Institut für Mathematik
Prof. Dr. Fabian Januszewski

Seminar im Sommersemester 2022: Quadratische Formen & Galoiskohomologie

Zu den ältesten und fundamentalsten Problemen der Zahlentheorie gehört das Studium diophantischer Gleichungen, d.h. algebraischer Gleichungen über $\mathbb{Q}$ oder gar $\mathbb{Z}$. Die Theorie der linearen Gleichungen wird in der Linearen Algebra über $\mathbb{Q}$ erschöpfend behandelt, und aus der Einführung in die Algebra und Zahlentheorie kennen wir den Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen, welcher als Hauptsatz der Theorie über $\mathbb{Z}$ angesehen werden kann. All dies entspricht Gleichungen ersten Grades.

Daher liegt es nahe, *quadratische Formen*, d.h. Gleichungen zweiten Grades zu studieren:

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = y, \quad x_i \in K, \tag{1}$$

für gegebenes $y \in K$ und

$$Q(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{ij} a_{ij} X_i X_j,$$

mit Koeffizienten $a_{ij} \in K$. In diesem Seminar beschäftigen wir uns mit dem Fall $K = \mathbb{Q}$ (der Fall $K = \mathbb{Z}$ ist deutlich komplizierter). Hierbei werden geometrische Methoden aus der linearen Algebra hilfreich, aber nicht mehr ausreichend sein.

Das Studium von (1) über $\mathbb{Q}$ führt uns in natürlicher Weise zum Studium von (1) über $\mathbb{R}$ und den p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$. Letztere werden wir im Seminar kennenlernen und sehen, daß diese gleichberechtigt neben $\mathbb{R}$ in natürlicherweise auftreten: Sie entstehen aus $\mathbb{Q}$ durch Vervollständigung bezüglich des p-adischen Betrages $|\cdot|_p$, genauso wie $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ durch Vervollständigung bezüglich des archimedischen Absolutbetrages $|\cdot|_\infty$ entsteht. Daher schreiben wir auch $\mathbb{Q}_\infty := \mathbb{R}$.

Lösungen von (1) über $\mathbb{Q}_p$ spiegeln Lösungen ‘modulo p^∞’ wider. Wir sprechen daher auch von ‘lokalen Lösungen bei p’, im Gegensatz zu ‘globalen Lösungen’ in $\mathbb{Q}$.

Das erste Ziel unseres Seminares wird sein, die Gleichungen (1) lokal zu verstehen. Dies ist offensichtlich sinnvoll, da jede globale Lösung auch eine lokale Lösung für jedes p ist. Unser Hauptziel ist dann der berühmte *Satz von Hasse-Minkowski*, der besagt, daß die Umkehrung ebenfalls gilt: *lokale* Lösbarkeit in allen $\mathbb{Q}_p$ impliziert *globale* Lösbarkeit in $\mathbb{Q}$.

Als Anwendung zeigen wir unter anderem *Meyer's Theorem*, welches besagt, daß Gleichung (1) für $n \geq 5$ und $y = 0$ genau dann eine nichttriviale Lösung in $\mathbb{Q}$ besitzt, wenn dies in $\mathbb{R}$ der Fall ist.

In den letzten Vorträgen des Seminars werden wir diese Ergebnisse konzeptioneller im Rahmen algebraischer Gruppen interpretieren. Jede quadratische Form Q gibt zu einer *orthogonalen Gruppe* $\mathrm{O}(Q)$ Anlaß, welche die bekannte orthogonale Gruppe aus der linearen Algebra verallgemeinert. Es stellt sich heraus, daß die Klassifikation dieser Gruppen äquivalent zur Klassifikation quadratischer Formen ist, und in diesem Sinne der Satz von Hasse-Minkowski äquivalent wird zur Aussage, daß die natürliche Abbildung

$$H^1(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}); \mathrm{O}(Q)) \to \prod_p H^1(\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p); \mathrm{O}(Q))$$

ein Monomorphismus ist. Was diese Notation bedeutet, und wie man sie interpretiert, werden wir im Seminar lernen.

Vorkenntnisse: Das Modul Algebra, insbesondere Galoistheorie.

Vorbesprechung: Mittwoch, den 23. März 2022, um 11:15 via Zoom.