Mathematik für Chemiker SS 2013

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1

Welche der Folgen (a_n) ist konvergent, welche bestimmt divergent? Bestimmen Sie gegebenenfalls den (uneigentlichen) Grenzwert.

a) $a_n = \frac{(n-2)^2 - n^2}{n}$

b) $a_n = \left(\frac{1}{n} - n\right)^n$

c) $a_n = \left(7 + \frac{1}{n}\right)^2$

d) $a_n = \left(3 - \frac{1}{n}\right)^n$

e) $a_n = \frac{n^2 - 3n + 1}{(n+1)^3 - n^3}$

f) $a_n = \frac{(-1)^n n^2}{n^2 + 4n + 1}$

g) $a_n = \frac{n^n}{n!}$

Aufgabe 6.2

Welche der nachstehenden Folgen (a_n) sind Nullfolgen? (Mit Begründung!)

a) $a_n = \frac{1}{n} \sin n$

b) $a_n = \frac{3^{n+1}}{4^{n-1}}$

c) $a_n = (-1)^n n^2 / \binom{n}{3}$

Aufgabe 6.3

Zeigen Sie jeweils, dass die Folge (a_n) konvergiert und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert für $n \rightarrow \infty$.

a) $a_n = \left(\frac{3n+1}{n+1} - \frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$

b) $a_n = \frac{7n^7(1 + \frac{1}{n!})(n^3 - n^2)}{(n^3 + 2)(n^5 + \sqrt{n+1})n^2}$

c) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

d) $a_n = \sqrt{2n+1}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

Aufgabe 6.4

Die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}a_n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0.$$

- Berechnen Sie die Folgenglieder $a_1, \dots, a_5$.
- Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass $(a_n)_{n \geq 0}$ eine streng monoton wachsende Folge ist und dass für alle Folgenglieder $a_n \leq 2$ gilt.

Aufgabe 6.5

Die Folge (a_n) sei durch $a_1 = 3$ und $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 12}$ für $n \geq 1$ gegeben.

- Zeigen Sie, dass (a_n) monoton wachsend ist mit $a_n \leq 4$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Zeigen Sie, dass (a_n) konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Bemerkung: Alle Informationen zu dieser Vorlesung finden Sie unter <http://www2.math.uni-paderborn.de/people/sinaob/teaching/mathematik.html>

Abgabetermin Mittwoch, 22.05.2013, 11:00 Uhr, im grünen Kasten 111 im Flur D1.

Einzelabgaben sind sinnvoll und nützlich, Gruppenabgaben möglich (nicht mehr als drei Personen). Bitte vergessen Sie nicht, auf Ihren Abgaben Ihren Namen und Ihre Matrikel-Nummer anzugeben (bei Gruppenabgaben bitte zu allen Personen). Die Lösungswege sollen handschriftlich, leserlich und nachvollziehbar aufgeschrieben werden.