Universität Paderborn
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Fabian Januszewski

Proseminar Quadratische Formen

im Sommer 2020

Als Hauptquelle für die Vorträge 1-15 des Proseminars dient [Cassels]. Als optional ergänzende Literatur zu den Vorträgen 5-14 eignet sich auch [Serre].

[Cassels] enthält am Ende eines jeden Kapitels viele Beispiele in Form von Übungsaufgaben. Die betreffenden Vorträge sollten durch eine Auswahl dieser angereichert werden.

Vortragsthemen sind folgende:

(1) **Quadratische Formen über Körpern: Definition** Grundlegende Definitionen: Definition einer quadratischen Form, Normalbasen. Das ist Kapitel 1 in [Cassels], d. h. Abschnitt 1.2, sowie Abschnitt 2.1 zu Beginn des zweiten Kapitels. Zuguterletzt sollten singuläre Räume angedeutet werden, sofern die Zeit hierfür ausreicht (Abschnitt 2.6 in [Cassels]).

(2) **Isotrope Räume** Definition und Diskussion isotroper Räume sowie universeller quadratischer Formen, die erste Hälfte des zweiten Kapitels in [Cassels], d. h. Abschnitte 2.1-2.3.

(3) **Isometrien und Autometrien.** *Isometrien* und *Autometrien* werden eingeführt und erklärt, [Cassels] Abschnitt 2.4.

(4) **Grothendieck- und Witt-Gruppe.** Die Isomorphieklassen quadratischer Formen lassen sich in natürlicher Weise in eine Gruppe einbetten, die sogenannte *Grothendieck-Gruppe* $G(k)$. Als Faktorgruppe letzterer erhalten wir die *Witt-Gruppe* $W(k)$. Dies wird in Abschnitt 2.5 erklärt.

(5) **Die reellen Zahlen.** Konstruktion der reellen Zahlen mittels Cauchyfolgen ausgehend von den Rationalen Zahlen.

(6) p**-adische Zahlen.** Definitionen und Eigenschaften, Abschnitt 3.1 in [Cassels].

(7) **Hensels Lemma.** Wir heben Nullstellen modulo p, Abschnitt 3.4 in [Cassels].

(8) **Quadratische Reziprozität.** Das Gauß'sche quadratrische Reziprozitätsgesetz: Ein Beweis, sowie Beispiele: Kapitel §XI und §XII in [Weil].

(9) **Das Hilbertsche Normrestsymbol.** Für jede Primstelle p von $\mathbb{Q}$ ($p = \infty$ is erlaubt!) definieren wir für $a, b \in \mathbb{Q}_p^\times$ das Normrestsymbol

$$\left(\frac{a,b}{p}\right) \in \{\pm 1\}$$

als $+1$ genau dann, wenn die Gleichung

$$aX^2 + bY^2 - Z^2 = 0$$

in $\mathbb{Q}_p$ nichttrivial lösbar ist. Es erfüllt viele gutartige Eigenschaften, und macht dank der globalen Produktformel das quadratische Reziprozitätsgesetz im Kontext quadratischer Formen nutzbar. Dies sind Abschnitte 3.2-3.3 in [Cassels].

(10-11) **Die Hasse-Minkowski-Invariante.** In [Cassels] Abschnitt 4.1 und 4.2 verallgemeinern wir die Definition des Normrestsymbols auf höhere Dimensionen zur *Hasse-Minkowski-Invarianten* und sehen ein, daß die Minkowski-Invariante zusammen mit Dimension und Determinante quadratische Formen lokal klassifizieren. Dies sind ein bis zwei Vorträge.

(12) **Geometrie der Zahlen.** Für den Beweis des starken Hasse-Prinzips benötigen wir eine Variante des Minkowski'schen Gitterpunktsatzes. Dies sind Abschnitte 5.1-5.3 aus [Cassels].

(13) **Das starke Hasse-Prinzip.** In diesem Vortrag beweisen wir Theorem 1.1 aus Kapitel 6, welches besagt, daß eine quadratische Form genau dann die 0 über $\mathbb{Q}$ nicht-trivial darstellt, wenn dies lokal in allen $\mathbb{Q}_p$ der Fall ist. Dies sind Abschnitte 6.3-6.6.

(14) **Das schwache Hasse-Prinzip.** Aus dem starken Hasse-Prinzip folgern wir das schwache Hasse-Prinzip, Theorem 1.2 aus Kapitel 6, welches besagt, daß zwei quadratische Formen genau dann über $\mathbb{Q}$ rational äquivalent sind, wenn dies über allen $\mathbb{Q}_p$ der Fall ist. Dies ist Abschnitt 6.2 aus [Cassels]. Weiterhin zeigen wir den Existenz-Satz (Theorem 1.3 aus Kapitel 6), [Cassels] Abschnitt 6.7, und lernen etwas über die Größe und Approximation von Lösungen, Abschnitte 6.8 und 6.9.

(15) **Die Struktur der Witt-Gruppe über $\mathbb{Q}$.** In diesem Vortrag bestimmen wir zunächst mit den Resultaten aus Vortrag 5 die Struktur der Witt-Gruppen $W(\mathbb{Q}_p)$ wie in Abschnitt 4.3 aus [Cassels] und benutzen dieses Resultat gemeinsam mit dem Lokal-Global-Prinzip um die Struktur der Witt-Gruppe $W(\mathbb{Q})$ zu beschreiben: $W(\mathbb{Q})$ ist kanonisch isomorph zur direkten Summe aller $W(\mathbb{F}_p)$ (einschließlich $p = \infty$), [Cassels], Abschnitt 6.11.

(16) **Dirichlets Primzahlsatz.** Definition Dirichlet'scher L-Reihen, und Anwendung auf den Beweis des allgemeinen und des Dirichlet'schen Primzahlsatzes.

Literatur

[Cassels] J.W.S. Cassels, *"Rational Quadratic Forms"*, Academic Press.

[CF] J.W.S. Cassels, A. Fröhlich, *Algebraic Number Theory*, Proc. of an instructional conference.

[Kneser] M. Kneser, *Quadratische Formen*, Springer-Verlag.

[Serre] J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique (A Course in Arithmetic).*

[Weil] A. Weil, *Number Theory for Beginners*, Springer-Verlag.