PADERBORN
UNIVERSITY

Herbst-Uni 2020

M2 SYMMETRIE DES DODEKAEDERS

Prof. Dr. Fabian Januszewski

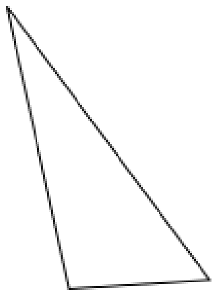
Universität Paderborn, 12. Oktober 2020

PADERBORN UNIVERSITY

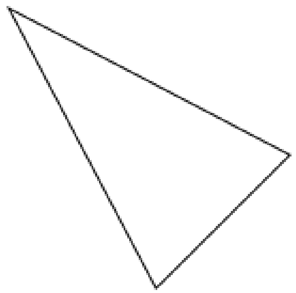
Was - Woher - Wohin?
Wieso - Weshalb - Warum?

- Was ist Symmetrie?
- Symmetrie in der Ebene
- Rechnen mit Symmetrien
- Symmetrien des Dodekaders
- Höherdimensionale Polyeder

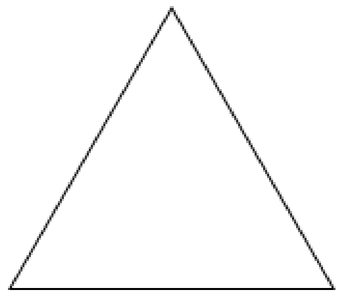
Symmetrie - Was ist das?



keine Symmetrie
(triviale Symmetrie)



Spiegelsymmetrie

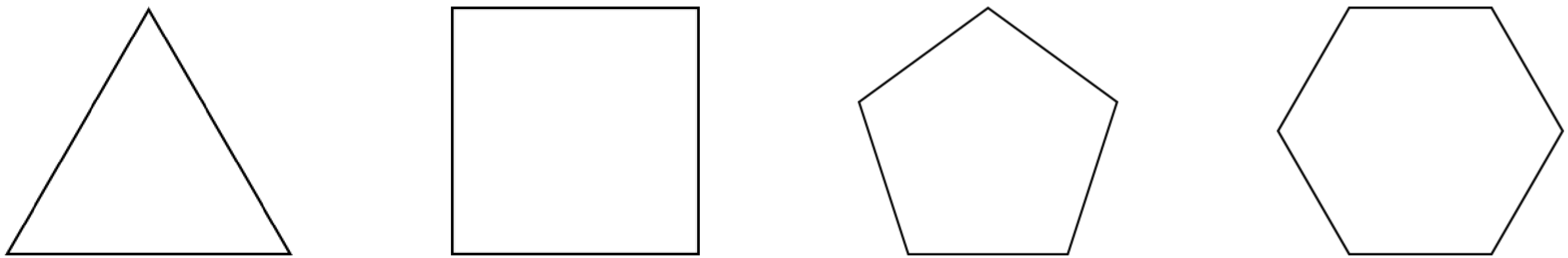


Spiegelsymmetrie
Rotationssymmetrie

Symmetrie ist eine Operation (Bewegung, Spiegelung, Rotation, ...), welche ein Objekt auf sich selbst abbildet.

Symmetrische Figuren in der Ebene

$n = 3$ $\qquad$ $n = 4$ $\qquad$ $n = 5$ $\qquad$ $n = 6$



Allgemeines reguläres n-Eck:

n Drehungen $\quad + \quad$ n Spiegelungen

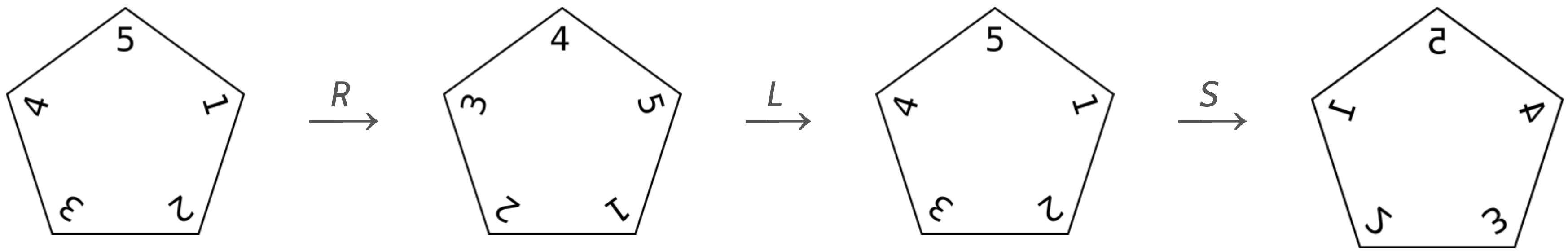
$\rightsquigarrow$ $\quad$ $2n$ Symmetrien insgesamt

Rechnen mit Symmetrien

R : einfache Drehung nach *rechts*

L : einfache Drehung nach *links*

S : Spiegelung an *vertikaler Achse* “ | ”

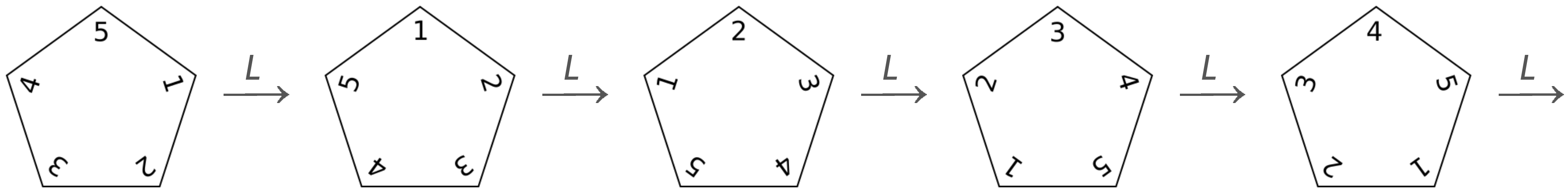


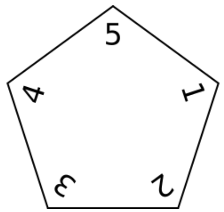
Symmetrien können **komponiert** (verkettet) werden, um neue Symmetrien zu erhalten.

Beispiel: $RL = I$ (“Identität” = triviale Symmetrie)

Der Begriff der Ordnung

Warum gibt es genau 5 verschiedene Drehungen?





$\Rightarrow \quad L^5 = I \quad \rightsquigarrow$ L hat **Ordnung** 5.

Bonus: $\quad L^4 = R$

Beweis: $\quad L^5 = I \quad \Rightarrow \quad RLLLLL = RI \quad \Rightarrow \quad ILLLL = RI \quad \Rightarrow \quad L^4 = R$

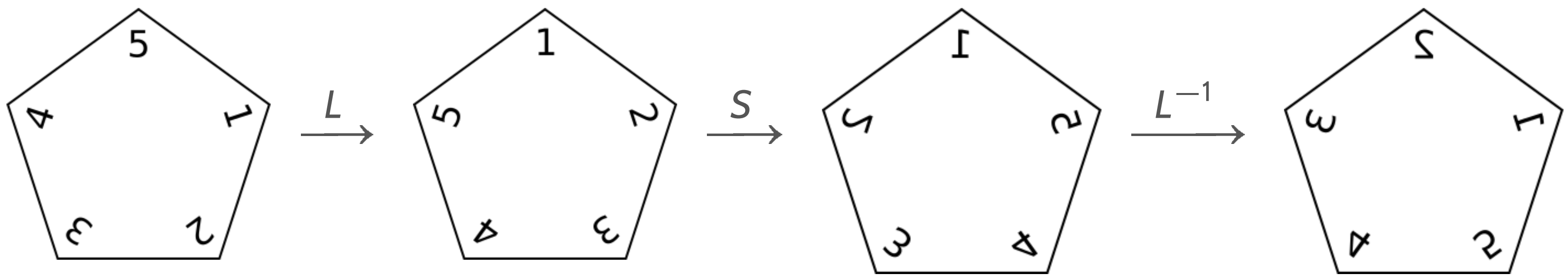
Konjugation

Warum gibt es genau 5 verschiedene Spiegelungen?

Seltsam: Die Spiegelung S hat Ordnung 2, denn $S^2 = I$.

Ansatz: Nutze Drehungen, um aus S neue Spiegelungen zu konstruieren!

Konkret: Wir wollen zum Beispiel an der Achse durch 1 spiegeln.



$\Rightarrow$ LSL^{-1} ist Spiegelung an der Achse durch 1.

Analog: L^kSL^{-k} ist Spiegelung an der Achse durch k wenn $1 \leqslant k \leqslant 5$.

Intermezzo: Gruppen

Was haben wir ausgenutzt?

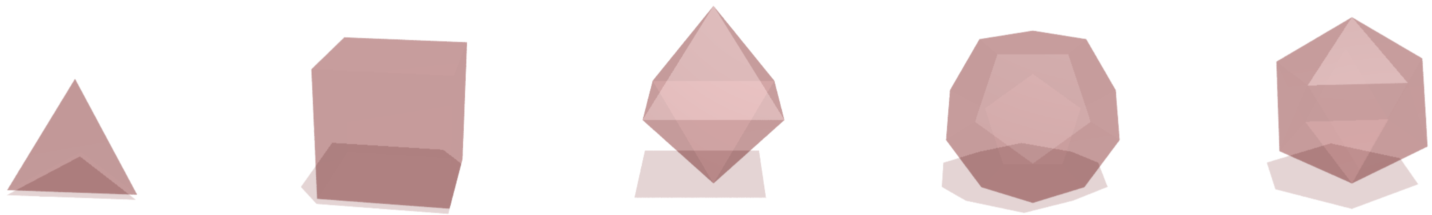
- Symmetrien lassen sich komponieren.
- Es gibt eine *triviale* Symmetrie I mit $IX = X = XI$ für jede Symmetrie X.
- Jede Symmetrie X besitzt eine *Inverse* Y mit $XY = I = YX$.
- Komposition von Symmetrien ist *assoziativ*: $(XY)Z = X(YZ)$ für alle X, Y, Z.

Eine Struktur mit diesen Eigenschaften wird als **Gruppe** bezeichnet.

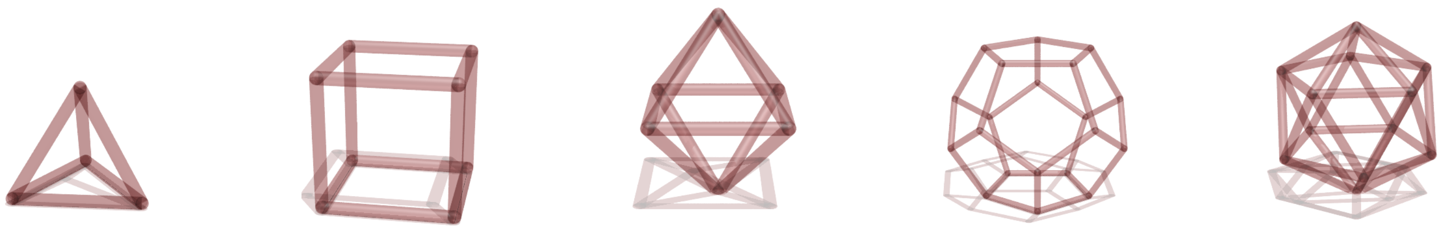
Wir haben soeben die **Symmetriegruppe** D_5 des regulären 5-Ecks bestimmt.

Symmetrien bilden immer Gruppen und ihre Struktur verrät viel über die Geometrie des zugrundeliegenden Objektes.

Die Platonischen Körper



Tetraeder Hexaeder Oktaeder Dodekaeder Ikosaeder



$n = 4$ $n = 6$ $n = 8$ $n = 12$ $n = 20$

Klassifikation der Symmetrien des Dodekaeders

Beobachtung: Jede Symmetrie ist eindeutig dadurch bestimmt, welche Fläche auf dem Nordpol landet und in welcher Lage sich die Fläche am Nordpol befindet.

Anzahl Drehsymmetrien: (Anzahl Flächen) $\times$ (Anzahl Drehsymmetrien des 5-Ecks)

$$12 \times 5 = 60$$

Ordnung	1	5	3	2	Σ
Achse durch		Fläche	Ecke	Kante	
Anzahl Achsen		6	10	15	
Anzahl Symmetrien	1	24	20	15	60

Jede nichttriviale Drehsymmetrie des Dodekaeders ist von einem der obigen drei Typen und entspricht genau einem Flächenpaar / Eckenpaar / Kantenpaar.

PADERBORN UNIVERSITY

Beispiele

N1 $\mapsto$ N5 : Drehung um 72° um Achse durch Flächen N und S.

C3 $\mapsto$ N5 : Drehung um 120° um Achse durch Ecken NBC und SWX.

S5 $\mapsto$ N5 : Drehung um 180° um Achse durch Kanten AV und DY.

S1 $\mapsto$ N5 : Drehung um 180° um Achse durch Kanten AW und CY.

X5 $\mapsto$ N5 : Drehung um 120° um Achse durch Ecken CDY und AVW.

Erzeugnisse

Satz 1: Jede Drehsymmetrie ist eine Komposition von Drehungen der Ordnung 5.

Beweis:

Wir können mit Symmetrien der Ordnung 5 eine beliebige Fläche beliebig drehen.
Deshalb genügt es zu zeigen, daß wir mit Verkettungen von Drehungen der Ordnung 5 jede Fläche auf den Nordpol transportieren können.
Fallunterscheidung:
Wenn die Fläche bereits auf dem Nordpol liegt, ist nichts mehr zu tun!
Wenn die Fläche an den Nordpol angrenzt (A, B, C, D, E), dann transportiert z. B. eine Drehung um die Achse durch Flächen E und Z Fläche A zum Nordpol.
Analog lassen sich die Flächen B, C, D oder E zum Norpol transportieren.
V, W, X, Y, Z lassen sich nach A, B, C, D, E drehen.
Zuguterletzt läßt sich S nach V drehen.
Damit sind alle Fälle abgehandelt.

Erzeugnisse

Satz 2: Jede Drehsymmetrie ist eine Komposition von Drehungen der Ordnung 3.

Beweis:

Es genügt, mit Drehungen von Ordnung 3 eine Drehung von Ordnung 5 zu realisieren.
Grund: Mithilfe von Konjugation folgt daraus, daß jede Drehung von Ordnung 5 Komposition von Drehungen von Ordnung 3 ist.
Laut Satz 1 ist jede Drehung Komposition von Drehungen von Ordnung 5
Da (s. o.) jede Drehung Komposition von Drehungen von Ordnung 5 ist, ist damit jede Drehung eine Komposition von Drehungen von Ordnung 3, was zu zeigen war.
Drehung um Achse durch Ecke *NBC* (Uhrzeigersinn), gefolgt von Drehung um Achse durch Ecke *NCD* (Uhrzeigersinn), dreht die Fläche N um 144° im Uhrzeigersinn.
Q.E.D.

Erzeugnisse

Satz 3: Jede Drehsymmetrie ist eine Komposition von Drehungen der Ordnung 2.

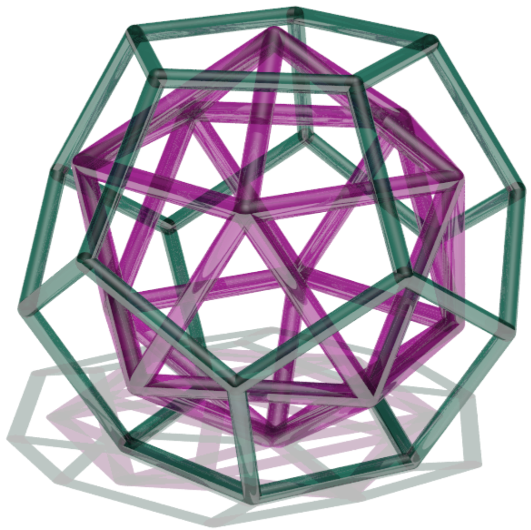
Beweis:

Dank der Sätze 1 und 2 genügt es, mit Drehungen von Ordnung 2 eine Drehung von Ordnung 3 oder 5 zu realisieren.
Grund: Analoges Argument wie im Beweis von Satz 2.

Rest: Übungsaufgabe.

Hinweis: Komponiere zwei verschiedene Drehungen der Ordnung 2 und bestimme die Ordnung des Ergebnisses.
Dabei genügt es sogar, den Fall von Ordnung 2 auszuschließen!

Dualität



	Ecken	Kanten	Flächen
Dodekaeder	20	30	12
Ikosaeder	12	30	20

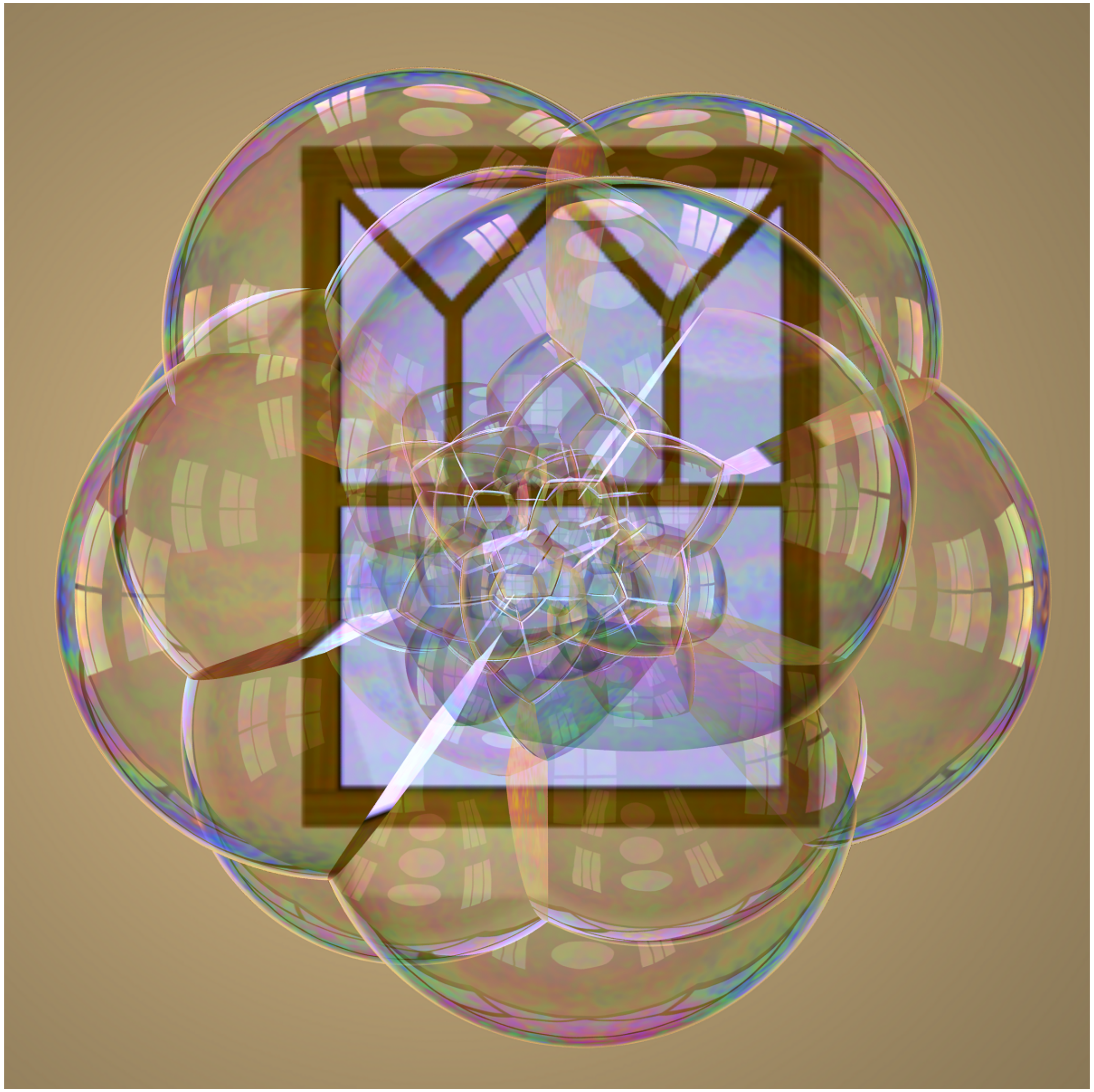
Höherdimensionale Polyeder

In Dimension 4 existieren 6 reguläre Polyeder:

Name	Ecken	Kanten	Flächen	Körper	Randkörper	Symmetrien	Dual
5-Zeller	5	10	10	5	Tetraeder	120	selbstdual
8-Zeller	16	32	24	8	Hexaeder	384	16-Zeller
16-Zeller	8	24	32	16	Tetraeder	384	8-Zeller
24-Zeller	24	96	96	24	Oktaeder	1152	selbstdual
120-Zeller	600	1200	720	120	Dodekaeder	14400	600-Zeller
600-Zeller	120	720	1200	600	Tetraeder	14400	120-Zeller

In Dimension $\geqslant$ 5 existieren lediglich **drei** reguläre Körper:

Hyper-Tetraeder, Hyper-Würfel, Hyper-Oktaeder.



Quelle: John M. Sullivan