Mathematatik 3 für Maschinenbauer

Probeklausur

Die folgenden Aufgaben behandeln einen Querschnitt der bisherigen Inhalte der Vorlesung und könnten in ähnlicher Form auch in einer Prüfungsklausur vorkommen. Anhand der Auswahl der Aufgaben können Sie relevante Stoffgebiete erkennen, an den einzelnen Aufgaben können sie für eine Klausur wichtige Rechenverfahren üben. *Nicht* mit der Klausursituation vergleichbar ist die Anzahl der Aufgaben. Die Auswahl ist vielmehr darauf ausgelegt, das gesamte Spektrum möglicher Aufgabentypen abzudecken und deshalb *deutlich* umfangreicher als eine auf 120 Minuten Bearbeitungszeit angelegte Klausur. Eine Auswahl von 4 – 5 der hier angegebenen Aufgaben dürfte aber etwa dem Umfang einer Prüfungsklausur entsprechen.

Als *Hilfsmittel* können Sie für die häusliche Bearbeitung der Aufgaben eine gewöhnliche Liste von Stammfunktionen heranziehen. Der Prüfungsklausur wird eine solche Liste beiliegen. Die angefügten *Lösungen* sind zur Selbstkontrolle gedacht. Die Rechnungen sind hier meist in viel größeren Schritten skizziert, als es für die Klausur nötig sein wird.

Aufgabe 1

Gegeben sei die Menge

$$K = \{(x, y, z) \mid (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4\} \cup \{(x, y, z) \mid (x+1)^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

(a) Stellen Sie K als eine auf einen Normalbereich projizierbare Menge dar.

Lösung: Das intuitive Bild: K ist die Vereinigung einer Kugel mit Radius 2 um den Punkt (1, 0, 0) und einer Kugel mit Radius 1 um den Punkt (-1, 0, 0). Da die größere Kugel bis an den Mittelpunkt der kleineren reicht, überlappen sie sich. Es liegt nahe, die Menge auf die xy-Ebene zu projizieren. Gerechnet: Es gilt

$$\begin{aligned} K =& \{(x, y, z) \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 4, |z| \leq \sqrt{4-(x-1)^2-y^2}\} \cup \\ & \{(x, y, z) \mid (x+1)^2 + y^2 \leq 1, |z| \leq \sqrt{1-(x+1)^2-y^2}\}. \end{aligned}$$

Da $\sqrt{4-(x-1)^2-y^2} = \sqrt{1-(x+1)^2-y^2}$ ist genau dann, wenn $x = -\frac{3}{4}$ ist, liegt die „Schnittebene" der Kugeln bei diesem x-Wert, und es gilt

$$K = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \bar{K}, -v(x, y) \leq z \leq v(x, y)\}$$

mit $\bar{K} = \{(x, y) \mid (x+1)^2 + y^2 \leq 4\} \cup \{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 1\}$ und

$$v(x, y) = \begin{cases} \sqrt{4-(x-1)^2-y^2} & \text{falls } x \geq -\frac{3}{4} \\ \sqrt{1-(x+1)^2-y^2} & \text{falls } x \leq -\frac{3}{4} \end{cases}.$$

Die Menge K ist also auf die Menge $\bar{K}$ projizierbar. Es bleibt, $\bar{K}$ als Normalbereich zu schreiben. Mit einer analogen Argumentation wie oben gilt aber

$$\bar{K} = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 3, -g(x) \leq y \leq g(x)\}$$

mit

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{4-(x-1)^2} & \text{falls } x \geq -\frac{3}{4} \\ \sqrt{1-(x+1)^2} & \text{falls } x \leq -\frac{3}{4} \end{cases}.$$

(b) Bestimmen Sie die x-Koordinate des Schwerpunkts von K unter homogener Masserverteilung.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{vol}(K) = \int_K 1 \, d(x,y,z) &= \int_{-2}^{3} \int_{-g(x)}^{g(x)} \int_{-v(x,y)}^{v(x,y)} 1 \, dz \, dy \, dx \\
&= \pi \left(\int_{-2}^{-\frac{3}{4}} 1 - (x+1)^2 \, dx + \int_{-\frac{3}{4}}^{3} 4 - (x-1)^2 \, dx \right) \\
&= \frac{175\pi}{192} + \frac{675\pi}{64} = \frac{275\pi}{24}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\int_K x \, d(x,y,z) &= \int_{-2}^{3} \int_{-g(x)}^{g(x)} \int_{-v(x,y)}^{v(x,y)} x \, dz \, dy \, dx \\
&= \pi \left(\int_{-2}^{-\frac{3}{4}} x \cdot (1 - (x+1)^2) \, dx + \int_{-\frac{3}{4}}^{3} x \cdot (4 - (x-1)^2) \, dx \right) \\
&= \pi \left(\frac{-3475}{3072} + \frac{11025}{1024} \right) = \frac{925\pi}{96}
\end{aligned}$$

und damit

$$x_S = \frac{1}{\operatorname{vol}(K)} \int_K x \, d(x,y,z) = \frac{37}{44}.$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie das Volumen des Körpers

$$E = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 16\} \subset \mathbb{R}^3$$

durch Integration.

Lösung: Für $(x,y,z) \in E$ gilt

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 16 \iff |z| \leq \frac{1}{3}\sqrt{16 - x^2 - 4y^2}$$

und

$$4y^2 \leq 16 - x^2 \iff |y| \leq \frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2}$$

und

$$|x| \leq 4.$$

Setzt man $g(x) = \frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2}$ und $h(x,y) = \frac{1}{3}\sqrt{16 - x^2 - 4y^2} = \frac{1}{3}\sqrt{4g(x)^2 - 4y^2} = \frac{2}{3}\sqrt{g(x)^2 - y^2}$, gilt also

$$E = \{(x,y,z) \mid |x| \leq 4, |y| \leq g(x), |z| \leq h(x,y)\}$$

und damit

$$
\begin{aligned}
\operatorname{vol}(E) &= \int_E 1 \; d(x,y,z) \\
&= \int_{-4}^{4} \int_{-g(x)}^{g(x)} \int_{-h(x,y)}^{h(x,y)} 1 \; dz \; dy \; dx \\
&= \int_{-4}^{4} \int_{-g(x)}^{g(x)} 2h(x,y) dy \; dx \\
&= \frac{4}{3} \int_{-4}^{4} \int_{-g(x)}^{g(x)} \sqrt{g(x)^2 - y^2} dy \; dx \\
&= \frac{4}{3} \int_{-4}^{4} \frac{\pi}{2} g(x)^2 \; dx = \frac{4\pi}{3 \cdot 2} \int_{-4}^{4} \frac{1}{4}(16 + x^2) \; dx \\
&= \frac{4\pi}{4 \cdot 3 \cdot 2} \cdot [16x - \frac{1}{3}x^3]_{-4}^{4} = \frac{128}{9}\pi
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3

Es seien ein Weg $\underline{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, eine dadurch definierte Kurve C und ein Vektorfeld $\underline{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$
\underline{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{t^2+1} \\ \frac{\pi}{2} t^2 \\ \sqrt{t} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \\ -\sin(z) \end{pmatrix}
$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie $\int_C \underline{F} \; d\underline{\gamma}$.

Lösung: Es gilt $\dot{\underline{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \\ \pi \cdot t \\ \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{pmatrix}$ und damit

$$
\begin{aligned}
\int_C \underline{F} \cdot d\underline{\gamma} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 2\sqrt{t^2+1} \cdot \frac{\pi}{2} t^2 \\ t^2 + 1 \\ -\sin(\sqrt{t}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \\ \pi \cdot t \\ \frac{1}{2\sqrt{t}} \end{pmatrix} \; dt \\
&= \int_0^1 \pi t^3 + \pi t(t^2+1) - \frac{\sin(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} \; dt \\
&= \int_0^1 2\pi t^3 + \pi t - \frac{\sin(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} \; dt = 2\pi \cdot \frac{1}{4} + \pi \cdot \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{\sin(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} \; dt \\
&\underbrace{=}_{\text{Subst.} u = \sqrt{t}} \pi - \int_0^1 \sin(u) \; du = \pi + \cos(1) - 1.
\end{aligned}
$$

Alternativ lässt sich einfach das Potential aus dem zweiten Aufgabenteil auswerten:

$$
\int_C \underline{F} \cdot d\underline{\gamma} = \Phi(\gamma(1)) - \Phi(\gamma(0)) = \Phi(\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}, 1) - \Phi(1,0,0) = \pi + \cos(1) - 1 - 0
$$

(b) Zeigen Sie, dass $\underline{F}$ ein Potentialfeld ist, und bestimmen Sie ein Potential.

Lösung: $\mathbb{R}^3$ ist einfach zusammenhängend, daher genügt es, zu zeigen, dass $\operatorname{rot} \underline{F} = 0$ ist:

$$\operatorname{rot} \underline{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \\ -\sin(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 2x-2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ein Potential erhält man nach der Formel

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,z) &= \int_0^x F_1(t,0,0)\, dt + \int_0^y F_2(x,t,0)\, dt + \int_0^z F_3(x,y,t)\, dt \\ &= \int_0^x 0\, dt + \int_0^y x^2\, dt + \int_0^z -\sin(t)\, dt \\ &= x^2 y + \cos(z) - 1.\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Gegeben seien der Weg

$$\underline{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \underline{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix},$$

das Vektorfeld

$$\underline{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ x-y+z \end{pmatrix}$$

sowie die Kurve $C = \underline{\gamma}([0,1])$. Bestimmen Sie

(a) die Länge von $\underline{\gamma}$ und

Lösung: Es gilt

$$L(\underline{\gamma}) = \int_0^1 |\dot{\underline{\gamma}}(t)|\, dt = \int_0^1 \sqrt{4t^2 + 4\pi^2}\, dt = \pi^2 \cdot \operatorname{arcsinh}(\frac{1}{\pi}) + \sqrt{1+\pi^2} \approx 6.39.$$

(b) das Kurvenintegral $\int_C \underline{F}\, d\underline{\gamma}$.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}\int_C \underline{F}\, d\underline{\gamma} &= \int_0^1 \underline{F}(\underline{\gamma}(t)) \cdot \dot{\underline{\gamma}}(t)\, dt \\ &= \int_0^1 4t + 2\pi \cdot (t^2 \cos(2\pi t) - 3\sin(2\pi t) - \cos^2(2\pi t) + \cos(2\pi t)\sin(2\pi t))\, dt \\ &= 2 - \pi + \frac{1}{\pi}\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Die Fläche $A \subset \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$A = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4\}.$$

Ein Vektorfeld $\underline{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$\underline{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie einen Normalenvektor an A im Punkt $(1, 0, 1)^T$.

Lösung: Aus $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$ folgt $x^2 + 2y^2 \leq 4$ und

$$\begin{aligned} 3z^2 &= 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}y^2 \\ \iff \quad z &= \sqrt{\frac{1}{3}(4 - x^2 - 2y^2)} \text{ oder} \\ z &= -\sqrt{\frac{1}{3}(4 - x^2 - 2y^2)} \end{aligned}$$

Definiert man also $D = \{(x, y) \mid x^2 + 2y^2 \leq 4\}$, $f : D \to \mathbb{R}, f(x, y) = \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$, und $A_1 \subset \mathbb{R}^3$ als den Graphen von f, A_2 als den Graphen von $-f$, so erhält man $A = A_1 \cup A_2$. Es gilt also $(1, 0, 1)^\top = S_f(1, 0)$, mit $S_f : D \to \mathbb{R}^3$ wie in Bsp. 59 der Vorlesung. Es ergibt sich das Normalenvektorfeld

$$N_f(x, y) = \begin{pmatrix} -\partial_x f(x, y) \\ -\partial_y f(x, y) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-x}{\sqrt{\frac{1}{3}(4-x^2-2y^2)}} \\ \frac{-2y}{\sqrt{\frac{1}{3}(4-x^2-2y^2)}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{f(x,y)} \\ \frac{2y}{f(x,y)} \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit der Normalenvektor im Punkt $(1, 0, 1)^\top$ als $\underline{n}_f(1, 0) = (\frac{1}{3}, 0, 1)^\top$.

(b) Bestimmen Sie das Flächenintegral 2. Art $\int_A \underline{F} \cdot d\underline{S}$.

Lösung: Da $A = A_1 \cup A_2$ gilt (und $A_1 \cap A_2$ nur der „Rand“ beider Mengen ist), liegt es nahe, das Integral als Summe über die Flächenintegrale beider Teilflächen zu berechnen. Drückt man diese als Graphen der Funktion $f(x, y)$ bzw. $-f(x, y)$ aus, so ist die z-Komponente der Normalenvektorfelder beider Teilflächen gleich 1. Es zeigt also auf A_1 nach „außen“, auf A_2 nach „innen“. Daher sind die NVF nicht konsistent. Das Flächenintegral über A ist daher die Differenz der beiden Integrale über A_1 und A_2. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \int_A \underline{F} \cdot d\underline{S} &= \int_{A_1} \underline{F} \cdot d\underline{S} - \int_{A_2} \underline{F} \cdot d\underline{S} \\ &= \int_D \underline{F}(x, y, f(x, y)) \cdot \underline{n}_f(x, y)\, d(x, y) - \int_D \underline{F}(x, y, -f(x, y)) \cdot \underline{n}_{-f}(x, y)\, d(x, y) \\ &\overset{(1)}{=} \int_D \underline{F}(x, y, f(x, y)) \cdot (\underline{n}_f(x, y) - \underline{n}_{-f}(x, y))\, d(x, y) \\ &= \int_D \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 + f(x, y)^2 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} \cdot \frac{-2}{f(x, y)} \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} d(x, y) \\ &= -2 \int_D \frac{1}{f(x, y)} \cdot \left(x^3 + xy^2 + 2x^2y + \frac{2}{3}y(4 - x^2 - 2y^2) \right) d(x, y) \\ &= -2 \left(\int_D \frac{x^3 + xy^2 + 2x^2y}{f(x, y)}\, d(x, y) + \int_D \frac{2y(4 - x^2 - 2y^2)}{3f(x, y)}\, d(x, y) \right) \\ &\overset{(2)}{=} 0 + 0 \end{aligned}$$

Dabei wird für Gleichung (1) benutzt, dass $\underline{F}(x,y,z) = \underline{F}(x,y,-z)$ gilt, und für Gleichung (2), dass der Integrand des ersten Integrals ungerade in x und der des zweiten Integrals ungerade in y ist, der Integrationsbereich D aber symmetrisch bzgl. Spiegelungen an der x– und der y–Achse.

Aufgabe 6
Im Bereich $B = \{(x,y,z) \mid x^2+2y^2+3z^2 < 5\} \subset \mathbb{R}^3$ ist das Vektorfeld

$$\underline{F}(x,y,z) = \frac{2}{x^2+2y^2+3z^2-5} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 3z \end{pmatrix}$$

definiert. Zeigen Sie, dass $\underline{F}$ ein Gradientenfeld ist, und bestimmen Sie ein Potential zu $\underline{F}$.

Lösung: Da der Bereich B (das Innere eines Ellipsoiden) einfach zusammenhängend ist, genügt es nachzurechnen, dass rot $\underline{F} = \underline{0}$ ist. Um ein Potential zu bestimmen, lässt sich eine Formel aus der Vorlesung verwenden. Man erhält

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,z) = &\int_0^x \underline{F}(t,0,0)\,dt + \int_0^y \underline{F}(x,t,0)\,dt + \int_0^z \underline{F}(x,y,t)\,dt \\ =&(\ln(5-x^2)-\ln(5))+ \\ &(\ln(5-x^2-2y^2)-\ln(5-x^2))+ \\ &(\ln(5-x^2-2y^2-3z^2)-\ln(5-x^2-2y^2)) \\ =&\ln(5-x^2-2y^2-3z^2)-\ln(5).\end{aligned}$$

Aufgabe 7
Gegeben seien der Körper

$$K = \{(x,y,z) \mid z > 0, y > 0 \text{ und } x^2+2y^2+3z^2 < 5\}$$

und das Vektorfeld

$$\underline{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos^2(y) \\ \sin^2(z) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Parametrisieren Sie den Rand ∂K in drei Teilflächen so, dass das Normalenvektorfeld nach außen zeigt.

Lösung: Eine der Flächen liegt in der xy-Ebene ($z=0$), eine in der xz-Ebene ($y=0$) und eine „frei im Raum“ ($x^2+2y^2+3z^2=5$). Definiert man $D_1 = \{(x,y) \mid x^2+2y^2 \le 5\}$ und $D_2 = \{(x,z) \mid x^2+3z^2 \le 5\}$, so kann man zwei der Flächen direkt als „Einbettung“ von D_1 bzw. D_2 in den $\mathbb{R}^3$ parametrisieren, und eine Fläche als Graph der Funktion $f : D_1 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \sqrt{\frac{1}{3}(5-x^2-2y^2)}$. Die Parametrisierungen sind dann

$$\underline{S}_1 : D_1 \to \mathbb{R}^3, (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{S}_2 : D_1 \to \mathbb{R}^3, (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} \quad \text{und } \underline{S}_3 : D_2 \to \mathbb{R}^3, (x,z) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

Man erhält die zugehörigen Normalenvektorfelder

$$\underline{N}_1(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{N}_2(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{3\cdot(5-x^2-2y^2)}} \\ \frac{2y}{\sqrt{3\cdot(5-x^2-2y^2)}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } \underline{N}_3(x,z) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\underline{N}_1$ auf dem „Boden“ des Körpers zeigt in positive z-Richtung und daher nach innen, N_2 auf der „runden“ Seitenfläche hat ebenfalls eine Komponente in positiver z-Richtung und zeigt daher nach außen, ebenso wie $\underline{N}_3$, das auf der „ebenen Seitenfläche“ in negative y-Richtung, also auch nach außen zeigt.

Um die Aufgabe zu erfüllen, muss also noch die Richtung von $\underline{N}_1$ umgekehrt werden, was dadurch erreicht werden kann, dass man anstelle von $\underline{S}_1$ die Abbildung $\underline{\tilde{S}}_1 : \tilde{D}_1 \to \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ verwendet, wobei $\tilde{D}_1 = \{(y, x) | x^2 + 2y^2 \leq 5\}$ ist.

(b) Berechnen Sie den Normalenvektor im Punkt $(1, \sqrt{\frac{1}{2}}, 1)$.

Lösung: Der Punkt liegt auf der durch $\underline{S}_2$ parametrisierten Teilfläche, und zwar an der Stelle $(x, y) = (1, \sqrt{\frac{1}{2}})$. Der Normalenvektor in diesem Punkt ist also

$$\underline{N}_2(1, \sqrt{\frac{1}{2}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Bestimmen Sie das Flächenintegral

$$\int_{\partial K} \underline{F} \cdot d\underline{S}.$$

Lösung: K ist ein Gauß-Green-Bereich. Es gilt $\operatorname{div} F(x, y, z) = 0$ und daher mit dem Divergenzsatz von Gauß

$$\int_{\partial K} \underline{F} \cdot d\underline{S} = \int_K \operatorname{div} F(x, y, z) \, d(x, y, z) = 0.$$