8. Elemente der linearen Algebra
8.4 Lineare Gleichungssysteme

8. Elemente der linearen Algebra | 8.4 Lineare Gleichungssysteme

Matrixschreibweise

Lineares Gleichungssystem (LGS):

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

In Matrixschreibweise: $A\,x = b$ mit

- **Koeffizientenmatrix**: $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}$,
- **rechter Seite** $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ und
- gesuchtem Vektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Sina Ober-Blöbaum | Mathematik für Chemiker

Homogenes und inhomogenes LGS

- $b = 0$: Das LGs $Ax = 0$ heißt **homogen**.
- $b \neq 0$: Das LGS $Ax = b$ heißt **inhomogen**. $Ax = 0$ heißt das zugehörige homogene LGS.
- **erweiterte Koeffizientenmatrix**:

$$(A|b) := \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Lösbarkeit und Struktur der Lösungsmenge

Satz 8.21

Sei $A \in M_{m,n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Dann sind äquivalent:

1. *$Ax = b$ ist lösbar,*
2. *$b \in Bild(A)$*
3. *$Rang(A) = Rang(A|b)$*

Gilt $Rang(A) = m$, so ist $Ax = b$ für beliebiges $b \in \mathbb{R}^m$ lösbar.

Satz 8.22

Sei $A \in M_{m,n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und x_s eine spezielle Lösung von $Ax = b$. Dann ist die Lösungsmenge von $Ax = b$ gleich

$$x_s + Kern(A) = \{x_s + x : Ax = 0\}.$$

Beispiele

Beispiele 8.23

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}^2$

Weitere Beispiele werden in der Vorlesung an der Tafel gerechnet.

Elementare Zeilenoperationen

Bei Anwendung der folgenden **elementaren Zeilenoperationen** auf $(A|b)$ ändert sich die Lösungsmenge des LGS $Ax = b$ nicht:

- Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl $\neq 0$;
- Addition einer Zeile zu einer anderen;
- Vertauschen zweier Zeilen;
- Streichen einer Nullzeile, d.h. einer Zeile der Form $(0, 0, \dots, 0|0)$.

Falls dabei eine Zeile der Form $(0, 0, \dots, 0|*)$ mit $* \neq 0$ entsteht, ist das LGS unlösbar!

Treppenform

Ist das LGS $Ax = b$ lösbar, so lässt sich $(A|b)$ durch elementare Zeilenoperationen auf **Treppenform** bringen:

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c}
0\cdots 0 & 1 & *\cdots * & 0 & *\cdots * & & 0 & *\cdots * & * \\
0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 1 & *\cdots * & & 0 & *\cdots * & * \\
0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & & 0 & *\cdots * & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & 0 & 0\cdots 0 & & 1 & *\cdots * & *
\end{array}\right)$$

Hierbei steht $*$ für beliebige reelle Zahlen. Auch 0 ist möglich.

Die Lösungsmenge von $Ax = b$ lässt sich an der Treppenform leicht ablesen. Wie das geht, wird in Beispielen an der Tafel gezeigt.