Mathematik 3 für Maschinenbauer

Übungsblatt 11

Hausübungen (Abgabe: Montag, 14. 1. 2013, 12.30 Uhr)
Hinweis: Sie können für die Bearbeitung aller Aufgaben auf diesem Blatt Stammfunktionen aus Formelsammlungen o. ä. verwenden.

Aufgabe 11.1 (6 Punkte) Beschreiben Sie die Oberfläche ∂T des Tetraeders

$$T = \{(x, y, z) \mid x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 1\},$$

indem Sie sie geeignet aus vier Flächen zusammensetzen. Dabei soll das Normalenvektorfeld jeweils nach außen zeigen.

Aufgabe 11.2 (10 Punkte) Es sei $K = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ und } z \geq 0\}$ die "halbe" Einheitskugel, ∂K ihre Oberfläche.

(a) Zerlegen Sie ∂K in mehrere Teile und geben Sie jeweils eine Parametrisierung für die Teile an, so dass das Normalenvektorfeld nach außen zeigt.

(b) Bestimmen Sie $\int \underline{F} \cdot d\underline{S}$ für folgende Vektorfelder einmal direkt und einmal mit dem Gauß'schen Divergenzsatz.

$$\text{a) } \underline{F}(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \text{b) } \underline{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -y \\ x - z \\ y \end{pmatrix}$$

Aufgabe 11.3 (Für Interessierte zum Knobeln) Um die Divergenz eines Vektorfelds als Maß seiner "Quellstärke" zu verstehen, kann man das Flächenintegral zweiter Art des Vektorfelds über die Außenfläche eines kleinen Würfels bestimmen. Dabei soll der Würfel so klein sein, dass die Taylor-Näherung 1. Ordnung "gut" ist.
Gegeben seien dazu ein (allgemeines oder selbstgewählt spezielles) Vektorfeld $\underline{F}$ auf $\mathbb{R}^3$ sowie ein Punkt $(x_0, y_0, z_0)^T \in \mathbb{R}^3$.

(a) Finden Sie einfache Parametrisierungen der sechs Außenflächen des Würfels

$$W_h = [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - h, y_0 + h] \times [z_0 - h, z_0 + h]$$

so, dass das Normalenvektorfeld auf jeder Fläche nach außen zeigt.

(b) Integrieren Sie die erste Taylor-Näherung

$$\begin{aligned} \underline{F}(x, y, z) \approx & \underline{F}(x_0, y_0, z_0) + \partial_x \underline{F}(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) \\ & + \partial_y \underline{F}(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + \partial_z \underline{F}(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) \end{aligned}$$

über die in sechs Teilflächen zerlegte Fläche ∂W_h. (*Hinweis:* Betrachten Sie dabei gegenüberliegende Flächen gemeinsam.)

(c) Zeigen Sie damit, dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\mathrm{vol}(W_h)} \int_{\partial W_h} \underline{F} \cdot d\underline{S} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{8h^3} \int_{\partial W_h} \underline{F} \cdot d\underline{S} = \operatorname{div} \underline{F}(x_0, y_0, z_0)$$

ist. (**Hinweis:** In der entsprechenden Formel der Vorlesung wurde hier leider ein falscher Faktor vor dem Integral angegeben!)

Gruppenübungen

Aufgabe 11.4 (a) Bestimmen Sie die Divergenzen dieser Vektorfelder.

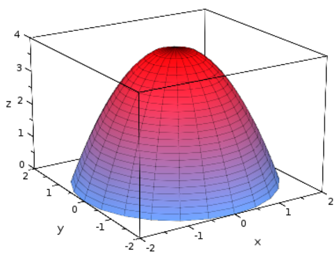
a) $\underline{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

b) $\underline{F}(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

c) $\underline{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) Finden Sie ein Vektorfeld $\underline{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, für das $\operatorname{div} \underline{F}(x,y,z) = \sin(x) + \cos(y) + z^2$ gilt.

Aufgabe 11.5



Gegeben seien der “stumpfe Kegel”

$$K = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \leq 4-z \text{ und } 0 \leq z \leq 4\} \subset \mathbb{R}^3$$

und das Vektorfeld $\underline{F}(x,y,z) = (2x,y,z)^T$.

(a) Beschreiben Sie die Oberfläche ∂K, indem Sie Parametrisierungen geeigneter Teilflächen angeben. (Lassen sich evtl. “gleich gute” alternative Lösungen finden?) Dabei soll das Normalenvektorfeld in jedem Punkt *in den Kegel hinein* zeigen.

(b) Berechnen Sie das Integral $\int_{\partial K} \underline{F} \cdot d\underline{S}$.

Aufgabe 11.6 Wie können Sie unter Verwendung des Integrals in Aufgabe 11.5 das Volumen des Körpers K bestimmen?