7. Gewöhnliche Differentialgleichungen
7.2 Lineare Differentialgleichungen

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Eine DGL der Form

$$\boxed{y'(t) + a(t)y(t) = f(t).}$$

mit stetigen Funktionen a und f heißt (inhomogene) **lineare Differentialgleichung 1. Ordnung**.

Die zugehörige **homogene DGL** lautet

$$\boxed{y'(t) + a(t)y(t) = 0.}$$

Beispiel 7.3

$y'(t) + y(t) = \sin(t), \qquad y(0) = 1$

Lösungsverfahren

1. Wir bestimmen die allgemeine Lösung y_h der homogenen DGL
$$y'(t) + a(t)y(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y'(t) = -a(t)y(t).$$
Dies ist eine DGL mit getrennten Variablen.
2. Wir bestimmen eine spezielle Lösung y_s der inhomogenen DGL
$$y'(t) + a(t)y(t) = f(t)$$
mittels **Variation der Konstanten**.
3. Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL ist dann
$$y(t) = y_s(t) + y_h(t).$$

Ein Beispiel aus der Reaktionskinetik

Für eine Folgereaktion $A \overset{k_1}{\to} B \overset{k_2}{\to} C$ erhält man das DGL-System

$$\begin{aligned} c_A'(t) &= -k_1\, c_A(t), \\ c_B'(t) &= k_1\, c_A(t) - k_2\, c_B(t), \\ c_C'(t) &= k_2\, c_B(t). \end{aligned}$$

Dies ist ein *lineares* DGL-System 1. Ordnung. Wir lösen die Gleichungen sukzessive.

Lineare DGLen 2. Ordnung

Die allgemeine lineare DGL 2. Ordnung hat die Form

$$\boxed{y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t).}$$

Für diese DGL gibt es kein allgemeines Lösungsverfahren.
Man kennt aber die Struktur der allgemeinen Lösung:

$$\begin{aligned} &\text{allgemeine Lösung der inhomogenen DGL} \\ = \; &\text{spezielle Lösung der inhomogenen DGL} \\ + \; &\text{allgemeine Lösung der homogenen DGL} \end{aligned}$$

Lösungsverfahren für einen Spezialfall (1)

Wir wenden uns dem wichtigen Spezialfall der homogenen linearen DGL

$$\boxed{y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0.}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ zu, für den ein Lösungsverfahren existiert.
Wir verwenden den Exponentialansatz $y(t) = e^{\lambda t}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$.
Einsetzen ergibt

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\lambda^2 + a\lambda + b = 0}$$

Das Vorzeichen der Diskriminante $D = \frac{a^2}{4} - b$ entscheidet über den Typ der allgemeinen Lösung.

Lösungsverfahren für einen Spezialfall (2)

1. $D > 0$, d.h. zwei verschiedene reelle Lösungen $\lambda_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{D}$

$$\boxed{y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2. $D = 0$, d.h. eine reelle Lösung $\lambda = -\frac{a}{2}$

$$\boxed{y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t},} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3. $D < 0$, d.h. zwei konjugiert komplexe Lösungen $\lambda_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm i\omega$ mit $\omega = \sqrt{-D}$

$$\boxed{y(t) = e^{-\frac{a}{2}t}(c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)),} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Ein Beispiel

Beispiel 7.4

$y'' + \omega^2 y = 0$