

Numerische Mathematik I

Übungsblatt 10

Aufgabe 10.1 (4 Punkte) Der Befehl `spline` in MATLAB ermöglicht die Interpolation mit kubischen Splines. Finden Sie heraus (oder entwickeln Sie eine Vermutung), welche Randbedingungen von dieser Funktion benutzt werden. Begründen Sie ihre Antwort mit mehr als einer Übersetzung des Hilfetexts.

Hinweis: Sie können den Befehl `unmkpp` verwenden, um die von `spline` berechneten Daten zu analysieren.

Aufgabe 10.2 (4 Punkte) Gegeben sei eine reelle, symmetrische Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit positiven Diagonalelementen. Zudem sei das starke Zeilensummenkriterium erfüllt, d.h. es gelte

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| < a_{ii} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Weisen Sie nach, dass dann A positiv definit ist mit

$$\min_{i=1, \dots, n} \left(a_{ii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right) \leq \lambda \leq \max_{i=1, \dots, n} \left(a_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right)$$

für jeden Eigenwert λ von A .

Aufgabe 10.3 (4 Punkte) Gegeben sei eine Zerlegung $\Delta = \{x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n\}$ eines Intervalls mit den Maschenweiten $h_j = x_{j+1} - x_j$ (für $j = 0, \dots, n-1$). Es sei

$$\kappa = \frac{\max\{h_0, \dots, h_{n-1}\}}{\min\{h_0, \dots, h_{n-1}\}}.$$

Nach Lemma 4.25 der Vorlesung ergeben sich die Momente M_j eines Splines mit natürlichen Randbedingungen auf der Zerlegung Δ als Lösung einer Gleichung

$$Am = c$$

mit einer Dreibandmatrix A und dem Momentenvektor $m = (M_1, \dots, M_{n-1})^T$. Zeigen Sie, dass für die Konditionszahl von A die Abschätzung

$$\text{cond}_2(A) \leq 3\kappa$$

gilt.

Hinweis: Benutzen Sie dazu die für symmetrische $k \times k$ -Matrizen A gültige Beziehung

$$\text{cond}_2(A) = \frac{\max_{i=1,\dots,k} |\lambda_i|}{\min_{i=1,\dots,k} |\lambda_i|},$$

wobei die Zahlen λ_i die Eigenwerte von A sind.

Aufgabe 10.4 (5 Punkte) Schreiben Sie ein Programm, das ausgehend von einer Zerlegung Δ_n und Stützstellen f_0, \dots, f_n eine kubische Spline-Interpolation zu natürlichen Randbedingungen durchführt.

Als Test soll die Funktion

$$f(x) = \sin(e^x)$$

an den Stellen

$$x_i = 4\sqrt{\frac{i}{n}}, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

für $n = 15, 30, 50$ betrachtet werden. Werten Sie den jeweils berechneten Spline s_n an den Stellen

$$z_j = \frac{j}{50}, \quad j = 0, 1, \dots, 200$$

aus, und berechnen Sie den Fehler

$$\delta_n = \max_{1 \leq j \leq 199} |s_n(z_j) - f(z_j)|, \quad (n = 15, 30, 50).$$

Geben Sie jeweils die Koeffizienten der kubischen Polynome in den entsprechenden Teilintervallen sowie den Fehler δ_n an.

Hinweis: Gegebenenfalls können Sie einzelne Funktionen aus den Lösungen zu den Aufgaben 2.3 und 7.1 verwenden, die auf der Webseite <http://www.math.upb.de/~mirkoh/NumerikI.WS0405> bereitstehen.

Abgabetermin für dieses Blatt: 11. 1. 2005, 9.15 Uhr, oranger Kasten 12 im Flur D1. Bitte vergessen Sie nicht, auf dem Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikel-Nummer sowie den Termin der besuchten Übungsgruppe anzugeben.