Mathematik 3 für Maschinenbauer

Übungsblatt 7

Hausübungen (Abgabe: Montag, 3. 12. 2012, 12.30 Uhr)
Hinweis: Sie können für die Bearbeitung aller Aufgaben auf diesem Blatt Stammfunktionen aus Formelsammlungen o. ä. verwenden.

Aufgabe 7.1 (15 Punkte) Welche der folgenden Wege parametrisieren dieselben Kurven? Geben Sie die Tangentenvektoren an und bestimmen Sie die Längen der Wege.

(a) $\underline{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \underline{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) $\underline{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \underline{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(4\pi t) \end{pmatrix}$

(c) $\underline{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \underline{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$

(d) $\underline{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \underline{\gamma}(t) = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

(e) $\underline{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \underline{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{t} \\ t \end{pmatrix}$

(f) $\underline{\gamma} : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \underline{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 2 + \cos(t) \\ 2\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(t) \end{pmatrix}$

(g) $\underline{\gamma} : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \underline{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \\ \sqrt{3} \cdot t \end{pmatrix}$

Aufgabe 7.2 (6 Punkte) Eine Kurve in $\mathbb{R}^2$ sei in Polarkoordinaten $r(t), \varphi(t)$ für $t \in [a,b]$ gegeben.

(a) Geben Sie eine Formel für die Länge des Weges (in der $x-y-$Ebene!) bzgl. der Funktionen $r(t)$ und $\varphi(t)$ an.

(b) Die *logarithmische Spirale* ist durch den Zusammenhang $r = ae^{b\varphi}$ (in Polarkoordinaten) mit festen Werten $a, b > 0$ beschrieben. Bestimmen Sie mit Hilfe der obigen Formel die Länge des Abschnitts der Spirale, für die $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ gilt.

Bemerkungen: Bitte geben Sie Lösungen zu diesen Aufgaben getackert und mit Deckblatt ab. Eine Korrektur Ihrer Lösung ist erst sinnvoll möglich, wenn alle Lösungswege ausreichend erläutert sind.
Die Abgabekästen für die Übungsblätter befinden sich im ersten Stock des D-Gebäudes (Kasten 115 (grün)) . Die Rückgabe erfolgt in den Übungsgruppen.
Webseite zur Vorlesung: http://tinyurl.com/8lsrxp8

Gruppenübungen

Aufgabe 7.3 Ordnen Sie die in den Grafiken auf der nächsten Seite dargestellten Kurven den folgenden Wegen zu:

$$\underline{\gamma}_1(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ 2t^6 - 1 \end{pmatrix} \text{ für } t \in [-1, 1], \qquad \underline{\gamma}_2(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ 2t^2 - 1 \end{pmatrix} \text{ für } t \in [-1, 1],$$

$$\underline{\gamma}_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ \cos(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix} \text{ für } t \in [-1, 1], \qquad \underline{\gamma}_4(t) = \sin(4t) \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \text{ für } t \in [0, 2\pi],$$

$$\underline{\gamma}_5(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \text{ für } t \in [0, 2\pi], \qquad \underline{\gamma}_6(t) = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \text{ für } t \in [-2\pi, 2\pi],$$

$$\underline{\gamma}_7(t) = \cos^2(t) \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \text{ für } t \in [0, 2\pi], \qquad \underline{\gamma}_8(t) = \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(4t) \end{pmatrix} \text{ für } t \in [0, 2\pi].$$

Aufgabe 7.4 Bestimmen Sie die Länge der *Archimedischen Spirale*

$$\underline{\gamma} : [0, 10\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \underline{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t\cos(t) \\ t\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Geben Sie dazu die Tangentenvektoren $\dot{\underline{\gamma}}(t)$ explizit an. Hinweis: Benutzen Sie die Stammfunktion $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$.

Aufgabe 7.5 Parametrisieren Sie die Kurve, die ein an einer Speiche eines Fahrrad-Vorderrades angebrachter Reflektor durchläuft, wenn das Rad zwei Umdrehungen macht.

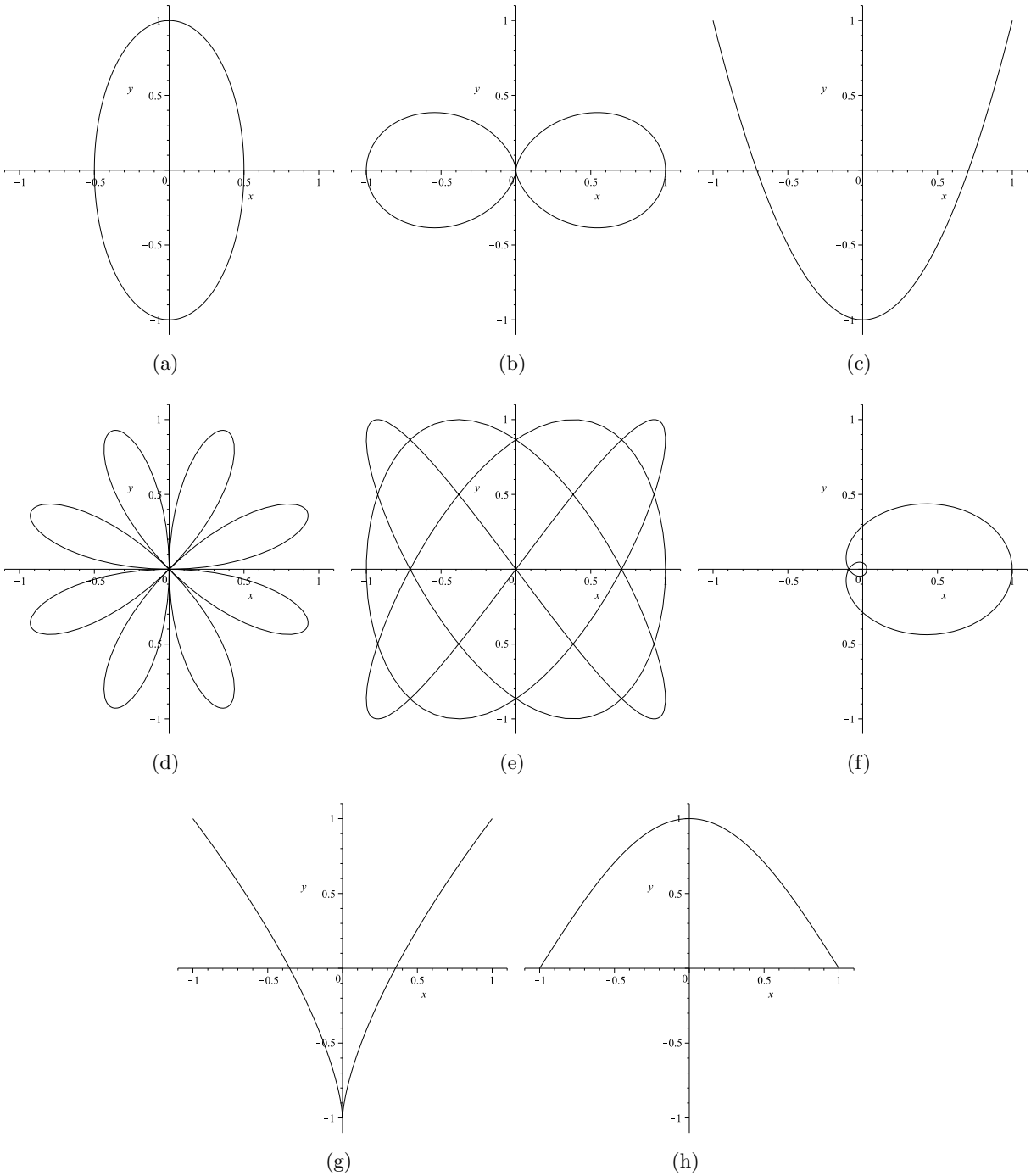

Abbildung 1: Grafiken zu Aufgabe 7.3.