Prof. Dr. Michael Dellnitz
Dr. Robert Preis
Dipl.-Math. Mirko Hessel–von Molo

Numerische Mathematik I

Übungsblatt 7

Aufgabe 7.1 (4 Punkte) (a) Schreiben Sie eine C–Funktion, die zu gegebenen Stützstellen x_i und Stützwerten f_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ das Interpolationspolynom in der Newtonschen Darstellung berechnet.

(b) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Verwenden Sie die in a) entwickelte Funktion, um die Interpolationspolynome zu f auf dem Intervall $[-5, 5]$ zu

(a) äquidistanten Stützstellen $x_i = -5 + \frac{10i}{n}$ mit $i = 0, \ldots, n$ und

(b) den Tschebyscheff–Stützstellen $x_i = 5\cos\left(\frac{2(n-i)+1}{2(n+1)}\pi\right)$ mit $i = 0, \ldots, n$

jeweils für $n = 6, 8, 10$ und 12 und die Stützwerte $f_i = f(x_i)$ zu bestimmen. Geben Sie jeweils zumindest den führenden Koeffizienten des berechneten Polynoms aus. Stellen Sie für $n = 12$ die in (a) und (b) erhaltenen Polynome zusammen mit f auf dem Intervall $[-7, 7]$ graphisch dar. Wieso sind ihre Ergebnisse im Lichte von Aufgabe 6.4 zu erwarten gewesen?

Aufgabe 7.2 (3 Punkte) Gegeben seien

$$x_0 = \frac{\pi}{6}, \quad x_1 = \frac{\pi}{3} \quad \text{und} \quad f(x) = \sin(x).$$

Bestimmen Sie ein Polynom 5. Grades p, welches die Bedingungen

$$\begin{aligned} p(x_0) &= f(x_0), \quad p'(x_0) = f'(x_0), \quad p''(x_0) = f''(x_0), \\ p(x_1) &= f(x_1), \quad p'(x_1) = f'(x_1), \quad p''(x_1) = f''(x_1). \end{aligned}$$

erfüllt.

Aufgabe 7.3 (4 Punkte) Die Funktion $\tan(x)$ soll auf dem Intervall $[0{,}9; 1{,}5]$ durch eine Funktion Q der Form

$$Q(x) = d_0 + (x - x_0)\left(d_1 + \frac{d_2(x-x_1)}{d_3 - (x-x_2)}\right)\left[= \frac{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}{c_0 + c_1 x}\right],$$

interpoliert werden. Dazu sollen die Parameter d_0, d_1, d_2 und d_3 so bestimmt werden, dass an den Stellen $x_j = 0{,}9 + j \cdot 0{,}2$ (für $j = 0, 1, 2, 3$) $Q(x_j) = \tan(x_j)$ gilt.

(a) Bestimmen Sie eine Formel für die Parameter d_j in Abhängigkeit von den Stützstellen x_j und Stützwerten $f_j = \tan(x_j)$ $(j = 0, \ldots, 3)$.

(b) Stellen Sie in einem Plot $Q(x)$ und $\tan(x)$ sowie in einem anderen Plot den Interpolationsfehler $Q(x) - \tan(x)$ jeweils auf dem Intervall $[0{,}9; 1{,}5]$ grafisch dar.

(c) Würden Sie bei Verwendung einer Polynomfunktion an Stelle von Q ein besseres, ähnliches oder schlechteres Ergebnis erwarten? Wie begründen Sie ihre Vermutung?

Aufgabe 7.4 (4 Punkte) Verallgemeinern Sie die Idee der Lagrange-Polynome auf zwei Dimensionen, d.h. definieren Sie Polynome $L_{ij}(x, y)$, mit denen die Interpolationsaufgabe $p(x_i, y_j) = f(x_i, y_j)$ auf einem Rechteckgitter $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \times \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$ eindeutig durch

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} f(x_i, y_j) L_{ij}(x, y)$$

gelöst werden kann.

Abgabetermin für dieses Blatt: 7. 12. 2004, 9.15 Uhr, oranger Kasten 12 im Flur D1. Bitte vergessen Sie nicht, auf dem Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikel-Nummer sowie den Termin der besuchten Übungsgruppe anzugeben.