WS 2004/2005

Prof. Dr. Michael Dellnitz
Dr. Robert Preis
Dipl.-Math. Mirko Hessel–von Molo

Numerische Mathematik I

Übungsblatt 6

Aufgabe 6.1 (5 Punkte) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei *gerade*, d.h. es gelte

$$f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Es sei p das Polynom vom Grade n, das zu den Stützstellen $x_i = (-1 + \frac{2i}{n}) \cdot b$ (für $i = 0, 1, \ldots, n$ und $b > 0$) die Interpolationsaufgabe

$$p(x_i) = f(x_i), \ i = 0, 1, \ldots, n,$$

löst. Zeigen Sie, dass p gerade ist. Gilt eine analoge Aussage auch für *ungerade* Funktionen (d. h. Funktionen mit $f(-x) = -f(x)$) ?

Aufgabe 6.2 (2 Punkte) Es sei n fest gewählt und $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a, b] \subset \mathbb{R}$ seien paarweise verschiedene Stützstellen. Für $f \in C([a, b])$ bezeichne $p_n(f) \in \Pi_n$ das durch die Stützstellen x_i und die Stützwerte $f_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, eindeutig bestimmte Interpolationspolynom. Es sei $|| \cdot ||_\infty$ die Maximumnorm auf $C([a, b])$. Zeigen Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Darstellung des Interpolationspolynoms, dass für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\|f - g\|_\infty < \delta \Rightarrow \|p_n(f) - p_n(g)\|_\infty < \epsilon \text{ für alle } f, g \in C([a, b]).$$

Aufgabe 6.3 (3 Punkte) In der nachfolgenden Tabelle finden Sie Werte eines Polynoms p vierten Grades. Ein Funktionswert ist falsch. Korrigieren Sie ihn und bestimmen Sie das zugehörige Polynom.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$p(x)$	370	397	451	543	683	880	1124	1476	1888	2383	2965

Hinweis: Untersuchen Sie, wie sich eine Störung im Schema der dividierten Differenzen fortpflanzt.

Aufgabe 6.4 (6 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [-1,1]$ sind die *Tschebyscheff–Polynome* T_n durch

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x))$$

definiert.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in [-1,1]$ die folgenden Rekursionsformeln gelten:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_{n+1}(x) &= 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x) \text{ für } n \geq 1 \end{aligned}$$

(b) Zeigen Sie, dass T_n für $n \geq 1$ ein Polynom der Form

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n,i}x^i$$

ist.

(c) Bestimmen Sie die Nullstellen und Extrema von T_n.

(d) Zeigen Sie: Für ein beliebiges Polynom P vom Höchstgrad n mit führendem Koeffizienten 1 gilt

$$\max_{x\in[-1,1]} |P(x)| \geq \max_{x\in[-1,1]} |2^{1-n}T_n(x)| = 2^{1-n}.$$

(Beweisen Sie sowohl die Ungleichung als auch die Gleichung.)

Anleitung: Nehmen Sie an, es gäbe ein Polynom P kleinerer Maximumnorm, und betrachten Sie das Polynom $P - 2^{1-n}T_n$ an den Extremalstellen von T_n.

Abgabetermin für dieses Blatt: 30. 11. 2004, 9.15 Uhr, oranger Kasten 12 im Flur D1. Bitte vergessen Sie nicht, auf dem Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikel-Nummer sowie den Termin der besuchten Übungsgruppe anzugeben.