Prof. Dr. Michael Dellnitz
Dipl.-Math. Mirko Hessel–von Molo

Numerische Mathematik I

Übungsblatt 11

Aufgabe 11.1 (3 Punkte) Es sei $\Delta_n = \{x_0 < \ldots < x_n\}$ eine Zerlegung eines Intervalls, und zusätzlich seien die Stützpunkte $x_{-1} < x_0$ und $x_{n+1} > x_n$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$B_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x_{i-1} \le x \le x_i \\ \frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i} & x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für } i = 0, \ldots, n$$

eine Basis von $S_1(\Delta_n)$ bilden.

Aufgabe 11.2 (5 Punkte) Es seien Stützstellen $x_{-k} < \ldots < x_0 < \ldots < x_n < x_{n+k}$ gegeben. Zeigen Sie: Die in der Vorlesung definierten Funktionen N_{ik} sind Splines $(k-1)$. Grades.

(a) Zeigen Sie zunächst: Für

$$\Delta_{i,k} = N'_{ik} - (k-1)\left(\frac{N_{i,k-1}}{x_{i+k-1}-x_i} - \frac{N_{i+1,k-1}}{x_{i+k}-x_{i+1}}\right)$$

gilt die Rekursionsgleichung

$$\Delta_{i,k}(x) = \frac{x-x_i}{x_{i+k-1}-x_i}\Delta_{i,k-1}(x) + \frac{x_{i+k}-x}{x_{i+k}-x_{i+1}}\Delta_{i+1,k-1}(x)$$

für x aus den offenen Teilintervallen (x_j, x_{j+1}) (mit $j = -k, \ldots, n+k-1$).

(b) Zeigen Sie weiter: Für $k > 1$ gilt

$$N'_{ik} = (k-1)\left(\frac{N_{i,k-1}}{x_{i+k-1}-x_i} - \frac{N_{i+1,k-1}}{x_{i+k}-x_{i+1}}\right)$$

(c) Folgern Sie aus (b), dass N_{ik} ein Spline ist.

Aufgabe 11.3 (5 Punkte) Gegeben seien Stützstellen wie in Aufgabe 11.2 und ein Spline

$$s(x) = \sum_{j=-k+1}^{n-1} \beta_j N_{jk}(x).$$

Der Algorithmus von *de Boor* zur Auswertung dieses Splines an einer Stelle $x \in [x_i, x_{i+1})$ baut auf der Beobachtung auf, dass nur die B-Splines N_{jk} mit

$i-k+2 \leq j \leq i$ zu der Summe beitragen, da die Träger der übrigen Summanden leeren Schnitt mit dem Intervall $[x_i, x_{i+1})$ haben. Ausgehend von den Werten $\beta_j^{[0]} = \beta_j$ für $j = i-k+2, \ldots, i$ werden die Werte $\beta_i^{[r]}$ für $j = i-k+r$ rekursiv durch

$$\beta_j^{[r+1]} = \frac{(x-x_j)\beta_j^{[r]} + (x_{j+k-r} - x)\beta_{j-1}^{[r]}}{x_{j+k-r} - x_j} \tag{1}$$

für $j = i-k+r, \ldots, i$ und für $r = 1, \ldots, k$ definiert. Dann gilt

$$s(x) = \beta_i^{[k]}. \tag{2}$$

(a) Leiten Sie Gleichung (1) her aus der Forderung, dass

$$\sum_{j=i-k+r+2}^{i} \beta_j^{[r]} N_{j,k-r}(x) = \sum_{j=i-k+r+3}^{i} \beta_j^{[r+1]} N_{j,k-r-1}(x) \tag{3}$$

erfüllt sein soll.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von Gleichung (3), dass Gleichung (2) korrekt ist.

Aufgabe 11.4 (4 Punkte) Es seien Bézier–Punkte $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^2$ gegeben, und es sei

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n} b_i B_i^n(t)$$

das zugehörige Bézier–Polynom, wobei die Funktionen

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

die Bernstein–Polynome sind. Weiterhin seien die *Vorwärtsdifferenzen* $\Delta^r b_i$ wie in der Vorlesung rekursiv definiert durch

$$\Delta^0 b_i = b_i \qquad \Delta^1 b_i = b_{i+1} - b_i \qquad \Delta^r b_i = \Delta^1(\Delta^{r-1} b_i).$$

Zeigen Sie: Es gilt

$$x^{(r)}(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^{n-r} \Delta^r b_i B_i^{n-r}(t).$$

Abgabetermin für dieses Blatt: 18. 1. 2005, 9.15 Uhr, oranger Kasten 12 im Flur D1. Bitte vergessen Sie nicht, auf dem Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikel-Nummer sowie den Termin der besuchten Übungsgruppe anzugeben.