8. Elemente der linearen Algebra
8.2 Lineare Unabhängigkeit, Teilräume, Basis und Dimension

Lineare Unabhängigkeit

Definition 8.5

Seien $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{R}^n$ Vektoren.

1. $x \in \mathbb{R}^n$ heißt **Linearkombination** von $a_1, a_2, \ldots, a_m$, wenn es Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ gibt mit $x = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k$.
2. $a_1, a_2, \ldots, a_m$ heißen **linear unabhängig**, falls gilt:
$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k = 0 \text{ (mit } \lambda_k \in \mathbb{R}) \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0.$$
3. $a_1, a_2, \ldots, a_m$ heißen **linear abhängig**, falls sie nicht linear unabhängig sind.

Beispiele zur linearen Unabhängigkeit

Die Vektoren $a_1, \ldots, a_m$ sind genau dann linear abhängig, wenn mindestens ein a_i als Linearkombination der übrigen a_j geschrieben werden kann.

Beispiele 8.6

1. $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$
2. $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$
3. $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Teilräume von $\mathbb{R}^n$

Definition 8.7

Eine Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Teilraum** (oder **Unterraum**) von $\mathbb{R}^n$, wenn Addition und Multiplikation mit reellen Zahlen nicht aus V herausführt, d.h.

$$x, y \in V \text{ und } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \implies \lambda x + \mu y \in V$$

Beispiele 8.8

1. In $\mathbb{R}^2$: Jede Gerade durch den Ursprung ist ein Teilraum von $\mathbb{R}^2$. Eine Gerade, die den Ursprung nicht enthält ist kein Teilraum von $\mathbb{R}^2$.
2. $V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$ ist Teilraum des $\mathbb{R}^3$.
3. $V = \{0\}$ und $V = \mathbb{R}^n$ sind Teilräume des $\mathbb{R}^n$.

Basis: Motivation

Jedes Element $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ lässt sich eindeutig als Linearkombination der Vektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ darstellen:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2.$$

Ebenso lässt sich x als Linearkombination von $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ schreiben: $x = \frac{x_1 + x_2}{2} b_1 + \frac{x_1 - x_2}{2} b_2$.

Sowohl $\{e_1, e_2\}$ also auch $\{b_1, b_2\}$ bilden eine sogenannte **Basis** des $\mathbb{R}^2$.

Basis: Definition und Beispiele

Definition 8.9

Sei V ein Teilraum des $\mathbb{R}^n$. Eine Menge $\{b_1, \ldots, b_m\} \subseteq V$ heißt **Basis** von V, wenn

1. $b_1, \ldots, b_m$ linear unabhängig sind und
2. jedes $v \in V$ Linearkombination der $b_1, \ldots, b_m$ ist.

Beispiele 8.10

1. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ sind Basen des $\mathbb{R}^2$.
2. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist keine Basis des $\mathbb{R}^2$.
3. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ ist keine Basis des $\mathbb{R}^2$.

Standardbasis des $\mathbb{R}^n$

Allgemein heißt $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ mit

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \cdots, \; e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Standardbasis des $\mathbb{R}^n$.

Dimension: Motivation und Definition

1. $\{b_1, \ldots, b_m\} \subseteq V$ ist genau dann eine Basis von V, wenn jedes $v \in V$ eine *eindeutige* Darstellung als Linearkombination der $b_1, \ldots, b_m$ hat.
2. Jede Basis von V hat die gleiche Anzahl von Elementen.

Aufgrund der letzten Bemerkung ist folgende Definition sinnvoll:

Definition 8.11

Sei V ein Teilraum des $\mathbb{R}^n$. Ist $V \neq \{0\}$, so bezeichnet man als **Dimension** von V die Anzahl der Elemente einer Basis von V.

Schreibweise: $\dim V$.

Für $V = \{0\}$ setzt man $\dim V = 0$.

Dimension: Beispiele

Beispiele 8.12

1. Für $V = \mathbb{R}^n$ gilt $\dim V = n$, denn die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ hat n Elemente.
2. Wir bestimmen die Dimension von $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.