

Numerische Mathematik I

Übungsblatt 2

Aufgabe 2.1 (3 Punkte) Formulieren Sie das Cholesky-Verfahren als Algorithmus, mit Hilfe von Strukturen wie `for`-Schleifen und Zuweisungen, aber ohne auf die spezifische Syntax einer Programmiersprache zu achten. Zeigen Sie, dass der Rechenaufwand für die Cholesky-Faktorisierung einer allgemeinen symmetrischen positiv definiten $n \times n$ Matrix im Wesentlichen aus $\frac{n^3}{6}$ Multiplikationen und n Quadratwurzeln besteht.

Aufgabe 2.2 (4 Punkte) In vielen Anwendungen treten sog. *Bandmatrizen* auf, in denen nur wenige, speziell angeordnete Elemente von Null verschieden sind. Für die Faktorisierung solcher Matrizen lassen sich häufig besonders effiziente Algorithmen finden. Formulieren Sie eine Variante des Cholesky-Verfahrens für symmetrische positiv definite *Tridiagonalmatrizen*, bei denen nur die Hauptdiagonale und die beiden ersten Nebendiagonalen mit von Null verschiedenen Elementen ‘bevölkert’ sind (d. h. Matrizen, für die gilt $a_{ij} = 0$ falls $|i - j| > 1$).

Aufgabe 2.3 (6 Punkte) Große, aber einfach strukturierte lineare Gleichungssysteme treten häufig bei der numerischen Lösung gewisser Differentialgleichungen auf. Betrachten Sie z. B. das *Randwertproblem*

$$\begin{aligned} -x''(t) &= (1 + t^2)x(t) + 1 & (t \in [-1, 1]), \\ x(-1) &= x(1) = 0, \end{aligned}$$

das das Durchbiegen eines Balkens mit fest aufliegenden Enden beschreibt. Eine Näherungslösung des Problems kann ermittelt werden, indem $x(t)$ nur für bestimmte *Gitterpunkte* $t_j = -1 + jh$, $j = 0, 1, \dots, N$ (mit $h = \frac{2}{N}$ und $N \in \mathbb{N}$), betrachtet und die zweite Ableitung durch den sog. *Differenzenquotienten zweiter Ordnung*

$$x''(t_j) \approx \frac{x(t_{j+1}) - 2x(t_j) + x(t_{j-1}))}{h^2} \quad (j = 1, \dots, N - 1)$$

ersetzt wird.

- Zeigen Sie, dass die Näherungslösungen $x(t_i)$, $i = 1, \dots, N - 1$, eine Gleichung der Form $Ax = b$ erfüllen. Welche spezielle Struktur besitzt A ?
- Nehmen Sie als gegeben an, dass A positiv definit ist. Schreiben Sie ein C-Programm zur Lösung der Gleichung für die $x(t_j)$ mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung von A . Wenn Sie das Ergebnis geeignet ausgeben lassen, können sie ein Programm wie z. B. `gnuplot` verwenden, um es grafisch darzustellen. (Mehr dazu unter http://www.math.upb.de/~mirkoh/NumerikI_WS0405.)

Aufgabe 2.4 (3 Punkte) Warum ergibt die folgende Programmzeile für gewisse positive float-Werte `a`, `b` und `eps` eine Endlosschleife?

```
while(abs(a-b) > eps) {a = (a+b)/2;}
```

Abgabetermin für dieses Blatt: 2. 11. 2004, 9.15 Uhr, oranger Kasten 12 im Flur D1. Bitte vergessen Sie nicht, auf dem Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikel-Nummer sowie den Termin der besuchten Übungsgruppe anzugeben.