Mathematik 3 für Maschinenbauer

Übungsblatt 4

Hausübungen (Abgabe: Montag, 12. 11. 2012, 12.30 Uhr)

Aufgabe 4.1 (12 Punkte) Durch

$$T = \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + 2y + 3z \leq 1\}$$

wird ein (unregelmäßiges) Tetraeder beschrieben. Skizzieren Sie T. Stellen Sie T als projizierbaren Körper dar und bestimmen Sie dann die Integrale

$$V = \int_T 1 \, d(x, y, z), \quad S_x = \int_T x \, d(x, y, z), \quad S_y = \int_T y \, d(x, y, z) \quad \text{und} \quad S_z = \int_T z \, d(x, y, z)$$

mit Hilfe der iterierten Integration.

Bemerkung: Der Punkt $\frac{1}{V}\begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix}$ ist (unter der Annahme einer konstanten Dichte) der *Schwerpunkt* von T.

Aufgabe 4.2 (6 Punkte) In der Mechanik ist das *Trägheitsmoment* eines starren Körpers mit Dichtefunktion $\rho(x, y, z)$ bzgl. einer vorgegebenen Rotationsachse durch ein Integral der Form

$$J = \int_B \rho(x, y, z) \cdot (r(x, y, z))^2 \, d(x, y, z)$$

gegeben, wobei $r(x, y, z)$ den Abstand des Punktes (x, y, z) von der Rotationsachse angibt. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment des stangenförmigen Körpers

$$K = \{(x, y, z) \mid -10 \leq x \leq 10, y^2 + z^2 \leq 1\}$$

mit konstanter Dichte ρ bezüglich Rotationen um die x-Achse. Wie ändert sich das Trägheitsmoment, wenn die Stange an Stelle des kreisförmigen Profils ein quadratisches Profil mit gleicher Querschnittsfläche hat?

Bemerkungen: Bitte geben Sie Lösungen zu diesen Aufgaben getackert und mit Deckblatt ab. Eine Korrektur Ihrer Lösung ist erst sinnvoll möglich, wenn alle Lösungswege ausreichend erläutert sind.
Die Abgabekästen für die Übungsblätter befinden sich im ersten Stock des D-Gebäudes (Kasten 115 (grün)) . Die Rückgabe erfolgt in den Übungsgruppen.
Webseite zur Vorlesung: http://tinyurl.com/8lsrxp8

Gruppenübungen

Aufgabe 4.3 Bestimmen Sie das Volumen des Körpers

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 1\}.$$

durch iterierte Integration.

(a) Zeigen Sie dazu, dass E entlang der z-Achse auf einen Normalbereich in der $x - y$-Ebene projizierbar ist.

(b) Berechnen Sie dann das Volumen, indem Sie die Formeln für die iterierte Integration anwenden.

Aufgabe 4.4 Eine Kreisscheibe mit Radius 1 wird entlang einer Geraden zerschnitten, die den Mittelpunkt der Scheibe im Abstand d passiert (siehe Abbildung). Bestimmen Sie den jeweiligen Flächeninhalt der beiden entstehenden Stücke in Abhängigkeit von d. (Der Einfachheit halber gebe es keinen Sägeverlust o. ä.)

(a) Finden Sie dazu zunächst eine geeignete Darstellung der Einzelstücke als Normalbereiche.

(b) Verwenden Sie dann die Formel für die iterierte Integration, um die Flächeninhalte zu bestimmen.