WS 2004/2005

Prof. Dr. Michael Dellnitz
Dr. Robert Preis
Dipl.-Math. Mirko Hessel–von Molo

Numerische Mathematik I

Übungsblatt 4

Aufgabe 4.1 (6 Punkte) Es sei Q eine Householder-Matrix. Zeigen Sie, dass Q die folgenden Eigenschaften besitzt:

(a) Q ist symmetrisch, d.h. $Q = Q^T$;

(b) Q ist orthogonal, d.h. $Q^{-1} = Q^T$;

(c) Q ist involutorisch, d.h. $Q^2 = I$.

Finden Sie eine geometrische Interpretation für Q als Abbildung über die Berechnung aller Eigenwerte und zugehöriger Eigenvektoren.

Aufgabe 4.2 (4 Punkte) Die Matrix $G^{kl} = (g_{ij}^{kl}) \in \mathbb{R}^{m,m}$ sei folgendermaßen definiert

$$g_{ij}^{kl} = \begin{cases} c & \text{für } i = j = k \text{ oder } i = j = l, \\ s & \text{für } i = k \text{ und } j = l, \\ -s & \text{für } i = l \text{ und } j = k, \\ 1 & \text{für } i = j \text{ und } i, j \notin \{k, l\}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $1 \leq k < l \leq m$ und c, s reelle Zahlen sind mit der Eigenschaft $c^2 + s^2 = 1$.

(a) Beweisen Sie, dass G^{kl} eine orthogonale Matrix ist.

(b) Zeigen Sie analog zu der Methode der Householder Matrizen, dass diese Matrizen zur Berechnung einer QR-Zerlegung für eine gegebene Matrix $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m \geq n$, genutzt werden können.

Aufgabe 4.3 (4 Punkte) (a) Schreiben Sie Programme, die das lineare Ausgleichsproblem

$$\|Ax - b\| = \min, \text{ wobei } A \in \mathbb{R}^{m,n},\ b \in \mathbb{R}^m \text{ und } x \in \mathbb{R}^n,$$

über

(1) die Normalgleichungen,

(2) eine mit dem Householder-Verfahren ermittelte QR-Zerlegung

lösen. Verwenden Sie zur Lösung der Normalgleichungen das Cholesky-Verfahren.

(b) Benutzen Sie die in Teil 1 entwickelten Programme, um das folgende Problem zu lösen.
Gegeben sei die Messreihe

t_i	-2	-1	0	1	2
b_i	-0.1	0.1	0.4	0.9	1.6

Approximieren Sie $b(t)$ mit der Funktion $x_1 + x_2\,t + x_3\,t^2$ durch geeignete Wahl der Parameter x_1, x_2, x_3. Überprüfen Sie die Güte der Lösung (Skizze). Geben Sie neben der Lösung in (1) auch die Koeffizientenmatrix der Normalgleichungen und in (2) die Matrizen Q, R aus.

Aufgabe 4.4 (4 Punkte) Berechnen Sie die Singulärwertzerlegung der folgenden Matrizen:

(a) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1,2}$,

(b) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,1}$,

(c) $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,3}$.

Abgabetermin für dieses Blatt: 16. 11. 2004, 9.15 Uhr, oranger Kasten 12 im Flur D1. Bitte vergessen Sie nicht, auf dem Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikel-Nummer sowie den Termin der besuchten Übungsgruppe anzugeben.