Mathematik 3 für Maschinenbauer

Übungsblatt 13

Hausübungen (Abgabe: Montag, 28. 1. 2013, 12.30 Uhr)
Hinweis: Sie können für die Bearbeitung aller Aufgaben auf diesem Blatt Stammfunktionen aus Formelsammlungen o. ä. verwenden.

Aufgabe 13.1 Um ein aus dem Stand gegen den Luftwiderstand beschleunigendes Auto zu beschreiben, werden die (leicht unrealistischen) Annahmen getroffen, dass das vom Motor erbrachte Drehmoment zeitlich konstant, und der Luftwiderstand proportional zu $v(t)^2$ ist. Man gelangt dann zu dem (nur für $v > 0$ geltenden) Anfangswertproblem $\dot{v}(t) = \frac{1}{m} \cdot (K - r \cdot v(t)^2)$ mit $v(0) = 0$, wobei $m > 0$ die Masse des Autos, $K > 0$ die über die Reifen erzeugte Kraft in Bewegungsrichtung und $r > 0$ ein Luftwiderstandskoeffizient ist.

(a) Können Sie ohne Berechnung der Lösung des Anfangswertproblems etwas über die Entwicklung der Geschwindigkeit für $t \to \infty$ sagen? *Hinweis:* Wie entwickelt sich die Beschleuningung, wenn die Geschwindigkeit wächst? (Moral von der Geschicht: Verdopplung des Drehmoments bewirkt ____________ der Grenzgeschwindigkeit. Wie mögen Kraftstoffverbrauch und Drehmoment zusammenhängen?)

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem. Verwenden Sie dazu die Stammfunktion

$$\int \frac{1}{1 - cv^2}\, dv = \frac{1}{2\sqrt{c}} \cdot \ln\left(\frac{1 + \sqrt{c}v}{1 - \sqrt{c}v}\right) \quad \text{für } v \in (-c^{-\frac{1}{2}},\ c^{-\frac{1}{2}}).$$

Aufgabe 13.2 In Abbildung 1 sind die Lösungskurven verschiedener Differentialgleichungen der Form $\underline{\dot{x}}(t) = A\underline{x}(t)$ dargestellt. Die blauen Punkte geben nacheinander die Position der Lösung zu den Zeiten $t = 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$ an. Ordnen Sie die Kurven den folgenden Matrizen A zu:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 2. $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ 3. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 4. $A = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{7}{4} & 2 \\ -5 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

Aufgabe 13.3 (6 Punkte) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\underline{\dot{x}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \underline{x}(t), \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Versuchen Sie, sich die Lösungskurve im $\mathbb{R}^3$ vorzustellen und zu skizzieren, oder wenigstens in Worten zu beschreiben.

Bemerkungen: Bitte geben Sie Lösungen zu diesen Aufgaben getackert und mit Deckblatt ab. Eine Korrektur Ihrer Lösung ist erst sinnvoll möglich, wenn alle Lösungswege ausreichend erläutert sind.
Die Abgabekästen für die Übungsblätter befinden sich im ersten Stock des D-Gebäudes (Kasten 115 (grün)) . Die Rückgabe erfolgt in den Übungsgruppen.
Webseite zur Vorlesung: http://tinyurl.com/8lsrxp8

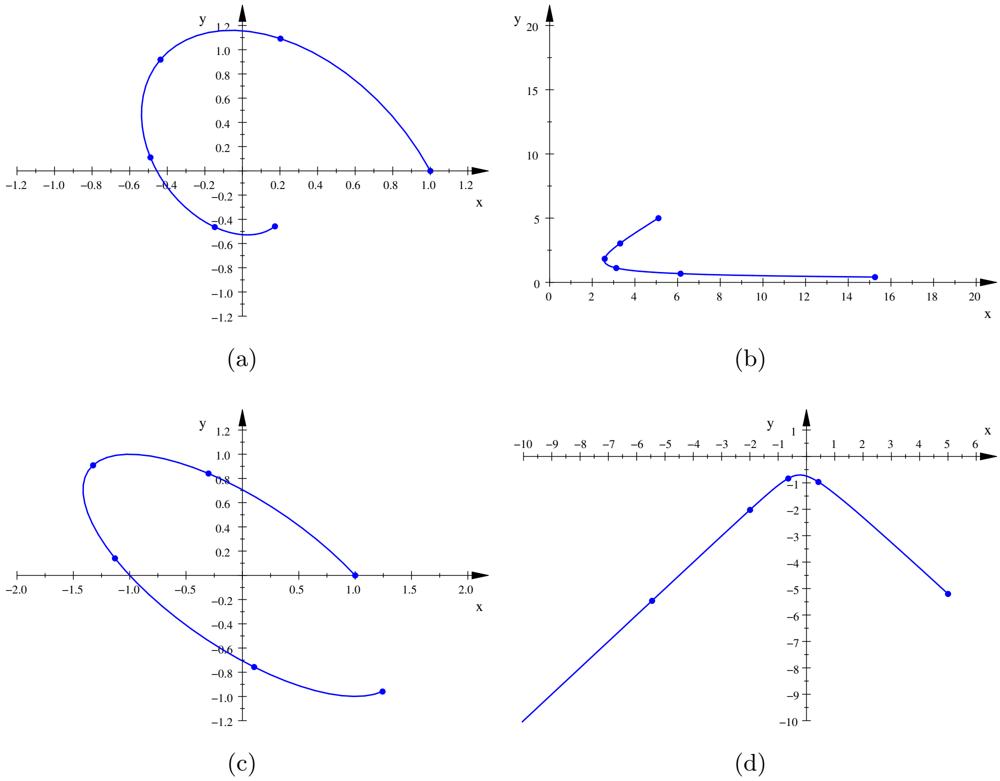

Abbildung 1: Grafiken zu Aufgabe 13.2

Gruppenübungen

Aufgabe 13.4 Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = c \cdot x(t)^k, \qquad x(0) = x_0$$

mit $c > 0, x_0 > 0,\ k > 1$. Auf welchem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ kann die Lösung für diesen Anfangswert maximal definiert werden?

Aufgabe 13.5 Rechnen Sie nach, dass die Matrix $X(t) = (\underline{x}_1(t) \mid \underline{x}_2(t))$ mit

$$x_1(t) = e^{-1/2t} \cdot \left(\cos(\sqrt{3}/2 \cdot t) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} - \sin(\sqrt{3}/2 \cdot t) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$x_2(t) = e^{-1/2t} \cdot \left(\cos(\sqrt{3}/2 \cdot t) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \sin(\sqrt{3}/2 \cdot t) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

ein Fundamentalsystem für das Differentialgleichungssystem $\underline{\dot{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \underline{x}(t)$ ist.

Aufgabe 13.6 Formulieren Sie die Differentialgleichung

$$\dddot{x}(t) - 2\ddot{x}(t) - 1\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$$

in ein äquivalentes Differentialgleichungssystem $\underline{\dot{y}}(t) = f(\underline{y}(t))$ erster Ordnung um, und bestimmen Sie ein Fundamentalsystem.