6. Integration
6.2 Integrationsmethoden

Partielle Integration (Produktintegration)

Unbestimmte Integration der Produktregel
$(u \cdot v)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ liefert

$$(u \cdot v)(x) = \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx$$

und damit

$$\boxed{\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx.}$$

Um diese Regel für die Berechnung von $\int f(x)\,dx$ anwenden zu können, versucht man, f als $u \cdot v'$ zu schreiben, und zwar so, dass $\int u'(x)v(x)\,dx$ einfacher zu berechnen ist.

Beispiel 6.9

$$\int x \sin(x)\,dx$$

Substitutionsregel

Für differenzierbare Funktionen F und g gilt $(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t)$ nach der Kettenregel. Also folgt mit $f = F'$:

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = \int (F \circ g)'(t)\,dx = F(g(t)) + c.$$

In die Stammfunktion F von f ist also $g(t)$ als Argument einzusetzen. Als Abkürzung für diese Ersetzung verwendet man die Schreibweise $[h(x)]_{x=g(t)} := h(g(t))$.

Substitutionsregel (1. Variante)

Es gilt

$$\boxed{\int f(g(t))g'(t)\,dt = \left[\int f(x)\,dx\right]_{x=g(t)}},$$

falls f stetig und g stetig differenzierbar ist. Der Name „Substitutionsregel“ kommt von der Substitution $x = g(t)$.

Beispiel 6.10

$$\int \sin(t)\cos^2(t)dt$$

Substitutionsregel (2. Variante)

Um $\int f(x)dx$ zu berechnen, sucht man eine umkehrbare Funktion g so, dass $\int f(g(t))g'(t)dt$ einfach ausgewertet werden kann. Ersetzt man dann die Variable t durch $g^{-1}(x)$, so erhält man das Integral $\int f(x)dx$:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \left[\int f(g(t))g'(t)\,dt\right]_{t=g^{-1}(x)}.}$$

Richtig ist das z.B., wenn f stetig und g stetig differenzierbar mit $g'(t) \neq 0$ ist.

Beispiel 6.11

$$\int \sin\sqrt{x}\,dx$$

Substitutionsregel (Spezialfälle)

1. $g(t) = at + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Dann gilt

$$\int f(at+b)\,dt = \frac{1}{a}\int a\cdot f(at+b)\,dt = \frac{1}{a}\left[\int f(x)\,dx\right]_{x=at+b}.$$

2. Für $f(x) = \frac{1}{x}$ lautet die Substitutionsregel

$$\int \frac{g'(t)}{g(t)}\,dt = \left[\int \frac{1}{x}\,dx\right]_{x=g(t)} = [\ln|x|]_{x=g(t)} = \ln|g(t)| + c.$$

Beispiel 6.12

$$\int \cosh(at+b)dt$$

$$\int \frac{2x}{1+x^2}dx$$

Substitution bei bestimmten Integralen

Bei Substitution in bestimmten Integralen müssen auch die Grenzen transformiert werden. Dafür entfällt dann die Rücksubstitution. Es gilt

$$\boxed{\int_a^b f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx,}$$

falls f stetig und g stetig differenzierbar ist.

Beispiel 6.13

$$\int_1^e \frac{1}{t(1+\ln(t))}dt$$