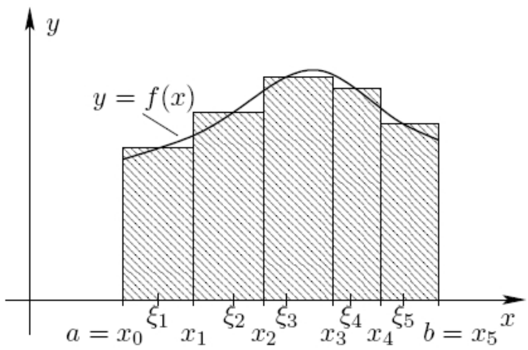
6. Integration
6.1 Das Riemann-Integral

Flächenberechnung: Problemstellung und Lösungsidee

Sei $f : [a, b] \to [0, \infty)$ eine Funktion.

Ziel: Berechnung der Fläche A, die vom Graphen der Funktion f, der x-Achse und den senkrechten Geraden $x = a$ und $x = b$ eingeschlossen wird.

Lösungsidee:



Approximation durch Rechtecke

Wir approximieren die Fläche folgendermaßen durch Rechtecke:

1. Wir zerlegen $[a, b]$ in n Teilintervalle: Hierzu wählen wir $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mit

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

   $Z = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ heißt **Zerlegung** von $[a, b]$.
2. Wir wählen aus jedem Teilintervall $[x_{i-1}, x_i]$ eine **Zwischenstelle** $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.
3. Wir betrachten die Rechtecke mit Grundfläche $[x_{i-1}, x_i]$ und Höhe $f(\xi_i)$.

Riemannsummen

Eine Näherung für die Gesamtfläche ist die **Riemannsumme**

$$S(Z, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Man betrachtet nun immer feinere Zerlegungen. Dabei versteht man unter der **Feinheit** $\ell(Z)$ einer Zerlegung Z die Länge des größten Teilintervalls, d.h. $\ell(Z) = \max_{i=1,\ldots,n} (x_i - x_{i-1})$.

Das Riemann-Integral

Definition 6.1

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann heißt f über $[a, b]$ **integrierbar**, wenn für jede Folge von Zerlegungen Z_n von $[a, b]$ mit $\ell(Z_n) \to 0$ und beliebiger Wahl von Zwischenstellen ξ_i^n, die Folge der Riemannsummen $S(Z_n, \xi^n)$ stets konvergent ist und immer denselben Grenzwert besitzt. Dieser Grenzwert heißt das **(Riemann-)Integral von** f **über** $[a, b]$ und wird mit

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

bezeichnet.

Integrierbarkeit und Stetigkeit

Der folgende Satz gibt eine wichtige hinreichende Bedingung für die Integrierbarkeit.

Satz 6.2

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f über $[a, b]$ integrierbar.

Wenn bereits bekannt ist, dass f auf $[a, b]$ integrierbar ist, können zur Berechnung von $\int_a^b f(x)\,dx$ möglichst günstige Zerlegungen und Zwischenstellen verwendet werden.

Beispiele 6.3

1. $\displaystyle\int_0^b x^2\,dx$
2. $\displaystyle\int_1^b \frac{dx}{x}$

Rechenregeln

Satz 6.4

Seien f und g auf $[a,b]$ integrierbar. Dann gilt

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ für $c \in (a,b)$
2. $\displaystyle\int_a^b \Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
3. Aus $f(x) \le g(x)$ auf $[a,b]$ folgt $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$
4. $\displaystyle\Big|\int_a^b f(x)\,dx\Big| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

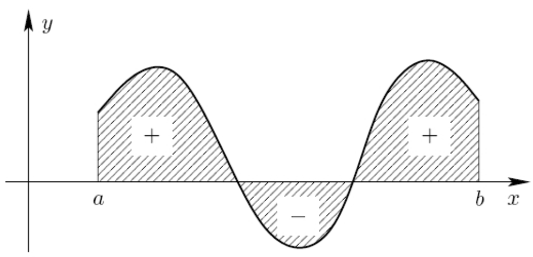
Berechnung von Flächeninhalten

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und A die Fläche, die vom Graphen von f, der x-Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird.

- Ist $f(x) \ge 0$ auf $[a,b]$, so ist $A = \int_a^b f(x)\,dx$.
- Ist $f(x) \le 0$ auf $[a,b]$, so ist $A = -\int_a^b f(x)\,dx$.

Allgemein gilt $\int_a^b f(x)\,dx = A_+ - A_-$, wobei

$$A_+ = \text{Flächeninhalt der Bereiche oberhalb der } x\text{-Achse},$$
$$A_- = \text{Flächeninhalt der Bereiche unterhalb der } x\text{-Achse}.$$



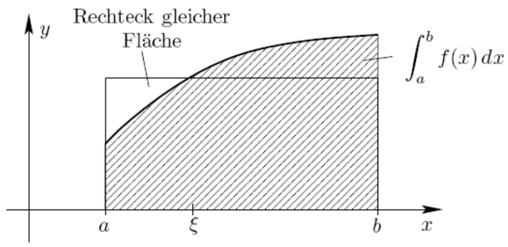
Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz 6.5

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

Geometrische Bedeutung: Die Fläche zwischen der x-Achse und der Kurve $y = f(x)$ (im Bereich $a \le x \le b$) ist gleich der Rechtecksfläche über $[a, b]$ mit der Höhe $f(\xi)$ für eine Stelle $\xi \in (a, b)$.



Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz 6.6

1. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in [a, b]$ beliebig und $F(x) := \int_{x_0}^x f(t)\,dt$ für $x \in [a, b]$. Dann ist F differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$ für $x \in [a, b]$.*
2. *Sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $F'(x) = f(x)$ für $x \in [a, b]$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: F(x)\Big|_a^b$$

Beispiel 6.7

$$\int_0^1 e^x\,dx$$

Stammfunktion und unbestimmtes Integral

Definition 6.8

Eine differenzierbare Funktion F mit $F'(x) = f(x)$ auf $[a, b]$ heißt **Stammfunktion von** f.

Sind F und G zwei Stammfunktionen von f, so gilt $(F - G)' = 0$, also $G(x) = F(x) + c$ mit einer Konstante $c \in \mathbb{R}$.

Eine Stammfunktion von f nennt man auch **unbestimmtes Integral von** f und schreibt dafür

$$\int f(x)\, dx.$$

Wichtige Stammfunktionen

Es seien $c \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$f(x)$	$\int f(x)\, dx$	$f(x)$	$\int f(x)\, dx$
0	c	$\sinh(x)$	$\cosh(x) + c$
x^r	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + c$	$\cosh(x)$	$\sinh(x) + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + c$
e^x	$e^x + c$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2} \ln\left\lvert \frac{1+x}{1-x} \right\rvert + c$
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x + c$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arsinh}(x) + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\ln\lvert x + \sqrt{x^2 - 1}\rvert + c$