8. Elemente der linearen Algebra
8.1 Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$

8. Elemente der linearen Algebra | 8.1 Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$

Definition von $\mathbb{R}^n$

Definition 8.1

Unter dem Raum $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) versteht man das kartesische Produkt $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ (n-mal), d.h.

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_k \in \mathbb{R} \quad \text{für } k = 1, \ldots, n\}.$$

Ist $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, so heißt x_k **k-te Koordinate** von X.

Zwei Punkte $X, Y \in \mathbb{R}^n$ sind genau dann gleich, wenn $x_k = y_k$ für alle $k = 1, \ldots, n$ gilt.

Beispiel 8.2

Wir skizzieren Punkte in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$.

Sina Ober-Blöbaum | Mathematik für Chemiker

Parallelverschiebungen in $\mathbb{R}^n$

$\tau : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt (Parallel-)**Verschiebung**, falls reelle Zahlen $d_1, \ldots, d_n$ existieren, so dass für alle Punkte $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\tau(x_1, \ldots, x_n) = (x_1 + d_1, \ldots, x_n + d_n).$$

Wir notieren die Komponenten $d_1, \ldots, d_n$ in einem **Spaltenvektor** und bezeichnen diesen mit $\vec{d}$:

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

Zu jeder Verschiebung τ gehört genau ein $\vec{d}$. Umgekehrt definiert jeder Spaltenvektor $\vec{d}$ eine Verschiebung. Also kann man $\vec{d}$ mit der zugehörigen Verschiebung identifizieren.

Anschauliche Interpretation: Pfeile

Anschaulich kann man sich Vektoren als Pfeile vorstellen. Dabei werden alle Pfeile mit gleicher Länge und gleicher Richtung als gleich angesehen.

In der Physik werden z.B. Momentangeschwindigkeiten oder Kräfte als Vektoren in $\mathbb{R}^3$ interpretiert.

Vektoraddition

Addition von Vektoren $\vec{u}, \vec{v}$:

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$$

Anschaulich: Vektoren werden addiert, indem man geeignete Pfeile aneinandersetzt.

Reelle Vielfache von Vektoren

Multiplikation einer reellen Zahl λ mit einem Vektor $\vec{u}$:

$$\lambda \vec{u} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}$$

Anschaulich:

- Multiplikation mit $\lambda > 0$: Pfeilrichtung wird beibehalten, die Pfeillänge mit λ multipliziert.
- Multiplikation mit $\lambda < 0$: Pfeilrichtung kehrt sich um, die Pfeillänge wird mit $|\lambda|$ multipliziert.

Nullvektor und Verbindungsvektor

- Der Vektor
$$\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$
heißt **Nullvektor** in $\mathbb{R}^n$.
- Sind A und B Punkte des $\mathbb{R}^n$, so gibt es genau eine Verschiebung, die A auf B abbildet. Den zugehörigen Spaltenvektor
$$\vec{d} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{pmatrix}.$$
nennt man auch **Verbindungsvektor** von A und B und schreibt $\vec{AB}$ für $\vec{d}$.

Ortsvektoren

Definition 8.3

Unter dem **Ortsvektor** eines Punktes $P \in \mathbb{R}^n$ versteht man den Vektor $\vec{p} = \vec{OP}$ (Verbindungsvektor vom Ursprung O zum Punkt P).

Jedem Punkt P kann eindeutig sein Ortsvektor $\vec{p}$ zugeordnet werden.

Umgekehrt gehört zu jedem Vektor $\vec{p}$ ein Punkt P, nämlich das Bild des Ursprungs unter der Verschiebung $\vec{p}$.

Also kann man statt Punkten mit Ortsvektoren arbeiten.

Parameterdarstellung einer Geraden g

Sei g eine Gerade in $\mathbb{R}^n$. Wir wählen zwei verschiedene Punkte $A, B \in g$. Dann gilt für jedes $X \in g$:

$$\vec{x} = \vec{OX} = \vec{OA} + \lambda \vec{AB} = \vec{a} + \lambda \vec{AB}$$

für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\vec{AB}$ heißt **Richtungsvektor** der Geraden g.
- Parameterdarstellungen sind nicht eindeutig. Eine andere Parameterdarstellung ist z.B. $\vec{x} = \vec{b} + \mu \vec{BA}$.

Beispiel 8.4

Geben Sie zwei verschiedene Parameterdarstellungen der Geraden g in $\mathbb{R}^2$ durch die Punkte $A = (1, 3)$ und $B = (2, -1)$ an.

Euklidnorm und inneres Produkt in $\mathbb{R}^n$

Um in $\mathbb{R}^n$ Abstände und Winkel messen zu können, führen wir folgende Begriffe ein. Wir schreiben ab jetzt einfach x statt $\vec{x}$.

Definition 8.5

Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Dann heißt

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

die **Euklidnorm** von x und

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$$

das **innere Produkt** (oder **Skalarprodukt**) von x und y.

Geometrische Interpretation

1. Die Euklidnorm $\|x\|$ ist die Länge der Strecke von O nach X, d.h. die Länge des Ortsvektors x. Entsprechend ist $\|x - y\|$ der Abstand zweier Punkte X und Y.
2. Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| = 1$ heißt **normiert** oder **Einheitsvektor**.
3. Gilt $\langle x, y\rangle = 0$, so sind x und y zueinander senkrecht (**orthogonal**). Allgemeiner gilt:

$$\langle x, y\rangle = \|x\| \, \|y\| \cos(\varphi),$$

wobei φ der von x und y eingeschlossene Winkel ist.

Eigenschaften der Euklidnorm und des inneren Produkts

Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
3. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (**Dreiecksungleichung**).

Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

1. $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$
2. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
3. $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$
4. $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$ (**Cauchy-Schwarz- Ungleichung**).