

Numerische Mathematik I

Übungsblatt 1

Aufgabe 1.1 (3 Punkte) Geben Sie alle LR -Zerlegungen der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 6 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

an. Begründen Sie Ihre Antwort mit einem Beweis.

Aufgabe 1.2 (3 Punkte) Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 10^{-12}x + y + z &= 2 \\ x + 2y - z &= 2 \\ -x + y + z &= 1 \end{aligned}$$

Berechnen Sie per Hand die Lösung mit Hilfe der LR -Zerlegung

- (a) ohne Pivotsuche,
- (b) mit Spaltenpivotsuche,

wobei sie alle Rechnungen mit (genau) 10 Dezimalstellen Genauigkeit durchführen. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit der (ebenfalls von Ihnen bestimmten) exakten Lösung.

Aufgabe 1.3 (5 Punkte) (a) Zeigen Sie, dass das Produkt und die Inverse (falls sie existiert) oberer (unterer) Dreiecksmatrizen wieder eine obere (untere) Dreiecksmatrix ist.

- (b) Sei A eine reguläre $n \times n$ -Matrix mit der LR -Zerlegung

$$A = LR,$$

wobei R eine obere Dreiecksmatrix und L eine untere Dreiecksmatrix ist, deren Diagonaleinträge sämtlich 1 sind. Zeigen Sie unter Verwendung von (a), dass diese Zerlegung eindeutig ist.

Aufgabe 1.4 (4 Punkte) Nach der *Cramer'schen Regel* lässt sich die Lösung x eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$ durch die Formel

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A} \quad \text{für } i \in \{1, \dots, n\}$$

darstellen, wobei die Matrix B_i aus A entsteht, in dem die i -te Spalte von A durch b ersetzt wird. Schreiben Sie ein kurzes C-Programm zur Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 - 10^{-d} \\ 1 - 10^{-d} & 1 - 2 \cdot 10^{-d} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 - 10^{-d} \\ 2 - 3 \cdot 10^{-d} \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Cramer'schen Regel, das für alle $d \in \{1, 2, \dots, 10\}$ den Lösungsvektor $x \in \mathbb{R}^2$ ausgibt. Verwenden Sie dabei einfach genaue (`float`) Variablen.

Versuchen Sie die numerischen Ergebnisse zu erklären.

Zur Abgabe: Die Lösung zu dieser Aufgabe besteht aus einem Programm, das die gewünschten Lösungen berechnet, einem Ausdruck eines Programmablaufs und einer kurzen Erklärung der Ergebnisse. Bitte geben Sie neben einem Ausdruck des Programmablaufs auch den *Quelltext* des Programms über die Webseite http://www.math.upb.de/~mirkoh/NumerikI_WS0405/index.html ab.

Bemerkungen: Einen *Leistungsnachweis* zu dieser Vorlesung erwirbt, wer mindestens 50 % der auf den Übungsblättern erreichbaren Punkte erhält und aktiv an den Übungen zur Vorlesung teilnimmt.

Abgabetermin für dieses Blatt: 26. 10. 2004, 9.15 Uhr, oranger Kasten 12 im Flur D1. Bitte vergessen Sie nicht, auf dem Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikel-Nummer sowie den Termin der besuchten Übungsgruppe anzugeben.