Mathematik 3 für Maschinenbauer

Übungsblatt 1

Hausübungen (Abgabe: Montag, 22. 10. 2012, 12.30 Uhr)

Aufgabe 1.1 (12 Punkte)

(a) Eine Fläche sei in Polarkoordinaten gegeben durch

$$F = \{(r, \varphi) \mid \frac{1}{2} \leq r \leq 1,\ \frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{12}\}.$$

Beschreiben Sie F in kartesischen Koordinaten.

(b) Beschreiben Sie die in kartesischen Koordinaten durch

$$F = [0,1]^2 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$$

gegebene Fläche in Polarkoordinaten.

(c) Ein Körper ist in kartesischen Koordinaten gegeben als

$$O = \{(x, y, z) \mid y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 16 - z^4\}.$$

Beschreiben Sie O in Zylinderkoordinaten.

(d) Eine Kugelkalotte ist in kartesischen Koordinaten gegeben durch

$$K = \{(x, y, z) \mid z \geq \frac{1}{2}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Beschreiben Sie K sowohl in Zylinder- wie auch in Kugelkoordinaten.

Lösungsbeispiel:

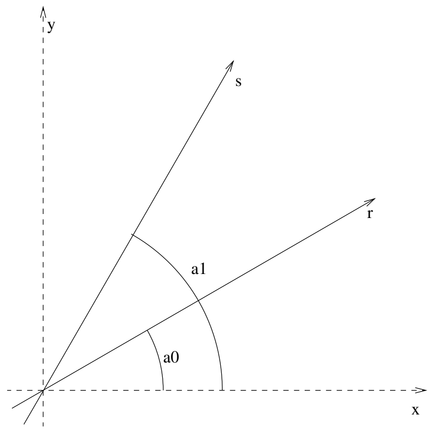
Die Darstellung in Zylinderkoordinaten ergibt sich schnell: Aus $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ folgt $|z| \leq 1$, also insgesamt $\frac{1}{2} \leq z \leq 1$. Ebenso gilt $0 \leq r^2 = x^2 + y^2 \leq 1 - z^2$. Für φ ergibt sich keine Beschränkung. Damit gilt

$$\Phi_{\text{kart,Zyl}}(K) = \{(r, \varphi, z) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{1 - z^2},\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ \frac{1}{2} \leq z \leq 1\}.$$

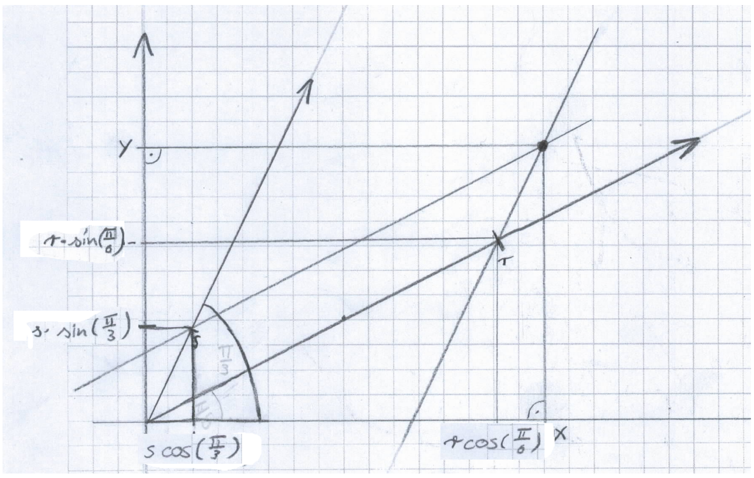
Die Darstellung in Kugelkoordinaten hingegen wird komplizierter. Zunächst folgt aus $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ sofort $\varrho \leq 1$. Aus $z \geq \frac{1}{2}$ folgt $\varrho \sin(\vartheta) \geq \frac{1}{2}$, also $\varrho \geq \frac{1}{2\sin(\vartheta)}$. Aus $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ folgt aber auch $x^2 + y^2 = \varrho^2 \cos^2(\vartheta) \leq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, also $\varrho \cos(\vartheta) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Beide Ungleichungen können kombiniert werden zu $\frac{2}{\sqrt{3}} \cos(\vartheta) \leq \frac{1}{\varrho} \leq 2\sin(\vartheta)$, aus der wiederum $\tan(\vartheta) \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ folgt, also $\vartheta \geq \arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$. Für φ ergibt sich wieder keine Beschränkung. Insgesamt erhält man also

$$\Phi_{\text{kart, Kug}}(K) = \{(\varrho, \varphi, \vartheta) \mid \frac{\pi}{6} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi,\ \frac{1}{2\sin(\vartheta)} \leq \varrho \leq 1\}.$$

Aufgabe 1.2 (6 Punkte)
Neben dem kartesischen Koordinatensystem für die Ebene wird ein zweites Koordinatensystem K' wie folgt konstruiert: Gegeben sind zwei Achsen, die sich im kartesischen Koordinatenursprung schneiden. Eine dieser Achsen (die "r-Achse") bilde mit der kartesischen x-Achse den Winkel $\alpha_0 = \frac{\pi}{6} = 30°$, die andere ("$s$-Achse") bilde mit der x-Achse den Winkel $\alpha_1 = \frac{\pi}{3} = 60°$. (Siehe Skizze.) Der Längenmaßstab für die r- und die s-Achse sei derselbe wie für die x- und die y-Achse. Ein Punkt der Ebene wird wie im kartesischen System beschrieben als Schnittpunkt von Parallelen zur r- und zur s-Achse.
Bestimmen Sie die beiden Koordinatentransformationen, die kartesische Koordinaten in Koordinaten bzgl. K' und umgekehrt übersetzen.



Lösungsbeispiel:



Aus der geometrischen Situation (s. Zeichnung) ergeben sich die Beziehungen

$$x = r \cdot \cos(\frac{\pi}{6}) + s \cdot \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}r + \frac{1}{2}s, \quad \text{und} \quad y = r \cdot \sin(\frac{\pi}{6}) + s \cdot \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}r + \frac{\sqrt{3}}{2}s$$

also

$$\Phi_{K',K}(r,s) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}}_{=:T} \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}.$$

Umgekehrt gilt entsprechend

$$\Phi_{K,K'}(x,y) = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Bemerkungen: Bitte geben Sie Lösungen zu diesen Aufgaben getackert und mit Deckblatt ab. Eine Korrektur Ihrer Lösung ist erst sinnvoll möglich, wenn alle Lösungswege ausreichend erläutert sind.
Die Abgabekästen für die Übungsblätter befinden sich im ersten Stock des D-Gebäudes (Kasten 115 (grün)) . Die Rückgabe erfolgt in den Übungsgruppen.
Webseite zur Vorlesung: http://tinyurl.com/8lsrxp8

Gruppenübungen

Aufgabe 1.3 Die folgenden Teilmengen der Ebene sind in Polarkoordinaten angegeben. Beschreiben Sie diese Mengen in kartesischen Koordinaten.

(a) $M_1 = \{(r, \varphi) \mid r = \frac{1}{2},\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$

(b) $M_2 = \{(r, \varphi) \mid r = \frac{1}{2},\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\}$

(c) $M_3 = \{(r, \varphi) \mid 0 \leq r,\ \varphi = \frac{\pi}{2}\}$

(d) $M_4 = \{(r, \varphi) \mid 0 \leq r,\ \varphi = \frac{\pi}{4}\}$

(e) $M_5 = \{(r, \varphi) \mid 0 \leq r,\ \varphi = \frac{\pi}{3}\}$

(f) $M_6 = \{(r, \varphi) \mid 0 \leq r \leq 1,\ \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}\}$

Aufgabe 1.4

Neben dem kartesischen Koordinatensystem für die Ebene wird ein zweites Koordinatensystem K' wie folgt konstruiert: Vom kartesischen Koordinatensystem wird die x-Achse für das neue System übernommen. Als zweite Achse wird eine "r-Achse" eingeführt, die mit der x-Achse einen Winkel von $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$ bildet. (Siehe Skizze). Der Längenmaßstab für die r- sei derselbe wie für die x- und die y-Achse. Ein Punkt der Ebene wird wie im kartesischen System beschrieben als Schnittpunkt von Parallelen zur r- und zur x-Achse.

Bestimmen Sie die beiden Koordinatentransformationen, die kartesische Koordinaten in Koordinaten bzgl. K' und umgekehrt übersetzen.