8. Elemente der linearen Algebra
8.5 Quadratische Matrizen und Determinanten

8. Elemente der linearen Algebra | 8.5 Quadratische Matrizen und Determinanten

Einheitsmatrix

Die quadratische **Einheitsmatrix** $I_n \in M_{n,n}$ ist definiert durch

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Auf der Hauptdiagonalen stehen Einsen, außerhalb Nullen.)
Durch Ausmultiplizieren sieht man

$$I_n\, A = A = A\, I_n \qquad \text{für alle } A \in M_{n,n}.$$

Sina Ober-Blöbaum | Mathematik für Chemiker

Inverse Matrix: Definition

Definition 8.24

$A \in M_{n,n}$ heißt **invertierbar** (oder **regulär**), wenn es eine Matrix $B \in M_{n,n}$ gibt mit

$$A\,B = I_n = B\,A.$$

In diesem Fall heißt B **Inverse von** A und wird mit A^{-1} bezeichnet.

Um die Inverse von $A \in M_{n,n}$ zu bestimmen, reicht es aus, eine Matrix $B \in M_{n,n}$ mit $A\,B = I_n$ zu finden. Dann folgt automatisch die Gleichung $B\,A = I_n$.

Inverse Matrix: Beispiele

Beispiele 8.25

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \implies B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist *nicht* invertierbar.

Invertierbarkeit und LGSe

Ist A eine invertierbare Matrix und ist A^{-1} bekannt, so ist das lineare Gleichungssysteme $A\,x = b$ sofort lösbar:

$$\begin{aligned} Ax = b \quad & \Longleftrightarrow \quad (A^{-1}A)x = A^{-1}b \\ & \Longleftrightarrow \quad I_n\,x = A^{-1}b \\ & \Longleftrightarrow \quad x = A^{-1}b. \end{aligned}$$

Beispiel 8.26

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & = & 4 \\ -x_1 & + & x_2 & = & -2 \end{array}$$

Die Determinante für $A \in M_{2,2}$

Es sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{2,2}$. Dann ist A invertierbar genau dann, wenn $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ ist. Außerdem gilt dann (nachrechnen!)

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Wir definieren die **Determinante** $\det(A)$ von A durch

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Die Determinante für $A \in M_{3,3}$

Für $A \in M_{3,3}$ ist

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}\end{aligned}$$

Dies lässt sich gut mit der **Regel von Sarrus** merken (wird an der Tafel erklärt).
Vorsicht! Die Regel von Sarrus gilt *nur für* 3×3-*Matrizen!*

Der Laplace'sche Entwicklungssatz

Satz 8.27

Sei $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det S_{ij} \ \textit{(Entwicklung nach der } i\textit{-ten Zeile)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det S_{ij} \ \textit{(Entwicklung nach der } j\textit{-ten Spalte)}\end{aligned}$$

Dabei ist S_{ij} diejenige Matrix, die aus A durch Streichung der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Anwendung auf 4×4-Matrizen

Beispiel 8.28

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

Invertierbarkeitskriterien

Satz 8.29

Sei $A \in M_{n,n}$. Dann sind äquivalent:

1. *A ist invertierbar,*
2. *$\mathrm{Rang}(A) = n$,*
3. *$\mathrm{Kern}(A) = \{0\}$,*
4. *$\mathrm{Bild}(A) = \mathbb{R}^n$.*
5. $\det A \neq 0$.
6. *$Ax = b$ ist für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ eindeutig lösbar.*
7. *$Ax = 0$ nur die Lösung $x = 0$.*

Kriterium für lineare Unabhängigkeit

Satz 8.30

Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$. Dann sind äquivalent:

1. $a_1, \dots, a_n$ *sind linear unabhängig.*
2. $\det A \neq 0$, *wenn A die Spaltenvektoren $a_1, \dots, a_n$ hat.*

Beispiele 8.31

1. $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Cramer-Regel

Satz 8.32

Sei $A = (\alpha_{ij}) \in M_{n,n}$ mit $\det A \neq 0$ und sei $b \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die eindeutige Lösung von $Ax = b$ durch

$$x_i = \frac{1}{\det A} \det(C_i) \qquad i = 1, \dots, n$$

gegeben, wobei

$$C_i = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,i-1} & b_1 & \alpha_{1,i+1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{n,i-1} & b_n & \alpha_{n,i+1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}$$

d.h. die $i-$te Spalte von A wird durch b ersetzt.

Rechenregeln für Determinanten

Für $A, B \in M_{n,n}$ gelten:

1. $\det(A \cdot B) = \det A \det B$.
2. $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$, falls A invertierbar ist.
3. $\det A^{\mathrm{T}} = \det A$.
4. Sind zwei Spalten (oder Zeilen) von A gleich, so ist $\det A = 0$.

Determinanten und elementare Zeilenoperationen

Bei der Anwendung von elementaren Zeilenoperationen auf eine Matrix A ist zu beachten:

1. Multipliziert man eine Zeile von A mit $\lambda \in \mathbb{R}$, so hat die neue Matrix Determinante $\lambda \det(A)$.
2. Beim Austausch zweier Zeilen von A wechselt $\det(A)$ das Vorzeichen.
3. Addition des λ-fachen einer Zeile von A zu einer anderen Zeile von A ändert $\det(A)$ nicht.