Mathematik 3 für Maschinenbauer

Probeklausur

Die folgenden Aufgaben behandeln einen Querschnitt der bisherigen Inhalte der Vorlesung und könnten in ähnlicher Form auch in einer Prüfungsklausur vorkommen. Anhand der Auswahl der Aufgaben können Sie relevante Stoffgebiete erkennen, an den einzelnen Aufgaben können sie für eine Klausur wichtige Rechenverfahren üben. *Nicht* mit der Klausursituation vergleichbar ist die Anzahl der Aufgaben. Die Auswahl ist vielmehr darauf ausgelegt, das gesamte Spektrum möglicher Aufgabentypen abzudecken und deshalb *deutlich* umfangreicher als eine auf 120 Minuten Bearbeitungszeit angelegte Klausur. Eine Auswahl von 4 – 5 der hier angegebenen Aufgaben dürfte aber etwa dem Umfang einer Prüfungsklausur entsprechen.

Als *Hilfsmittel* können Sie für die häusliche Bearbeitung der Aufgaben eine gewöhnliche Liste von Stammfunktionen heranziehen. Der Prüfungsklausur wird eine solche Liste beiliegen.

Aufgabe 1
Gegeben sei die Menge

$$K = \{(x, y, z) \mid (x-1)^2 + y^2 + z^2 \leq 4\} \cup \{(x, y, z) \mid (x+1)^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

(a) Stellen Sie K als eine auf einen Normalbereich projizierbare Menge dar.

(b) Bestimmen Sie die x-Koordinate des Schwerpunkts von K unter homogener Masserverteilung.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie das Volumen des Körpers

$$E = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 16\} \subset \mathbb{R}^3$$

durch Integration.

Aufgabe 3
Es seien ein Weg $\underline{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, eine dadurch definierte Kurve C und ein Vektorfeld $\underline{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\underline{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{t^2+1} \\ \frac{\pi}{2} t^2 \\ \sqrt{t} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \\ -\sin(z) \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie $\int_C \underline{F}\, d\underline{\gamma}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\underline{F}$ ein Potentialfeld ist, und bestimmen Sie ein Potential.

Aufgabe 4
Gegeben seien der Weg

$$\underline{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \underline{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix},$$

das Vektorfeld

$$\underline{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ x - y + z \end{pmatrix}$$

sowie die Kurve $C = \underline{\gamma}([0,1])$. Bestimmen Sie

(a) die Länge von $\underline{\gamma}$ und

(b) das Kurvenintegral $\int_C \underline{F}\, d\underline{\gamma}$.

Aufgabe 5
Die Fläche $A \subset \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$A = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4\}.$$

Ein Vektorfeld $\underline{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$\underline{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie einen Normalenvektor an A im Punkt $(1,0,1)^T$.

(b) Bestimmen Sie das Flächenintegral 2. Art $\int_A \underline{F} \cdot d\underline{S}$.

Aufgabe 6
Im Bereich $B = \{(x,y,z) \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 < 5\} \subset \mathbb{R}^3$ ist das Vektorfeld

$$\underline{F}(x,y,z) = \frac{2}{x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 5} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 2y \\ 3z \end{pmatrix}$$

definiert. Zeigen Sie, dass $\underline{F}$ ein Gradientenfeld ist, und bestimmen Sie ein Potential zu $\underline{F}$.

Aufgabe 7
Gegeben seien der Körper

$$K = \{(x,y,z) \mid z > 0, y > 0 \text{ und } x^2 + 2y^2 + 3z^2 < 5\}$$

und das Vektorfeld

$$\underline{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos^2(y) \\ \sin^2(z) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Parametrisieren Sie den Rand ∂K in drei Teilflächen so, dass das Normalenvektorfeld nach außen zeigt.

(b) Berechnen Sie den Normalenvektor im Punkt $(1, \sqrt{\frac{1}{2}}, 1)$.

(c) Bestimmen Sie das Flächenintegral

$$\int_{\partial K} \underline{F} \cdot d\underline{S}.$$