WS 2004/2005

Prof. Dr. Michael Dellnitz
Dr. Robert Preis
Dipl.-Math. Mirko Hessel–von Molo

Numerische Mathematik I

Übungsblatt 8

Aufgabe 8.1 (4 Punkte) (a) Wie lässt sich die schnelle Fourier–Transformation für komplexe Funktionen ausnutzen, um für zwei reelle Datensätze $g_k = g(x_k)$ und $h_k = h(x_k)$ zu den Stützstellen $x_k := \frac{2k\pi}{n}$ (mit $k = 0, \dots, n-1$) gleichzeitig die diskreten Fourier-Transformierten zu berechnen? Beweisen Sie die Richtigkeit ihrer Antwort.

(b) Wie kann man die Beobachtung in (a) nutzen, um für gerades $n = 2m$ einen reellen Datensatz $f_k = f(x_k)$ für $k = 0, 1, \dots, n-1$ effektiver zu transformieren?

Aufgabe 8.2 (4 Punkte) Gegeben seien die Stützstellen $x_k = 2\pi k/n$ für $k = 0, 1, \dots, n-1$. Zeigen Sie: Es gelten die Relationen

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(jx_k)\cos(lx_k) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \frac{j+l}{n} \notin \mathbb{Z} \text{ und } \frac{j-l}{n} \notin \mathbb{Z} \\ \frac{n}{2} & \text{falls entweder } \frac{j+l}{n} \in \mathbb{Z} \text{ oder } \frac{j-l}{n} \in \mathbb{Z} \\ n & \text{falls } \frac{j+l}{n} \in \mathbb{Z} \text{ und } \frac{j-l}{n} \in \mathbb{Z} \end{cases},$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(jx_k)\sin(lx_k) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \frac{j+l}{n} \notin \mathbb{Z} \text{ und } \frac{j-l}{n} \notin \mathbb{Z} \\ & \text{oder } \frac{j+l}{n} \in \mathbb{Z} \text{ und } \frac{j-l}{n} \in \mathbb{Z} \\ -\frac{n}{2} & \text{falls } \frac{j+l}{n} \in \mathbb{Z} \text{ und } \frac{j-l}{n} \notin \mathbb{Z} \\ \frac{n}{2} & \text{falls } \frac{j+l}{n} \notin \mathbb{Z} \text{ und } \frac{j-l}{n} \in \mathbb{Z} \end{cases},$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(jx_k)\sin(lx_k) = 0 \quad \text{für alle } j, l \in \mathbb{Z}.$$

Hinweis: Nach Anwendung geeigneter Additionstheoreme für Sinus und Cosinus können Sie Lemma 4.10 der Vorlesung benutzen.

Aufgabe 8.3 (4 Punkte) Zu $m \in \mathbb{N}$ sei $n = 2m$ und q_m^* das trigonometrische Interpolationspolynom

$$q_m^*(x) = \frac{a_0^*}{2} + \sum_{j=1}^{m-1}(a_j^* \cos(jx) + b_j^* \sin(jx)) + \frac{a_m^*}{2}\cos(mx)$$

mit den Koeffizienten

$$a_j^* = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g_k \cos(jx_k),\ b_j^* = \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g_k \sin(jx_k),$$

zu den Stützstellen $x_k = 2\pi k/n$ und den Stützwerten g_k $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$. (Vgl. Satz 4.12 der Vorlesung).
Es sei $r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ gegeben. Zeigen Sie, dass das "Abschnittspolynom"

$$q_r^*(x) = \frac{a_0^*}{2} + \sum_{j=1}^{r} (a_j^* \cos(jx) + b_j^* \sin(jx))$$

von allen trigonometrischen Polynomen der Gestalt

$$q_r(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{r} (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx))$$

die diskrete Fehlerquadratsumme

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} (q_r(x_k) - g_k)^2$$

minimiert. *Hinweis:* Formulieren Sie ein geeignetes lineares Ausgleichsproblem und verwenden Sie zu dessen Lösung die Aufgabe 8.2.

Aufgabe 8.4 (4 Punkte) Schreiben Sie ein Programm, welches für $n = 2^p$ zu den gegebenen Daten $(f_0, f_1, \ldots, f_{n-1})^T \in \mathbb{C}^n$ eine schnelle Fourier–Transformation (FFT) durchführt. Testen Sie das Programm an den Beispielen

1. $f_k = f_1(x_k) = e^{i10x_k} = \cos(10x_k) + i\sin(10x_k)$,
2. $f_k = f_2(x_k) = \sin(3x_k)$,
3. $f_k = f_3(x_k) = x_k^2$

für $x_k = \frac{2\pi k}{n}$ mit $k = 0, 1, \ldots, n-1$ und $n = 4, 8, 16, 32$, indem Sie mit der FFT die Koeffizienten des trigonometrischen Interpolationspolynoms bestimmen und dann jeweils die Funktionen f_1, f_2 bzw. f_3 zusammen mit den zugehörigen Interpolationspolynomen auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ plotten. Stellen im Falle f_1 Real– und Imaginärteil gesondert dar.

Abgabetermin für dieses Blatt: 14. 12. 2004, 9.15 Uhr, oranger Kasten 12 im Flur D1. Bitte vergessen Sie nicht, auf dem Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikel-Nummer sowie den Termin der besuchten Übungsgruppe anzugeben.