UNIVERSITÄT PADERBORN

Institut für Mathematik
Prof. Dr. Fabian Januszewski

Seminar im Sommersemester 2022: Quadratische Formen & Galoiskohomologie

Als Hauptquelle für die Vorträge 1-9 des Seminars dient [Cassels]. Als optional ergänzende Literatur zu den Vorträgen 3-8 eignet sich auch [Serre2].

[Cassels] enthält am Ende eines jeden Kapitels viele Beispiele in Form von Übungsaufgaben. Die betreffenden Vorträge sollten durch eine Auswahl dieser angereichert werden.

Die Vorträge 10-14 verwenden weiterhin die Quellen [CF, HS, Kneser, PR, Serre].

Vorträge 15 und 16 sind optional.

Vortragsthemen sind:

(1) **Quadratische Formen über Körpern.** Grundlegende Definitionen: Definition einer quadratischen Form, isotrope Räume, Normalbasen. Das sind Kapitel 1 und die erste Hälfte von Kapitel 2 in [Cassels], d.h. Abschnitte 1.2, 2.1-2.3.

(2) **Grothendieck- und Witt-Gruppe.** Zunächst sollen *Isometrien* und *Autometrien* erklärt werden, [Cassels] Abschnitt 2.4. Die Isomorphieklassen quadratischer Formen lassen sich in natürlicher Weise in eine Gruppe einbetten, die sogenannte *Grothendieck-Gruppe* $G(k)$. Als Faktorgruppe letzterer erhalten wir die *Witt-Gruppe* $W(k)$. Dies wird in Abschnitt 2.5 erklärt. Weiterhin sollte dieser Vortrag auch auf Abschnitt 2.6 über singuläre Formen eingehen.

(3) **p-adische Zahlen und Hensel's Lemma.** Definitionen und Eigenschaften, Abschnitte 3.1 sowie 3.4 in [Cassels].

(4) **Das Hilbertsche Normrestsymbol.** Für jede Primstelle p von $\mathbb{Q}$ ($p = \infty$ is erlaubt!) definieren wir für $a, b \in \mathbb{Q}_p^\times$ das Normrestsymbol

$$\left(\frac{a,b}{p}\right) \in \{\pm 1\}$$

als $+1$ genau dann, wenn die Gleichung

$$aX^2 + bY^2 - Z^2 = 0$$

in $\mathbb{Q}_p$ nichttrivial lösbar ist. Es erfüllt viele gutartige Eigenschaften, und macht dank der globalen Produktformel das quadratische Reziprozitätsgesetz im Kontext quadratischer Formen nutzbar. Dies sind Abschnitte 3.2-3.3 in [Cassels].

(5) **Die Hasse-Minkowski-Invariante.** In [Cassels] Abschnitt 4.1 und 4.2 verallgemeinern wir die Definition des Normrestsymbols auf höhere Dimensionen zur *Hasse-Minkowski-Invarianten* und sehen ein, daß die Minkowski-Invariante zusammen mit Dimension und Determinante quadratische Formen lokal klassifizieren.

(6) **Geometrie der Zahlen.** Für den Beweis des starken Hasse-Prinzips benötigen wir eine Variante des Minkowski'schen Gitterpunktsatzes. Dies sind Abschnitte 5.1-5.3 aus [Cassels].

(7) **Das starke Hasse-Prinzip.** In diesem Vortrag beweisen wir Theorem 1.1 aus Kapitel 6, welches besagt, daß eine quadratische Form genau dann die 0 über $\mathbb{Q}$ nicht-trivial darstellt, wenn dies lokal in allen $\mathbb{Q}_p$ der Fall ist. Dies sind Abschnitte 6.3-6.6.

(8) **Das schwache Hasse-Prinzip.** Aus dem starken Hasse-Prinzip folgern wir das schwache Hasse-Prinzip, Theorem 1.2 aus Kapitel 6, welches besagt, daß zwei quadratische Formen genau dann über $\mathbb{Q}$ rational äquivalent sind, wenn dies über allen $\mathbb{Q}_p$ der Fall ist. Dies ist Abschnitt 6.2 aus [Cassels]. Weiterhin zeigen wir den Existenz-Satz (Theorem 1.3 aus Kapitel 6), [Cassels] Abschnitt 6.7, und lernen etwas über die Größe und Approximation von Lösungen, Abschnitte 6.8 und 6.9.

(9) **Die Struktur der Witt-Gruppe über $\mathbb{Q}$.** In diesem Vortrag bestimmen wir zunächst mit den Resultaten aus Vortrag 5 die Struktur der Witt-Gruppen $W(\mathbb{Q}_p)$ wie in Abschnitt 4.3 aus [Cassels] und benutzen dieses Resultat gemeinsam mit dem Lokal-Global-Prinzip um die Struktur der Witt-Gruppe $W(\mathbb{Q})$ zu beschreiben: $W(\mathbb{Q})$ ist kanonisch isomorph zur direkten Summe aller $W(\mathbb{F}_p)$ (einschließlich $p = \infty$), [Cassels], Abschnitt 6.11.

(10) **Algebraische Gruppen, orthogonale Gruppen.** Allgemeine Definition algebraischer Gruppe [PR, 2.1.1/2.1.2/2.1.4/2.1.7; CF, X.1], die (spezielle) orthogonale Gruppe einer quadratischen Form [Kneser, I.3]. Beispiele.

(11) **Galois-Kohomologie.** Definition und elementare Eigenschaften. Lange exakte Sequenz für abelsche Koeffizientensysteme und als Anwendung die Kummer-Sequenz, sowie H^1 für nichtkommutative Koeffizienten [Serre; PR, 1.3.1/1.3.2; CF, X.2.1; HS, C.5].

(12) **Die Galois-Kohomologie und Formen von Gruppen.** Zusammenhang der Galoiskohomologie und homogener Räume, Formen algebraischer Gruppen [PR, 2.2; CF X.2.2; HS, C.5]. Beispiele, inbesondere Restriktion der Skalare.

(13) **Die Galois-Kohomologie orthogonaler Gruppen.** Interpretation des schwachen Hasse-Prinzips in der Galoiskohomologie, sowie kohomologische Interpretation des Hilbertsymbols und der Hasse-Witt-Invarianten [PR, section 6.6, S.347ff; auch CF, X.2.4].

(14) **Gegenbeispiele zum Hasse-Prinzip.** Gegenbeispiele zum Hasse-Prinzip [CF, Excercises 4+5].

(15) **Die Spin-Gruppe und Approximationssätze.** Die Spin-Gruppe als einfach zusammenhängede Überlagerung der orthogonalen Gruppe und Approximationssätze [Kneser, VIII 23-24; CF, Excecise 5.4].

(16) **Dirichlets Primzahlsatz.** Definition Dirichlet'scher L-Reihen, und Anwendung auf den Beweis des allgemeinen und des Dirichlet'schen Primzahlsatzes.

Literatur

[AL] W. Aitken, F. Lemmermeyer, *Counterexamples to the Hasse principle.*

[Cassels] J.W.S. Cassels, *"Rational Quadratic Forms"*, Academic Press.

[CF] J.W.S. Cassels, A. Fröhlich, *Algebraic Number Theory*, Proc. of an instructional conference.

[HS] M. Hindry und J.H. Silverman, *Diophantine Geometry*, Springer-Verlag.

[Kneser] M. Kneser, *Quadratische Formen*, Springer-Verlag.

[PR] V. Platonov und A. Rapinchuk, *Algebraic Groups and Number Theory*, Academic Press.

[Serre] J.-P. Serre, *Cohomologie Galoisienne (Galois Cohomology)*, Springer-Verlag.

[Serre2] J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique (A Course in Arithmetic).*