UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft
Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik
Institut für Mathematik
AG Hilgert
Warburger Straße 100
33098 Paderborn

Entwicklung von Schnittstellenaufgaben zwischen Hochschulmathematik und Schulmathematik im Rahmen einer gymnasialen Lehramtsanfängerveranstaltung

BACHELORARBEIT

im Rahmen des Studiengangs

Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen

Bachelor für die Fächer Mathematik und Informatik

zur Erlangung des Grades

BACHELOR OF EDUCATION

von
MAX HOFFMANN
Höhenstraße 17
33098 Paderborn

Matrikelnummer: 6573171

vorgelegt bei
PROF. DR. JOACHIM HILGERT
und
PROF. DR. ROLF BIEHLER

Paderborn, 22. Mai 2014

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Thema der Arbeit

Die hier vorliegende Bachelorarbeit hat den Titel „Entwicklung von Schnittstellenaufgaben zwischen Hochschulmathematik und Schulmathematik im Rahmen einer gymnasialen Lehramtsanfängerveranstaltung“. Hier geht es um die Vorstellung einer an der Universität Paderborn durchgeführten Maßnahme zur Verbesserung der Lehramtsausbildung. Im Rahmen der Veranstaltung „Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten“, die verpflichtend für die Studierenden des Bachelor of Education für das Lehramt für Gymnasien und Gesamtschulen und das Lehramt für Berufskollegs mit Fach Mathematik ist, wurden im Wintersemester 2013/2014 mehrere Innovationen mit dem Ziel, die Lehre zu verbessern, durchgeführt. Im Bezug auf die bereits 1908 von Felix Klein formulierte „doppelte Diskontinuität“ (Klein, 1908, S.1 f.) und auch dem Stand der heutigen hochschuldidaktischen Forschung entsprechend ist es unter anderem erforderlich den Studierenden Bezüge zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik explizit zu verdeutlichen. Dies kann unter anderem durch das von Thomas Bauer vorgeschlagende Konzept von so genannten Schnittstellenaufgaben umgesetzt werden. Diese Aufgaben gehen auf Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik ein und wurden auch in der Veranstaltung „Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten“ verwendet.

Ziel dieser Arbeit ist es, beispielhaft für einige Thematiken der Vorlesung, passende mathematische Inhalte aus der Schule zu identifizieren und diese Bezüge in entsprechenden Schnittstellenaufgaben einzubetten. Die in dieser Arbeit vorgestellten Aufgaben wurden in ihren Grundzügen im Team entwickelt und von mir überarbeitet und präzisiert.

1.2 Vorgehensweise

In Hauptteil der Arbeit wird in Abschnitt 2.1 zunächst die Veranstaltung „Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten“ vorgestellt. Danach wird in Abschnitt 2.2.2 die momentane hochschuldidaktische Forschung im Bereich von Schnittstellenaufgaben beschrieben. In Abschnitt 2.2.3 wird dann das Konzept der Schnittstellenaufgaben auf die Veranstaltung übertragen und die in 2.3 folgende Darstellung ausgewählter Aufgaben vorbereitet.

In 2.3 werden dann neun Schnittstellenaufgaben vorgestellt, wobei vier im Detail besprochen werden. Abschließend wird in Kapitel 3 ein erstes Reśumé gezogen, offene Fragestellungen und Möglichkeiten des weiteren Vorgehens werden dargestellt und es wird kurz auf die Chancen eingegangen, die das Entwickeln von Schnittstellenaufgaben für angehende Lehrerinnen und Lehrer birgt.

Kapitel 2

Hauptteil

2.1 Die Veranstaltung „Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten“

Im Rahmen der Umstellung der ersten Ausbildungsphase des Lehramtsstudiums auf das Bachelor-/Master-System war es notwendig die Prüfungsordnungen anzupassen. Während die auslaufenden Studiengänge der Lehramtsprüfungsordnungen 2003 und 1994 für Studierende der Mathematik sowohl im gymnasialen Lehramt wie auch im Lehramt für das Berufskolleg die Veranstaltungen *Lineare Algebra I* und *Analysis I* für das erste Semester vorsahen, wurde in den neuen Prüfungsordnungen die *Analysis I* in das dritte Semester verschoben. An deren Stelle tritt im ersten Semester die Veranstaltung *Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten* (EmDA).

2.1.1 Allgemeines

Die EmDA-Veranstaltung ist als einzige Veranstaltung dem „Basismodul Ba 1 Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten“ zugeordnet. Im Modulhandbuch ist ein Workload von 180 Stunden angegeben, wobei 30 Stunden (2 SWS) auf eine Vorlesung und 30 Stunden (2 SWS) auf Übungen in Kleingruppen (ca. 25 Teilnehmer) entfallen. Um zur Prüfungsleistung zugelassen zu werden, muss eine – vom Dozenten festzulegende – Studienleistung erfolgreich absolviert worden sein. Die Prüfungsleistung kann eine Klausur (120 min) oder eine mündliche Prüfung (30 min) sein und bildet gleichzeitig auch den Modulabschluss. Das Modul ist verpflichtend für Bachelor-Studierende im gymnasialen Lehramt oder im Lehramt für das Berufskolleg mit dem Fach Mathematik. (vgl. Universität Paderborn (2011, S.10 f.))

Die Veranstaltung fand mit dem Inkrafttreten der neuen Studienordnung im Wintersemester 2011/2012 das erste Mal statt. Im Wintersemester 2012/2013 wurde sie dann von PROF. DR. JOACHIM HILGERT übernommen und inhaltlich umstrukturiert. Mit diesen Inhalten wurde die Vorlesung dann von Herrn HILGERT im Wintersemester 2013/2014 und von der wissenschaftlichen Mitarbeiterin Frau ANJA PANSE im Sommersemester 2014 erneut gehalten.

2.1.2 Inhaltliche Ausgestaltung

Seit dem Wintersemester 2012/2013 liegt allen folgenden Durchführungen der EmDA-Veranstaltung ein identisches inhaltliches Vorgehen zu Grunde. Die Themen beruhen auf ausgewählten Kapiteln aus I. Hilgert und Hilgert (2012).

Das Gesamtziel der Veranstaltung ist eine Konstruktion der reellen Zahlen. Hierzu sind jedoch einige vorbereitende Themen notwendig. Nach einer Einführung über die Mathematik als Verfeinerung der Alltagsprache werden typische Methoden mathematischen Arbeitens beispielhaft am Begriff der Restklassen betrachtet. Hierbei ist ein Themenbereich die Entwicklung von Teilbarkeitsregeln. Im Rahmen dessen werden wichtige Werkzeuge und Objekte wie Mengen, Funktionen, Relationen und Äquivalenzrelationen eingeführt und typische Beweisverfahren, wie der direkte Beweis, der Beweis durch Kontraposition, der Beweis durch Widerspruch und das Verfahren der Vollständigen Induktion an Beispielen betrachtet.

Um diese Grundlagen zu festigen, werden unter anderem der euklidische Algorithmus und der Fundamentalsatz der Zahlentheorie eingeführt. Dort können die Beweisverfahren dann auf vielfältige Art und Weise geübt werden. Als weitere typische mathematische Strukturen werden Gruppen, Ringe und Körper definiert.

In der zweiten Semesterhälfte werden zunächst Restklassenkörper, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ mit Hilfe von geordneten Körpern und dem Begriff der Vollständigkeit miteinander verglichen. Um dann schlussendlich die reellen Zahlen konstruieren zu können werden zunächst axiomatisch Modelle für die natürlichen Zahlen definiert. Aus diesen lassen sich dann über Äquivalenzklassen die ganzen Zahlen, die rationalen Zahlen und schlussendlich die reellen Zahlen als Äquivalenzklassen rationaler Cauchy-Folgen konstruieren. Dabei werden jedesmal wichtige Eigenschaften, wie die Wohldefiniertheit der Rechenoperationen und die partiellen Ordnungen auf den jeweiligen Zahlbereichen behandelt.

2.1.3 Organisationsform

Im Wintersemester 2012/2013 wurde eine klassische Organisationsform für die EmDA-Veranstaltung gewählt. Das bedeutet, dass es eine 90minütige Vorlesung gab, in der der Dozent die Inhalte an der Tafel vermittelt hat. Zusätzlich gab es in jeder Woche Präsenz- und Hausaufgaben. Zum Erwerb der Studienleistung waren 40% der erreichbaren Punkte in den Hausübungen erforderlich. Nach einem sehr schlechten Ausfall der Klausur mit einer hohen Durchfallquote wurde das Konzept der Veranstaltung im nachfolgenden Wintersemester in vielen Punkten verändert – gleichgeblieben sind lediglich die Inhalte.

Als Grundlage für die Vermittung von Inhalten dienen einzelne Passagen aus I. Hilgert und Hilgert (2012). In jeder Vorlesungswoche wird ein so genannter Themenblock bereitgestellt. In diesem Themenblock wird unter anderem ein Leseauftrag definiert, der von den Studierenden als Vorbereitung auf die Vorlesungsveranstaltung auszuführen ist. Dabei besteht die Möglichkeit auf verschiedene Arten Fragen – sowohl persönlich, als auch anonym[1] – zu formulieren.

Am eigentlichen Vorlesungstermin findet keine Inhaltsvermittlung im klassischen Sinne statt, sondern es werden zu den Leseaufträgen aufgetauchte Fragen beantwortet. Damit die Studierenden den Leseauftrag besser einordnen können und Prüfungsanforderungen transparenter sind, werden für jeden Themenblock zusätzlich intendierte Lernziele definiert.

[1] Hierzu wird ein anonymes Onlinefragetool bereitgestellt.

Wie im klassischen Konzept gibt es auch in diesem Konzept Präsenz- und Hausaufgaben. Um Verbindungen zwischen der Schulmathematik und den Inhalten der Veranstaltung herzustellen, sind einige hiervon Schnittstellenaufgaben. Auf diese wird im nächsten Abschnitt näher eingegangen.

Auch die Möglichkeiten für den Erwerb der Studienleistung wurden angepasst. Dies ist aber nicht relevant für die hier vorliegende Arbeit. Genaueres findet sich bei J. Hilgert, Hoffmann und Panse (2014?).

2.1.4 Für diese Arbeit relevante Details

Den einzelnen Themenblöcken können die folgenden Oberthemen zugeordnet werden. Diese Zuordnung findet sich in Tabelle 2.1.

Themenblock	Oberthema
01	Einführung in mathematisches Lesen und Schreiben
02	Teilbarkeitsregeln und Restklassen
03	Mengen, Relationen und Funktionen
04	ggT und Euklidischer Algorithmus
05	Aussagenlogik und Primzahlen
06	Vollständige Induktion und Primfaktorzerlegung
07	abelsche Gruppen
08	kommutative Ringe mit Eins und Körper
09	geordnete Körper und Vollständigkeit
09a	Vertiefung geordnete Körper und Vollständigkeit
10	Aufbau der natürlichen Zahlen
11	Addition und Multiplikation auf den natürlichen Zahlen
12	Von den natürlichen zu den ganzen Zahlen
13	Von den ganzen zu den rationalen Zahlen
14	Von den rationalen zu den reellen Zahlen

Tabelle 2.1: Thematische Einordnung der einzelnen Themenblöcke

Eine Übersicht über die zugehörigen Leseaufträge der Themenblöcke, die für diese Arbeit relevant sind, findet sich im Anhang C.

Wie oben erwähnt, werden in jedem Themenblock zusätzlich die intendierten Lernziele zur Verfügung gestellt. Diese Lernziele sind in die Bloomsche Taxonomie eingeordnet mit Hilfe der sich Lernziele nach den folgenden Kategorien klassifizieren lassen:

(1) Wissen,

(2) Verstehen,

(3) Anwenden,

(4) Analyse,

(5) Synthese,

(6) Beurteilen.

Genauere Informationen hierzu finden sich bei Bloom (1972).

Diejenigen Lernziele, die für die Einordnung der in dieser Arbeit vorgestellten Schnittstellenaufgaben relevant sind, finden sich im Anhang D.

2.2 Schnittstellenaufgaben

Der wesentliche Teil dieser Arbeit beschäftigt sich mit Schnittstellenaufgaben. Einen theoretischen Unterbau zur Entwicklung und Analyse dieser liefert Thomas Bauer.(vgl. Bauer und Partheil (2009); Bauer (2013).) Dieser Ansatz wird im Folgenden vorgestellt und dann auf die EmDA-Veranstaltung angepasst.

2.2.1 Hintergrund

Felix Klein schreibt in der Einleitung des ersten Teils seiner „Elementargeometrie vom höheren Standpunkte aus“ die folgenden Zeilen:

> „In den letzten Jahren hat sich unter den Universitätslehrern der mathematischen und naturwissenschaftlichen Fächer ein weitgehendes Interesse an einer zweckmäßigen, allen Bedürfnissen gerecht werdenden <u>Ausbildung der Kandidaten des höheren Lehramts</u> entwickelt. Diese Erscheinung ist erst recht neuen Datums; in einer ganzen langen Zeitperiode trieb man an den Universitäten ausschließlich hohe Wissenschaft ohne Rücksicht auf das, was der Schule not tat, und ohne sich überhaupt um die Herstellung einer Verbindung mit der Schulmathematik zu sorgen. Doch was ist die Folge einer solchen Praxis? Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, an denen ihn nichts mehr an das erinnert, womit er sich bisher beschäftigt hat, und natürlich vergisst er daher alle diese Dinge rasch und gründlich. Tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so muss er eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten, und da er diese Aufgabe kaum selbstständig mit der Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so nimmt er bald die althergebrachte Unterrichtstradition auf, und das Hochschulstudium bleibt ihm nur eine mehr oder minder angenehme Erinnerung, die auf seinen Unterricht keinen Einfluss hat.
>
> Diese <u>doppelte Diskontinuität</u>, die gewiss weder der Schule, noch der Universität jemals Vorteil brachte, bemüht man sich nun neuerdings endlich aus der Welt zu schaffen [...]“ (Klein, 1908, S. 1 f.) (Hervorhebung im Originaltext)

Das hier vorkommende Schlagwort der *doppelten Diskontinuität* thematisiert eine Problematik, die auch heute, 106 Jahre später, immer noch aktuell ist. Diese Einschätzung findet sich in vielen einschlägigen Texten; unter anderem Hefendehl-Hebeker (2013, S. 1 f.), Danckwerts (2013, S. 78) und Bauer und Partheil (2009, S. 86) beginnen ihre Aufsätze mit einer Unterstreichung der Relevanz der doppelten Diskontinuität in der deutschen Lehrerausbildung. Danckwerts (2013, S. 78) kennzeichnet die universitäre Ausbildung der angehenden Gymnasiallehrkräfte als einen „anerkannt kritische[n] Punkt“ und fordert eine Weiterentwicklung von „Kleins Grundgedanken einer 'Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus'“ (ebd.).

Danckwerts zeigt hierfür zwei Wege auf: Auf der einen Seite steht der Weg von Klein, mit dem Ziel die Schulmathematik nachträglich nach „umfassende[n] hochschulmathematische[n] Erfahrungen“ mit den gerlernten Fachinhalten zu verknüpfen. Der alternative Weg ist, schon früh im Studium Aspekte der Schulmathematik als Anknüpfungspunkte auf verschiedenen Ebenen für die Betrachtung von Hochschulmathematik zu verwenden und diese auszuschärfen. Dieser zweite Weg wird von Danckwerts präferiert. (vgl. ebd.)

Bauer und Partheil (2009, S. 86 f.) verfeinern den Begriff der doppelten Diskontinuität und differenzieren die Kluft zwischen Schul- und Universitätsmathematik in die folgenden drei Ebenen. Auf der *Inhaltsebene* werden in Schule und Universität sehr unterschiedliche Schwerpunkte gesetzt. Die Autoren geben als Beispiel den Bereich der Geometrie an und orten der Schule die Themen Elementargeometrie und Analytische Geometrie zu; im Gegensatz dazu spielen an den Universitäten die Gebiete Algebraische Geometrie und Differentialgeometrie eine deutlich größere Rolle.

Auf der *Ebene der Ziele* besteht die Kluft darin, dass selbst identische Inhalte mit „im jeweiligen Kontext sehr berechtigten“, jedoch komplett unterschiedlichen Zielen behandelt werden. Als dritter Punkt, wird die *Argumentationsebene* benannt. Hier stehen dem axiomatisch-deduktiven Aufbau der Hochschulmathematik eine Vielzahl von unterschiedlichen, in der Schule parallel verwendeten, Exaktheitsstufen entgegen. (vgl. ebd.)

Die Autoren leiten hieraus, als mögliche Folge für die Ausbildung, eine Sicht auf Fachmathematik und Fachdidaktik als „scharf getrennte Studienanteile“ mit unterschiedlichen Zielsetzungen ab (vgl Bauer & Partheil, 2009, S. 87 f.). Auch Hefendehl-Hebeker (2013, S. 4 f.) stellt Ähnliches fest.

Als eine Möglichkeit, den Diskontinuitäten auf den verschiedenen Ebenen entgegen wirken zu können, beschreiben Bauer und Partheil die Konzeption von Schnittstellenmodulen in denen fachdidaktische und fachwissenschaftliche Inhalte gleichzeitig behandelt werden und präzisieren dies am Beispiel einer Analysis I - Veranstaltung. Ein Teil dieser Veranstaltung sind spezielle Schnittstellenaufgaben für Studierende des gymnasialen Lehramts. (vgl Bauer & Partheil, 2009, S. 88 ff.)

2.2.2 Schnittstellenaufgaben nach Bauer

Bauer (2013, S.40) stellt fest, dass „sich die gewünschten Bezüge [zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik] bei der Mehrzahl der Studierenden nicht automatisch einstellen.“ Es sei notwendig „sie durch gezielte *Schnittstellenaktivitäten* herzustellen“ (ebd.).[2] Ein wesentlicher Aspekt dieser sind sogenannte Schnittstellenaufgaben. Diese seien zwar nicht die einzige Möglichkeit, ließen sich aber gut mit den „'Bordmitteln' eines üblichen Mathematikfachbereiches [...] realisieren.“ (ebd.) In Bauer (2013) werden zur Erstellung solcher Aufgaben notwendige Überlegungen theoretischer Art vorgestellt.

Schnittstellenaufgaben können auf der einen Seite schulmathematisches Wissen als Ausgangspunkt nehmen, um einen Zugang zu fachmathematischen Inhalten zu bekommen. Auf der anderen Seite kann aber auch die universitäre Mathematik dazu dienen, schulmathematische Themen, die ein Lehramtsstudierender später unterrichten wird, fachmathematisch zu untermauern. Somit kann das tiefe Verständnis, das für eine didaktische Reduktion eines Themas notwendig ist, erworben werden. Bauer definiert hieraus zwei *Wirkrichtungen* von Schnittstellenaufgaben. Diese Wirkrichtungen spiegeln genau die von Klein definierten zwei Diskontinuitäten (S. 10) wieder.

1. Wirkrichtung: Schulmathematik $\Rightarrow$ universitäte Mathematik

2. Wirkrichtung: universitäre Mathematik $\Rightarrow$ Schulmathematik

[2] Auch die EmDA-Veranstaltung selbst ist schon eine Schnittstelle zwischen Schule und Hochschule.

Ziel soll es sein, dass Schulmathematik und Hochschulmathematik als „*füreinander nützlich* und *aufeinander bezogen* erlebt werden“ (Bauer (2013, S.41, Hervorhebung T.B.).

Um die Bezüge zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik einordnen und konkretisieren zu können, werden ferner vier *Kategorien* für Schnittstellenaufgaben eingeführt, die jedoch keineswegs disjunkt sind. (vgl. Bauer, 2013, S.41)

(A) Grundvorstellungen aufbauen und festigen

(B) Unterschiedliche Zugänge verstehen und analysieren

(C) Mit hochschulmathematischen Werkzeugen Fragestellungen der Schulmathematik vertieft verstehen

(D) Mathematische Arbeitsweisen üben und reflektieren

Diese einzelnen Kategorien werden nun näher spezifiziert.

Zu (A): Grundvorstellungen aufbauen und festigen Auf der Basis der „lerntheoretischen Grunderkenntnis“, dass Lernen ein „*kumulativer* und *irreversibler* Prozess“ (Bauer, 2013, S.42, Hervorhebung T.B.) ist, stellt Bauer fest, dass es nicht möglich ist, in der Schule aufgebaute Grundvorstellungen zu mathematischen Themen einfach zu „löschen“. Es ist somit notwendig an vorhandene Vorstellungen anzuknüpfen, sofern diese vorhanden sind. Da viele Dinge in der Schule – für die universitäre Mathematik – zu ungenau behandelt werden, müssen die Grundvorstellungen dann erweitert werden.

Manche Themen der Hochschulmathematik oder Sichtweisen auf bereits bekannte Themen sind neu und die notwendigen Grundvorstellungen müssen erst aufgebaut werden. Hierbei können Erfahrungen aus der Schulmathematik oft nützlich sein. (vgl. Bauer, 2013, S. 41 f.)

Zu (B): Unterschiedliche Zugänge verstehen und analysieren In Schul- und Hochschulmathematik werden oftmals für ein und dasselbe Thema untschiedliche Zugänge (im Sinne der sachlogischen Vorgehensweise und nicht der Unterrichtsmethodik) gewählt. Dies kann verschiedene Gründe, wie z. B. den unterschiedlichen Grad der Exaktheit, die gewünschte Grundvorstellung, die aufgebaut werden soll, oder die Verfügbarkeit mathematischer Mittel, die für einen bestimmten Zugang notwendig sind, haben.

In Schnittstellenaufgaben können verschiedene Zugänge zu einem Thema analysiert und miteinander verglichen werden. Hierbei kann unter anderem auf das Potential von Zugängen im Hinblick auf weiterführende Betrachtungen oder die notwendigen mathematischen Vorkenntnisse eingegangen werden. (vgl. Bauer, 2013, S. 42 ff.)

Zu (C): Mit hochschulmathematischen Werkzeugen Fragestellungen der Schulmathematik vertieft verstehen Diese Kategorie zielt auf eine „inhaltsbezogene Nützlichkeit“ der Hochschulmathematik für die Schulmathematik ab. Eine Schnittstellenaufgabe kann dazu dienen, Fragestellungen, die SuS[3] verstehen oder auch selber formulieren könnten, mit den Mitteln der Fachmathematik zu beantworten, um somit den angehenden Lehrkräften die Nützlichkeit dieser aufzuzeigen. Besonders interessant sind dabei Fragestellungen, die mit Mitteln der Schulmathematik nur sehr kompliziert, oder gar nicht beantwortbar sind. (vgl. Bauer, 2013, S.44 f.)

[3] Schülerinnen und Schüler

Zu (D): Mathematische Arbeitsweisen üben und reflektieren. Eine große Schwierigkeit für Studienanfänger ist der Umgang mit mathematischen Definitionen und Beweisen. Ziel sollte es auch im Lehramtsstudium sein, dass die Studierenden sich am Ende ihres Studiums als Teil der mathematischen Gemeinschaft sehen und sich typisch mathematische Arbeitsweisen angeeignet haben. Diese können dann in gewissen Situationen auch an die SuS weitergegeben werden. Bauer verdeutlicht dies anhand des Unterschiedes, ob eine Lehrkraft von „die Mathematiker" oder aber "wir in der Mathematik" spricht.

In der späteren Berufspraxis ist es für einen Lehrer notwendig, eine angemessene „Begründungsbasis" für die jeweiligen Jahrgangsstufen zu finden, auf der dann stichhaltig argumentiert werden kann. Schnittstellenaufgaben können dazu beitragen, dass die Studierenden eine rigorose fachmathematische Begründung für ein schulmathematisches Thema sehen und begreifen. Dies ist erforderlich, um sinnvoll didaktisch reduzieren zu können. Außerdem können mit Hilfe von Schnittstellenaufgaben mathematische Arbeitsweisen auf bereits aus der Schule bekannte Themen angewandt werden. (vgl. Bauer, 2013, S.45 f.)

In seinem Buch *Analysis – Arbeitsbuch* (Bauer, 2012) stellt Bauer verschiedene Schnittstellenaufgaben aus dem Bereich der Analyis vor, die nach dem obigen Konzept entwickelt wurden. Dabei wird zu Beginn jeder Aufgabe definiert, was zum Bearbeiten der Aufgaben bekannt sein sollte, und was durch die entsprechende Aufgabe gelernt werden kann. Nach einem kommentierten Lösungsvorschlag finden sich zum Ende einer Aufgabe immer Vorschläge für Anknüpfungspunkte an diese. (vgl. Bauer, 2012, S. 4 f.)

Abschließend soll an dieser Stelle aufgeführt werden, welche Vorteile Bauer in solchen Schnittstellenaufgaben sieht, wie sie sich positiv auf die Lehrerausbildung auswirken können und welche Erfahrungen bereits gemacht wurden.

Die vermuteten positiven Wirkungen von Schnittstellenaufgaben für die Studierenden sind:

- Überwindung der „Kluft" zwischen Schul- und Hochschulmathematik (vgl. Bauer (2012, S. v))
- Nutzbarmachung von Bezügen zwischen Schul- und Hochschulmathematik (vgl. (Bauer, 2012, S. vi))
- Unterstützung beim Erwerb der fachmathematischen Inhalte an der Hochschule (vgl. (Bauer, 2012, S. vii))
- Anregung, „Bezüge zur Schulmathematik gezielt zu bearbeiten" (vgl. (Bauer, 2012, S. viii))

Erfahrungen mit Schnittstellenmodulen Bauer und Partheil beschreiben als Erfahrung aus dem Sommersemester 2006, dass das Konzept von Schnittstellenmodulen bei ca. Zweidrittel der Studierenden sehr positiv aufgenommen wurde; „der Rest fühlte sich bei einem Teil der Aufgaben überfordert" (Bauer & Partheil, 2009, S.99). Die Überforderung führen die Autoren zum Teil auf eine „[n]och fehlende fachliche Souveränität", sowie eine „[n]och nicht erfolgte Loslösung von der Schülerrolle" zurück. (ebd.)

Ferner wird festgestellt, dass die langfristigen Wirkungen [4] empirisch schwer untersuchbar seien, subjektiv jedoch ein „deutlich positiver Effekt" zu bemerken ist. (vgl (Bauer & Partheil, 2009, S.100))

[4]Teile der oben aufgeführten vermuteten positiven Wirkungen sind jedoch langfristig.

2.2.3 Schnittstellenaufgaben in der EmDA-Veranstaltung

Das in Abschnitt 2.2.2 vorgestellte Konzept von Schnittstellenaufgaben wurde für die EmDA - Veranstaltung im Wintersemester 2013/2014 übernommen und angepasst. Während Bauer Schnittstellen im Rahmen der Analysis betrachtet, braucht es für die EmDA - Veranstaltungen Schnittstellen zu den dort behandelten Themen. Da die Vorlesungsinhalte bereits definiert waren, mussten hierzu passende Schnittstellenaufgaben entwickelt werden, die Teil der jeweiligen Präsenz- und Heimübungen waren. Das damit verfolgte Ziel war und ist die Herstellung von Bezügen zwischen Schulmathematik und den fachmathematischen Inhalten der Veranstaltung, wie es auch unter anderem von Bauer gefordert wird (s.o.).

Im Unterschied zur Vorgehensweise von Bauer wurden den Studierenden keine kommentierten Lösungen, sondern lediglich Lösungsskizzen zur Verfügung gestellt, die so formuliert waren, dass man sie nachvollziehen konnte, wenn man sich bereits selbst eine Weile intensiv mit einer Aufgabe beschäftigt hat. Dies sollte verhindern, dass Übungsaufgaben nicht bearbeitet, sondern lediglich die Lösungen gelesen werden.

Um im Nachhinein den tatsächlichen Erfolg von Schnittstellenaufgaben bewerten zu können, ist es notwendig, Ziele zu formulieren, die durch Schnittstellenaufgaben erreicht werden sollen. Zusätzlich zu den Zielen von Bauer (S. 13), ist für die EmDA vor allem die folgende These entwickelt worden:

These. Die Studierenden beschäftigen sich eher mit Schnittstellenaufgaben, als mit gleichschwierigen innermathematischen Aufgaben zu einem Thema.

Diese These beruht auf der oftmals von Studierenden formulierten Aussage, dass die Aufgaben in einer Mathematikveranstaltung gar nichts mit der Schule zu tun hätten, und dass sie eher bereit wären, sich mehr damit zu beschäftigen, wenn ein Schulbezug erkennbar wäre. [5] Trifft die These zu und die Studierenden beschäftigen sich somit mehr mit fachmathematischen Inhalten, würde dies offensichtlich eine positve – und auch kurzfristige – Auswirkung auf den Studienerfolg haben.

Vorstellung von Schnittstellenaufgaben

Im folgenden Teil (Abschnitt 2.3) werden nun vier der entwickelten Schnittstellenaufgaben exemplarisch vorgestellt. Danach werden noch – um die Vielfalt der möglichen Schnittstellen zu unterstreichen – weitere Aufgaben genannt, ohne dass diese jedoch genauer untersucht werden sollen. Die Vorstellung einer Schnittstellenaufgabe ist dabei nach dem folgenden Schema gegliedert:

Zu Beginn wird in einem Einleitungsteil der Themenbereich der Aufgabe grob umrissen und eine Zuordnung zu den beiden Wirkrichtungen (siehe S. 11) vorgenommen. Danach wird grau unterlegt die Aufgabe und darauf folgend eine Lösungsvariante präsentiert. Im Abschnitt *Einbettung in die Veranstaltung* werden anhand der für jede Woche definierten Lernziele die Punkte herausgearbeitet, auf die die Aufgabe abzielt. In der Vorstellung selber werden nur diejenigen für die Aufgabe relevanten Lernziele präsentiert. Eine vollständige Übersicht der Lernziele zu den Themenblöcken, aus denen die Aufgaben stammen, findet sich im Angang D.

[5] Der Autor kennt diese Aussagen aus eigenen Erfahrungen als Übungsgruppenleiter.

Um zu verdeutlichen, was genau die Schnittstelle bei einer Aufgabe ist, wird im Abschnitt *Einordnung in gymnasiale Lehrpläne* mit Hilfe der aktuellen Kernlehrpläne von NRW aufgezeigt, wo die Bezüge zur Schulmathematik liegen.

Unter dem Aspekt *Anknüpfungspunkte und Kategorisierung* werden dann die bisherigen Ergebnisse kurz zusammengefasst und aufgabenabhängig weitere interessante Punkte zur Aufgabe dargelegt. Insbesondere werden Anknüpfungspunkte aufgezeigt, wie nach Bearbeitung der jeweiligen Aufgabe fortgefahren werden kann. In diesem Zusammenhang ist zu beachten, dass bei vielen Aufgaben dafür mehrere verschiedene Möglichkeiten bestehen. Abschließend wird die vorliegende Aufgabe dann noch den von Bauer definierten vier Kategorien (siehe S. 11) zugeordnet.

2.3 Ausgearbeitete Schnittstellenaufgaben

2.3.1 Aufgabe 1: Teilbarkeitsregeln

Teilbarkeitsregeln stellen an vielen Stellen ein nützliches Instrumentarium dar. Einige der einfachen Regeln, wie z. B. für die Teilbarkeit durch 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10 werden auch in der Schule besprochen. Auch für Zahlen wie 7, 11, 13 oder 17 lassen sich Teilbarkeitsvorschriften formulieren, die allesamt über eine gewichtete Quersumme funktionieren. Das Finden und Beweisen dieser fußt auf der Restklassenarithmetik und der Darstellung von Zahlen im Zehnersystem.

Die nachfolgende Schnittstellenaufgabe kann vor allem der zweiten Wirkrichtung zugeordnet werden. Sie verknüpft das Wissen um das Konzept von Restklassen und deren Addition und Multiplikation sowie die Darstellung von Zahlen im Zehnersystem mit nichttrivialen Teilbarkeitsregeln. Mit dem in der Aufgabe verwendeten Verfahren, lässt sich jede Schülerfrage der Art „Gibt es auch eine Teilbarkeitsregel für ...?“ beantworten.

Aufgabe 1 *In der Schule ist es an verschiedenen Stellen nützlich (sowohl für die SuS, als auch für den Lehrer) schnell überprüfen zu können, ob eine ganze Zahl n durch eine andere ganze Zahl teilbar ist.*

(i) Nennen Sie Ihnen bekannte Teilbarkeitsregeln für die Teilbarkeit durch 2, 3, 4, 5.

(ii) Formulieren Sie die Regeln aus (i) als „gewichtete Quersummenregel“ um.

(iii) Verwenden Sie I. Hilgert und Hilgert (2012, S. 21, Beispiel 1.5), um eine Teilbarkeitsregel für die Teilbarkeit durch 13 zu entwickeln.

(iv) Überprüfen Sie mit Hilfe von (ii), ob die Zahlen 59527 und 74754 durch 13 teilbar sind.

Lösung.

(i) Eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ ist durch ...

... 2 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer durch 2 teilbar ist.

... 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

... 4 teilbar, wenn ihre letzten zwei Ziffern, als zweistellige Zahl ausgedrückt, durch 4 teilbar sind.

... 5 teilbar, wenn ihre letzte Ziffer durch 5 teilbar ist.

(ii) Eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ ist durch ...

... 2 teilbar, wenn die gewichtete Quersumme, die entsteht, wenn man die Einer mit 1 und alle anderen Stellen mit 0 multipliziert, durch 2 teilbar ist.

... 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

... 4 teilbar, wenn die gewichtete Quersumme, die entsteht, wenn man die Einer mit 1, die Zehner mit 10 und alle anderen Stellen mit 0 multipliziert durch 4 teilbar ist.

... 5 teilbar, wenn die gewichtete Quersumme, die entsteht, wenn man die Einer mit 1 und alle anderen Stellen mit 0 multipliziert, durch 5 teilbar ist.

(iii) Wir überlegen uns zunächst, welche Reste die Zehnerpotenzen bei Division durch 13 haben. Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
1 &\in [1]_{13}\\
10 &\in [10]_{13}\\
100 &\in [100]_{13} = [7\cdot 13+9]_{13} = [9]_{13}\\
1000 &\in [10\cdot 100]_{13} = [10]_{13}\cdot[100]_{13} = [10]_{13}\cdot[9]_{13} = [90]_{13} = [6\cdot 13+12]_{13} = [12]_{13}\\
10000 &\in [10\cdot 1000]_{13} = [10]_{13}\cdot[1000]_{13} = [10]_{13}\cdot[12]_{13} = [120]_{13} = [9\cdot 13+3]_{13} = [3]_{13}\\
100000 &\in [10\cdot 10000]_{13} = [10]_{13}\cdot[10000]_{13} = [10]_{13}\cdot[3]_{13} = [30]_{13} = [2\cdot 13+4]_{13} = [4]_{13}\\
1000000 &\in [10\cdot 100000]_{13} = [10]_{13}\cdot[100000]_{13} = [10]_{13}\cdot[4]_{13} = [40]_{13} = [3\cdot 13+1]_{13} = [1]_{13}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir dann für die Reste

$$1 \equiv_{13} \mathbf{1}, 10 \equiv_{13} \mathbf{10}, 100 \equiv_{13} \mathbf{9}, 1000 \equiv_{13} \mathbf{12}, 10000 \equiv_{13} \mathbf{3}, 100000 \equiv_{13} \mathbf{4}, 1000000 \equiv_{13} \mathbf{1}, \ldots$$

Von da an wiederholen sich die Reste nur noch, da $\left[10^{n+1}\right]_{13} = [10^n]_{13}\cdot[10]_{13}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Insgesamt erhalten wir also die folgende Quersummenregel:

Um die Teilbarkeit einer beliebigen ganzen Zahl durch 13 zu überprüfen, multiplizieren wir die **Einer mit 1**, die **Zehner mit 10**, die **Hunderter mit 9**, die **Tausender mit 12**, die **Zehntausender mit 3**, die **Hundertausender mit 4**, die **1 000 000er mit 1**, die **10 000 000er mit 10**, u. s. w., die Gewichtefolge wiederholt sich nur noch.

Wir summieren die Ergebnisse auf (gewichtete Quersumme). Die Zahl ist durch 13 teilbar, genau dann, wenn die Summe durch 13 teilbar ist.

(iv) Wir zeigen, dass 59527 durch 13 teilbar ist. Dazu bilden wir die gewichtete Quersumme nach der Regel aus (ii) und erhalten

$$5\cdot 3 + 9\cdot 12 + 5\cdot 9 + 2\cdot 10 + 7\cdot 1 = 195.$$

Es gilt $195 = 5\cdot 39 = 5\cdot 3\cdot 13$. Also ist die gewichtete Quersumme durch 13 teilbar und somit auch 59527.

Wir zeigen, dass 74754 nicht durch 13 teilbar ist. Dazu bilden wir wieder die gewichtete Quersumme nach obiger Regel und erhalten

$$7\cdot 3 + 4\cdot 12 + 7\cdot 9 + 5\cdot 10 + 4\cdot 1 = 186.$$

Um zu überprüfen, ob 186 durch 13 teilbar ist, können wir z. B. erneut die gewichtete Quersumme bilden und erhalten dann

$$1\cdot 9 + 8\cdot 10 + 6\cdot 1 = 95.$$

95 ist nicht durch 13 teilbar. Damit haben wir gezeigt, dass 186 und damit auch 74754 nicht durch 13 teilbar sind.

Anmerkung zur Lösung: In (i) sind natürlich auch Formulierungen über gewichtete Quersummen möglich. In (iii) kann auch anderes vorgegangen werden, um die Reste herauszufinden. Die hier vorgestellte Lösung hat jedoch den Vorteil, dass die Zahlen, die man dann tatsächlich durch 13 teilen muss, nicht so groß werden. □

Einbettung in die Veranstaltung

Die vorliegende Aufgabe kommt aus der Präsenzübung zu Themenblock 2 (Teilbarkeitsregeln und Restklassen). Zu diesem Themenblock gehören unter anderem die folgenden Lernziele[6].

[6] In Klammern findet sich hinter jedem Lernziel die Einordnung in die Bloomsche Taxonomie (S. 9)

(LZ1) Teilen mit Rest und schriftliches Dividieren

(b) Die Studierenden können den Algorithmus des schriftlichen Dividierens und die Operation „Teilen mit Rest“ in Beziehung setzen und dementsprechend ableiten, dass der Algorithmus ein wiederholtes Durchführen der Operation „Teilen mit Rest“ ist. (5)

(LZ3) Teilbarkeitsregeln

(a) Die Studierenden können Teilbarkeitsregeln für die Zahlen 2,3,4,5,6,8,9,10 formulieren. (2)

(b) Die Studierenden können erklären, was die gewichtete Quersumme einer ganzen Zahl ist und diese bezüglich einer gegebenen Gewichtung für ein Zahlenbeispiel explizit bilden. (2)+(3)

(c) Die Studierenden können die Argumente aus I. Hilgert und Hilgert (2012, S. 18, Beipiel 1.4), Schritt für Schritt anhand des Textes erklären und das Konzept der gewichteten Quersumme als tragend für das Beispiel herausstellen. (2) + (4)

(e) Die Studierenden können eine Teilbarkeitsregel für die Teilbarkeit durch eine gegebene natürliche Zahl entwerfen. (5)

In Aufgabenteil (i) werden die bekannten Teilbarkeitsregeln aus der Schule reaktiviert. Es wird das Lernziel (LZ3)(a) abgedeckt. In Aufgabenteil (iii) müssen die Studierenden selber eine gewichtete Quersummenregel herleiten. Dazu steht Ihnen ein Beispiel aus dem Lehrtext zur Verfügung. Das Verfahren zum Lösen der Aufgabe funktioniert analog. Man muss es jedoch genau verstanden haben, um die notwendigen Anpassungen vorzunehmen. Dies entspricht den Lernzielen (LZ3)(c) und (e). In Teil (iv) der Aufgabe muss dann die entwickelte Teilbarkeitsregel angewandt werden, wodurch auf das Lernziel (LZ3)(b) eingegangen wird.

Die Aufgabe erfordert an einigen Stellen implizit den sicheren Umgang mit Restklassen und der Arithmetik dieser, sodass auch die anderen Aspekte aus (LZ2) gefördert werden (siehe S. 49).

Einordnung in gymnasiale Lehrpläne

Das Thema Teilbarkeitsregeln wird im G8-Lehrplan explizit in den „Kompetenzerwartungen am Ende der Jahrgangstufe 6“ aufgeführt

> „[Die SuS] bestimmen Teiler und Vielfache natürlicher Zahlen und wenden Teilbarkeitsregeln für 2, 3, 5 und 10 an.“ (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2007, S. 21)

Ein wesentlicher Aspekt bei der Herleitung der Teilbarkeitsregel in der Schnittstellenaufgabe ist die Darstellung von Zahlen im Zehner-Stellenwertsystem. Auch dies wird an selber Stelle im Lehrplan erwähnt

> „[Die SuS] stellen ganze Zahlen auf verschiedene Weise dar (Zahlengerade, **Ziffern-darstellung, Stellenwerttafel**, Wortform)“ (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2007, S. 21) ,(Hervorhebung M.H.)

Teilbarkeitsregeln dienen jedoch nicht nur dem Selbstzweck, sondern können sowohl SuS als auch Lehrerinnen und Lehrern in vielen Situationen nützlich sein. Ein typisches Beispiel ist das Kürzen von Brüchen.

Meistens werden die Teilbarkeitsregeln in der Schule nicht formal bewiesen, sondern nur ein Begründungsversuch über endlich viele Beispiele durchgeführt. Auch werden offensichtlich nur die sehr einfachen Teilbarkeitsregeln behandelt.

Anknüpfungspunkte und Kategorisierung

Im Hinblick auf die explizite Nennung in den Lehrplänen und die Nützlichkeit in verschiedenen Situationen sind Teilbarkeitsregeln in der Schule ein durchaus relevantes Thema. Fachmathematisch gesehen bilden sie eine sehr gute Anwendung für Restklassen.

In der Schule werden lediglich die Teilbarkeitsregeln für 3 und 9 als Quersummenregeln definiert. Dies ist auch völlig ausreichend. Der angehende Lehrer sollte sich jedoch der Tatsache bewusst sein, dass sich alle Teilbarkeitsregeln auf Basis einer gewichteten Quersumme definieren lassen. Dies ist der Hintergrund des Aufgabenteils (ii). In (iii) geht es nicht nur darum, eine Teilbarkeitsregel zu beweisen, sondern den Studierenden wird ein effektiver Algorithmus beigebracht, um für jedwede ganze Zahl eine korrekte Teilbarkeitsregel aufzustellen. So ein Algorithmus ließe sich sogar in Programmcode umsetzen. (siehe E.1)

Wird diese Aufgabe in einer Präsenzübung eingesetzt, bieten sich verschiedene Anknüpfungspunkte zu anderen Aufgaben. Zum einen lässt sich relativ einfach über die Restklassenarithmetik die Gültigkeit von gewichtete-Quersummen-Regeln begründen. Hierzu geht man von der Darstellung einer Zahl im Zehnersystem aus und kann z. B. wie folgt folgern:

> Wir betrachten die Teilbarkeit durch eine Zahl $a \in \mathbb{Z}$. Das bekannte Verfahren zur Entwicklung einer Teilbarkeitsregel gewichtet die 10^ner-Stelle einer ganzen Zahl ($n \in \mathbb{N}_0$) mit dem Rest, den 10^n bei Division durch a ergibt. Aufaddiert erhalten wir eine gewichtete Quersumme. Die Zahl soll dann durch a teilbar sein, wenn die gewichtete Quersumme durch a teilbar ist. Sei
>
> $$b = \operatorname{sign}(b) \sum_{i=0}^{i} a_k 10^i$$
>
> die zu überprüfende Zahl, wobei $k, a_0, \ldots, a_i \in \mathbb{N}_0$ gilt. b ist also durch a teilbar, wenn $\sum_{i=1}^{k} a_k 10^k$ durch a teilbar ist (Das Vorzeichen spielt keine Rolle.). Dies ist äquivalent zu
>
> $$\left[\sum_{i=0}^{k} a_i 10^i\right]_a = [0]_a.$$
>
> Nun erhalten wir unter Verwendung der Restklassenarithmetik
>
> $$\left[\sum_{i=0}^{k} a_i 10^i\right]_a = \sum_{i=1}^{k} \left[a_i 10^i\right]_a = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} [a_i]_a \left[10^i\right]_a}_{(\star)}.$$
>
> Dabei entspricht $(\star)$ aber genau der gewichteten Quersumme. Somit ist die Gültigkeit der Regel bewiesen. $\square$

Bespricht man diesen Beweis mit Studierenden, so bietet sich die Möglichkeit auf die Relevanz der Wohldefiniertheit der Restklassen-Rechenoperationen für das Funktionieren der Quersummenregeln einzugehen.

Wurde bereits der Fundamentalsatz der Zahlentheorie besprochen, so bietet sich die Möglichkeit, die Teilbarkeit einer Zahl durch b auf die Teilbarkeit durch die Teiler von a zurückzuführen. Für $b = 12$ könnte ein Beweis wie folgt aussehen.

> *Zeigen Sie, dass eine Zahl $a \in \mathbb{Z}$ durch 12 teilbar ist, genau dann, wenn a durch 4 und durch 3 teilbar ist.*
>
> **Beweis.** Sei im folgenden $a \in \mathbb{Z}$. Um die Äquivalenz zu zeigen, müssen wir zwei Richtungen zeigen.
>
> „$\Rightarrow$" Sei a durch 12 teilbar. Dann gibt es $k \in \mathbb{Z}$ mit $a = 12k = 3 \cdot 4 \cdot k$. Es ist also sowohl $a = 3 \cdot (4k)$, als auch $a = 4 \cdot (3k)$. Wegen $4k, 3k \in \mathbb{Z}$ ist somit a durch 3 und 4 teilbar.
>
> „$\Leftarrow$" Sei a durch 3 und durch 4 teilbar. Es gibt also $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ mit $3k_1 = a$ und $4k_2 = a = 2 \cdot 2 \cdot k_2$ $(*)$. Mit dem Fundamentalsatz der Arithmetik gibt es eindeutige Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_r$ (für $r \in \mathbb{N}$) mit $p_1 \cdot \ldots \cdot p_r = a$. Da 2 und 3 Primzahlen sind, können wir mit $(*)$ folgern $a = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot p_4 \cdot \ldots \cdot p_r$. Wegen $p_4 \cdot \ldots \cdot p_r \in \mathbb{Z}$ ist dann a durch $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ teilbar.
>
> Aus „$\Rightarrow$" und „$\Leftarrow$" folgt die Äquivalenz. $\square$

Ein allgemeiner Beweis für $b = b_1 \cdot \ldots \cdot b_r$ mit $b \in \mathbb{Z}$ und Primfaktoren $b_1, \ldots, b_r$ funktioniert analog.

Bei der hier vorliegenden Schnittstellenaufgabe werden – gerade wenn man den zuletzt vorgestellten Aspekt ebenfalls bespricht – verschiedene Zugänge zum Thema Teilbarkeitsregeln behandelt. Zum einen die „naiven" Teilbarkeitsregeln, die man in der Schule durch Ausprobieren erhält, dann der systematische Zugang über die gewichteten Quersummenregeln und zuletzt die Rückführung auf die Teilbarkeit durch die einzelnen Primfaktoren unter Verwendung des Fundamentalsatzes der Arithmetik. Damit fällt die Schnittstellenaufgabe in die Kategorie (B).

Desweiteren werden mit der hochschulmathematischen Methode der Restklassenrechnung Teilbarkeitsregeln begründet, die die SuS in der Schule lernen ohne jedoch einen Beweis dafür zu sehen. Dabei lernen die Studierenden eine typische mathematische Arbeitsweise kennen: Durch Ausprobieren wurden Vermutungen über Teilbarkeitsregeln aufgestellt. Diese Regeln konnten mit Hilfe der Restklassen in ein mathematisches Modell übertragen und in diesem bewiesen werden. Dabei ergibt sich ein allgemeines Vorgehen, um jede beliebige Teilbarkeitsregel zu entdecken und somit eine allgemeine Theorie. Diese Aspekte rechtfertigen eine Einordnung in die Kategorien (C) und (D).

2.3.2 Aufgabe 2: Restklassen modulo 2 und die Parität ganzer Zahlen

Ein zentrales und einfaches Konzept auf den ganzen Zahlen ist die Einteilung in gerade und ungerade. Diese Unterscheidung wird schon in der Grundschule für die natürlichen Zahlen vorgenommen. Fachmathematisch gesehen kann man dieses Prinzip in Verbindung mit den Restklassen modulo 2 bringen. Diese stellen das einfachste, nichttriviale Beispiel für Restklassen dar.

Die im Folgenden vorgestellte Schnittstellenaufgabe kann beiden Wirkrichtungen zugeordnet werden. Aufgabenteil (i) verwendet das aus der Schule bekannte Konzept der Parität als Einstieg in eine Aufgabe über Restklassen. Aufgabenteil (iii) benutzt die Hochschulmathematik, um Eigenschaften gerader und ungerader Zahlen, die auch in der Schule besprochen werden, theoretisch zu untermauern.

Aufgabe 2 *Schon in der Grundschule wird das Konzept der geraden und ungeraden Zahlen eingeführt. Die Eigenschaft, ob eine ganze Zahl gerade oder ungerade ist, nennt man die Parität dieser Zahl. Aus der Schule kennen Sie diese Eigenschaft vor allem für die natürlichen Zahlen. Sie lässt sich aber ohne Probleme auch auf den ganzen Zahlen definieren.*

(i) Schreiben Sie die Menge der geraden ganzen Zahlen $\mathcal{G} \subset \mathbb{Z}$ und die Menge der ungeraden ganzen Zahlen $\mathcal{U} \subset \mathbb{Z}$ als Restklassen auf.

(ii) Formulieren Sie symbolisch die folgenden Aussagen. Verwenden Sie dabei die in (i) definierten Mengen $\mathcal{G}$ und $\mathcal{U}$.

(a) Die Summe zweier gerader Zahlen ist immer eine gerade Zahl.

(b) Addiert man eine gerade und eine ungerade Zahl, so erhält man eine ungerade Zahl.

(c) Das Produkt zweier ungerader Zahlen ist ungerade.

(d) Multipliziert man eine gerade mit einer beliebigen anderen (ganzen) Zahl, so ist das Produkt gerade.

(iii) Beweisen Sie die Aussagen aus (ii). Verwenden Sie hierzu die Regeln für die Addition und Multiplikation von Restklassen aus I. Hilgert und Hilgert (2012, S.18, Beispiel 1.4).

Lösung.

(i) Nach Definition ist eine Zahl gerade, wenn sie durch zwei teilbar ist, also bei Division durch zwei den Rest Null ergibt. Entsprechend ist n ungerade, wenn n nicht durch 2 teilbar ist, also die ganzzahlige Division n durch 2 den Rest 1 ergibt. Somit ist n gerade, wenn es $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $n = 2k + 0$ und ungerade, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $n = 2k + 1$. Sei nun $\mathbb{Z}_2$ die Menge aller Restklassen modulo 2. Dann folgt sofort $\mathcal{G} = [0]_2 \in \mathbb{Z}_2$ und $\mathcal{U} = [1]_2 \in \mathbb{Z}_2$.

(ii) Seien im Folgenden $a, b \in \mathcal{G}, c, d \in \mathcal{U}$ und $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

(a) $a + b \in \mathcal{G}$

(b) $a + c \in \mathcal{U}$

(c) $cd \in \mathcal{U}$

(d) $an \in \mathcal{G}$

(iii) Seien die Variablen wie in (ii) definiert. Dann folgt mit (i) schon $[a]_2 = [b]_2 = [0]_2$ und $[c]_2 = [d]_2 = [1]_2$. Mit $(*)$ ist die Anwendung der Regeln für die Addition und Multiplikation von Restklassen aus I. Hilgert und Hilgert (2012, S.18, Beispiel 1.4) gemeint.

(a) Es gilt $a + b \in [a + b]_2 \overset{(*)}{=} [a]_2 + [b]_2 = [0]_2 + [0]_2 \overset{(*)}{=} [0 + 0]_2 = [0]_2 = \mathcal{G}$. Also $a + b \in \mathcal{G}$.

(b) Es gilt $a + c \in [a + c]_2 \overset{(*)}{=} [a]_2 + [c]_2 = [0]_2 + [1]_2 \overset{(*)}{=} [0 + 1]_2 = [1]_2 = \mathcal{U}$. Also $a + c \in \mathcal{U}$.

(c) Es gilt $cd \in [cd]_2 \overset{(*)}{=} [c]_2 \cdot [d]_2 = [1]_2 \cdot [1]_2 \overset{(*)}{=} [1 \cdot 1]_2 = [1]_2 = \mathcal{U}$. Also $cd \in \mathcal{U}$.

(d) Es gilt $an \in [an]_2 \overset{(*)}{=} [a]_2 \cdot [n]_2 = [0]_2 \cdot [n]_2 \overset{(*)}{=} [0 \cdot n]_2 = [0]_2 = \mathcal{G}$. Also $cd \in \mathcal{G}$.

Anmerkung zur Lösung: Werden in Aufgabenteil (i) andere Repräsentanten wie z. B. 2 und 3 gewählt, ist dies unproblematisch, die weiteren Argumentationen funktionieren analog. □

Einbettung in die Veranstaltung

Die vorliegende Aufgabe kommt aus der Präsenzübung zu Themenblock 2 (Teilbarkeitsregeln und Restklassen). Zu diesem Themenblock gehören unter anderem die folgenden Lernziele

(LZ2) Restklassen

- (a) Die Studierenden können die Restklassen bezüglich einer vorgegebenen natürlichen Zahl sowohl als Menge in aufzählender Schreibweise (Repräsentanten) als auch als Menge mit einer definierenden Eigenschaft angeben. Desweiteren können die Studierenden die Restklasse $[k]$ für ein beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ angeben. (1)
- (c) Die Studierenden können die Rolle der Repräsentanten in Bezug auf die Beschreibung von Restklassen erklären. (2)
- (e) Die Studierenden können für eine vorgebenene ganze Zahl eine Additions- und Multiplikationstabelle erstellen. (3)

(LZ3) Restklassen und Teilbarkeit

- (a) Die S. können erklären, wieso das Konzept der Restklasse erlaubt, die Teilbarkeit (durch eine feste Zahl n) einer Zahl mit der Teilbarkeit (durch n) der Ziffern in der Dezimaldarstellung in Zusammenhang zu setzen. (2)
- (b) Die S. können Restklassen korrekt zur Beschreibung von Teilbarkeitseigenschaften verwenden. (3)

In Teilaufgabe (i) wird ein Bezug zwischen den Themenbereichen Restklassen und Teilbarkeit hergestellt. Somit wird an dieser Stelle (LZ3) abgedeckt. Da es zur Aufgabenlösung erforderlich ist, z. B. 0 und 1 als Repräsentanten für die beiden Restklassen zu wählen, werden ebenfalls die Lernziele (LZ2) (a) und (c) abgedeckt.

Aufgabenteil (ii) verlangt dann, umgangssprachliche Aussagen über gerade und ungerade Zahlen als präzise mengentheoretische Aussagen zu formulieren. Damit wird auch an Lernziele aus Themenblock 1 (siehe S. 49) angeknüpft.

In (iii) gilt es dann, diese Aussagen zu beweisen. Solche Beweise fußen auf der in (i) festgelegten Struktur der Restklassen und erfordern ein tieferes Verständnis darüber, was es genau bedeutet, die

Menge der geraden und ungeraden Zahlen als Restklassen zu betrachten. Hierbei wird die repräsentantenweise Addition und Multiplikation von Restklassen verwendet, sodass auch (LZ2) (e) zum tragen kommt.

Einordnung in gymnasiale Lehrpläne

Das Konzept, die ganzen Zahlen in gerade und ungerade aufzuteilen, spielt an verschiedenen Stellen während der gesamten Schullaufbahn eine Rolle. Schon in der Grundschule lässt sich diese Vorstellung sinnvoll an verschiedene Kompetenzen im Bereich *Zahlen und Operationen* anknüpfen. So wird z. B. im Kernlehrplan NRW bei den „Kompetenzerwartungen am Ende der Klasse 4“ gefordert

> „[Die SuS] orientieren sich im Zahlenraum bis 1 000 000 durch Zählen in Schritten sowie durch Ordnen und **Vergleichen von Zahlen nach vielfältigen Merkmalen**.“ (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2008, S. 61), (Hervorhebung M.H.)

Als ein solches Merkmal kann die Parität gesehen werden. Auch in den Kompetenzerwartungen für den Abschluss der Jahrgangsstufe 6 findet sich im Bereich *Arithmetik / Algebra* die Kompetenz

> „[Die SuS] wenden ihre **arithmetischen Kenntnisse von Zahlen** und Größen an, nutzen **Strategien für Rechenvorteile**, Techniken des Überschlagens und die Probe als Rechenkontrolle.“ (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2007, S. 21),(Hervorhebung M.H.)

Unter solche „arithmetischen Kenntnisse“ und „Strategien“ fallen auch genau die Abschlusseigenschaften gerader und ungerader Zahlen, die in der obigen Aufgabe verwendet werden. Jeder der SuS hat diese Regeln irgendwann in seiner Schullaufbahn einmal gesehen. Selten jedoch werden Sie explizit bewiesen, eine Begründung findet meist nur in Form einer endlichen Anzahl von Beispielen statt.

Man sollte an dieser Stelle noch erwähnen, dass die Einführung der Parität natürlicher und ganzer Zahlen keinem Selbstzweck dient, sondern über die gesamte Schulzeit verteilt an verschiedenen Stellen immer wieder eine Rolle spielt. Für den Abschluss der Sekundarstufe I stellt der Kernlehrplan NRW z. B. die Anforderung:

> „Sie [Die SuS] rechnen mit natürlichen, ganzen, rationalen und reellen Zahlen, nutzen Rechengesetze und systematisches Zählen.“ (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2007, S. 15)

Darunter fällt unter anderem auch das Wissen über das Vorzeichen gerader und ungerader Potenzen ganzer, rationaler und reeller Zahlen. Auch die Definiertheit der n-ten Wurzel einer negativen Zahl hängt von der Parität von n ab. Und auch in der gymnasialen Oberstufe wird dem Konzept von gerade und ungerade implizite Bedeutung beigemessen. Im neuen Kernlehrplan NRW werden für den Abschluss der Einführungsphase unter anderem folgende Kompetenzen definiert:

> „[Die SuS] beschreiben die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten sowie von quadratischen und kubischen Wurzelfunktionen“ (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2013, S. 23)

> „[Die SuS] verwenden am Graphen oder Term einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente beim Lösen von inner- und außermathematischen Problemen.“ (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2013, S. 24)

Sowohl Aussagen im Hinblick auf das Verhalten einer Funktion im Unendlichen, als auch zu einfachen Symmetrien lassen sich oftmals über die Parität begründen. Die zuletzt genannte Kompetenz zeigt auf, dass diese Eigenschaften in verschiedenen Aufgabentypen eine Rolle spielen können. Desweiteren fußen z. B. auch Beweise über Definitionsbereiche von Wurzelfunktionen auf einem Paritätsargument.

Anknüpfungspunkte und Kategorisierung

In Anbetracht der oben beschriebenen Rolle der Parität in der Schule ist es sinnvoll, dieses Konzept als Schnittstelle fachmathematisch zu untermauern. Im Allgemeinen fußt die obige Schnittstellenaufgabe auf der Betrachtung von geraden und ungeraden Zahlen als Restklassen modulo 2. Hierbei wird der Bezug zur Teilbarkeit mit Rest [7] verwendet.

Im Speziellen geht es um die bereits beschriebenen Abschlusseigenschaften. Diese werden - wie oben bereits beschrieben - in der Schule in der Regel nicht formal bewiesen. Die hier vorgestellte Aufgabe rechtfertigt sich somit unter anderem dadurch, dass die angehenden Lehrerinnen und Lehrer sich an dieser Stelle einmal explizit mit den Beweisen beschäftigen.

Würde man keinen Hinweis auf den Bezug zu den Restklassen geben, würden vermutlich Beweise entstehen, die auf der Darstellung von geraden und ungeraden Zahlen als $2k$ bzw. $2k+1$ für ein ganzes k fußen. So könnte ein Beweis für (ii)(c) z. B. wie folgt funktionieren:

> Seien m, n ungerade. Dann gibt es $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $n = 2k+1, m = 2l+1$. Damit gilt $nm = (2k+1)(2l+1) = 4kl+2k+2l+1 = 2(2kl+k+l)+1$. Wegen $k' = 2kl+k+l \in \mathbb{Z}$ ist $nm = 2k'+1$ ungerade. (Bew1) $\square$

Das Vorgehen über Restklassen ist an dieser Stelle für Erstsemester weniger intuitiv, jedoch typisch für die Arbeitsweise von Mathematikern: Es wird zunächst eine möglichst allgemeine und mächtige Theorie entwickelt und bewiesen (Restklassen, wohldefinierte Addition und Multiplikation auf Restklassen), die dann für die elegante Lösung einer Vielzahl von Problemklassen verwendet werden kann. Im Gegensatz dazu lässt sich mit dem Verfahren aus (Bew1) nur eine viel geringere Anzahl an Problemen einfach betrachten.

Deutlicher wird dies durch die Aussage: *Sei n^2 ungerade für $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist auch n ungerade.* Ein im obigen Sinne „intuitiver“ Beweis könnte sein:

> Wäre n gerade, gäbe es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $n = 2k$. Dann wäre aber
>
> $$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2).$$
>
> Wegen $2k^2 \in \mathbb{Z}$ wäre dann n^2 gerade, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also muss n ungerade sein. (Bew2) $\square$

[7] Das Thema *Teilen mit Rest* taucht schon im Grundschullehrplan (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2008, S. 62) auf. Auf Teiler und Teilbarkeitsregeln wird im G8-Lehrplan von NRW im Rahmen der Kompetenzerwartungen zum Ende der 6. Klasse eingegangen (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2007, S. 21).

Dieser Beweis ist argumentatorisch schon komplizierter und funktioniert nur über einen Widerspruch oder alternativ über die Ausnutzung der Kontraposition. Betrachten wir indessen die geraden und ungeraden Zahlen als Restklassen modulo 2, so folgt die Aussage direkt aus der Multiplikationstabelle. Hier werden die Stärken des Zuganges schon deutlicher.

In einer Präsenzübung könnte man gut an einem Beispiel die beiden Zugänge gegenüberstellen und mit Hilfe der zuletzt betrachteten Aussage über Vor- und Nachteile diskutieren. [8]

Fachmathematisch gesehen fußt die Aufgabe auf der wichtigen Eigenschaft der Wohldefiniertheit von Addition und Multiplikation von Restkassen. Im Rahmen dessen kann man in einer Übung z. B. gut darüber diskutieren, was es für die Aufgabe bedeuten würde, wenn diese Wohldefiniertheit nicht gegeben wäre. In diesem Falle wäre es nicht möglich, die allgemeinen Beweise in Aufgabenteil (iii) über die Repräsentanten 0 und 1 zu führen. Eine solche Diskussion kann an dieser Stelle dabei helfen, den Studierenden die Nützlichkeit sowohl der Modellierung der geraden und ungeraden Zahlen als Restkassen als auch der Wohldefiniertheitseigenschaft vor Augen zu führen.

In der vorliegenden Schnittstellenaufgabe wird die Grundvorstellung der geraden und ungeraden Zahlen als Restklassen modulo 2 aufgebaut und durch die Beweise in (iii) gefestigt. Die in (iii) bewiesenen Abschlusseigenschaften werden auch in der Schule, zwar nicht unbedingt mit Beweis, aber doch vom Phänomen her besprochen. Das hochschulmathematische Konzept der Restklasse dient nun als Werkzeug dafür, die entsprechenden Beweise zu führen. Außerdem wird die typische mathematische Arbeitsweise geübt, neue mathematische Strukturen zu verwenden um bekannte Probleme zu bearbeiten. Somit deckt die Aufgabe die Kategorien (A), (C) und (D) ab.

Wenn man zusätzlich andere Beweise thematisiert, die auf der Darstellung der ungeraden Zahlen als $2n+1$ und der geraden Zahlen als $2n$ fußen, so besteht die Möglichkeit, die unterschiedlichen Zugänge zu vergleichen, sodass man die Aufgabe auch als eine Schnittstelle der Kategorie (B) sehen kann.

[8] Letztendlich steckt hinter beiden Zugängen natürlich dieselbe Mathematik. Schließlich ist z. B. $[2k+1]_2 = [2k]_2 + [1]_2 = [0]_2 + [1]_2 = [1]_2$ für $k \in \mathbb{Z}$ und somit auch

$$[(2k+1)(2l+1)]_2 = [1]_2 \cdot [1]_2 = [1]_2 = [2(2kl+k+l)+1]_2, \quad k,l \in \mathbb{Z}.$$

2.3.3 Aufgabe 3: Formalisierung der Dreieckskongruenz

An sehr vielen Stellen in der Mathematik und auch in der Mathematiklehrerausbildung wird das Konzept von Äquivalenzrelationen benötigt. Auch in der Schulmathematik finden sich an verschiedenen Stellen – nicht explizit benannte – Relationen. Hierbei handelt es sich nicht bei allen auch um Äquivalenzrelationen.

Die Dreieckskongruenz ist ein wichtiges und anschauliches Beispiel für Äquivalenzrelationen. Um damit fachmathematisch Arbeiten zu können ist es jedoch erforderlich, sowohl Dreiecke, wie auch Kongruenzsätze exakt zu formulieren.

Die in diesem Kapitel vorgestellte Schnittstellenaufgabe lässt sich vor allen Dingen der ersten Wirkrichtung (Schulmathematik → Hochschulmathematik) zuordnen. Es geht darum, das aus der Schule bekannte Konzept der Kongruenz von Dreiecken zu formalisieren und somit ein Beispiel für Äquivalenzrelationen zu untersuchen.

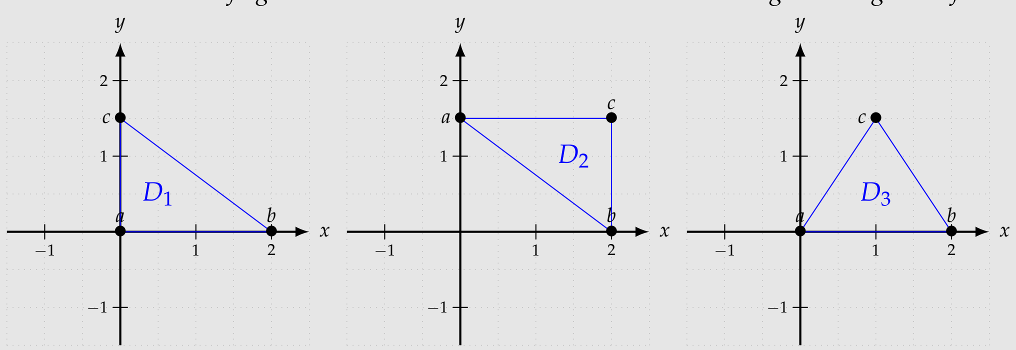
Dass ungenaue Formulierungen Tücken mit sich bringen, zeigt der letzte Teil der Aufgabe, in dem eine solche untersucht wird.

Teile der Aufgabe decken auch die zweite Wirkrichtung (Hochschulmathematik → Schulmathematik) ab, da es eine wichtige Fähigkeit ist, eine Schüleraussage zu formalisieren und dann mit den Mitteln der Mathematik zu untersuchen.

Aufgabe 3 *In der Schule wird die Kongruenz von Dreiecken eingeführt. Sie wird mit '"Deckungsgleichheit" identifiziert. Im Schulbuch Brandt et al. (2007, S. 151) finden wir als Definition „Wenn man die Dreiecke ausschneiden würde, so könnte man sie so übereinander legen, dass sie sich vollständig zur Deckung bringen lassen."*
Um die Kongruenz formal-korrekt fassen zu können, brauchen wir eine exakte Definition eines Dreiecks. Wir bezeichnen mit $\mathcal{D}$ die Menge aller Dreiecke. Ein Dreieck $D \in \mathcal{D}$ ist definiert durch das Tupel $D = (\mathcal{E}, l)$. Dabei ist $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$ die dreielementige Menge der Ecken und $l : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R}_{>0}$ eine Abbildung, die je zwei Ecken die Länge der dazwischenliegenden Dreiecksseite zuordnet. Sie können ohne Beweis verwenden, dass $l(e_1, e_2) = l(e_2, e_1)$ und $l(e_1, e_1) = 0$ gelten.

Beispiel. *Das Dreieck $D^* = (\mathcal{E}^*, l^*) \in \mathcal{D}$ mit $\mathcal{E}^* = \{a = (0,0), b = (3,0), c = (3,4)\}$ und $l^*(a,b) = 3, l^*(b,c) = 4, l^*(a,c) = 5$ ist ein Dreieck mit den Ecken $a = (0,0), b = (3,0), c = (3,4)$, und den Seitenlängen 3, 4 und 5.*

(i) Beschreiben Sie die folgenden skizzierten Dreiecke unter Verwendung der obigen Definition.



Aufgabe 3 (Fortsetzung)

Um zwei Dreiecke auf Kongruenz überprüfen zu können, wird in der Schule unter anderem der Kongruenzsatz (SSS) verwendet, der besagt, dass ein Dreieck zu einem anderen kongruent ist, wenn die beiden Dreiecke in drei Seiten übereinstimmen (siehe Brandt et al. (2007, S. 151)). Mathematisch exakter können wir (SSS) wie folgt formulieren.

Ein Dreieck $D = (\mathcal{E}, l) \in \mathcal{D}$ ist genau dann kongruent zu einem Dreieck $D' = (\mathcal{E}', l') \in \mathcal{D}$, wenn es eine bijektive Abbildung $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ gibt, sodass für alle $e_1, e_2 \in \mathcal{E}$ gilt $l(e_1, e_2) = l'(f(e_1), f(e_2))$.

(ii) *Zeigen Sie mit Hilfe von (SSS), dass das obige Dreick D_1 kongruent zu D_2, aber nicht kongruent zu D_3 ist.*

(iii) *Überprüfen Sie für die so definierte Dreickskongruenz, welche der Eigenschaften Reflexivität, Symmetrie, Transitivität erfüllt sind. Handelt es sich um eine Äquivalenzrelation?*

(iv) *Der Schüler Peter schlägt die folgende Formulierung für den (SSS)-Satz vor.*

> *Ein Dreieck $D_1 \in \mathcal{D}$ ist genau dann kongruent zu einem Dreieck $D_2 \in \mathcal{D}$, wenn es zu jeder Seite mit Länge l von D_1 eine Seite von D_2 gibt, die auch die Länge l hat.*

Überprüfen Sie für die so definierte „Peter-Kongruenz" von Dreiecken, ob es sich ebenfalls um eine Äquivalenzrelation handelt.

Nehmen Sie begründet Stellung zur Tauglichkeit dieser Formulierung.

Lösung.

(i) $D_1 = (\mathcal{E}_1, l_1)$ mit $\mathcal{E}_1 = \{a = (0,0), b = (2,0), c = (0,1.5)\}$ und $l_1(a,b) = 2, l_1(b,c) = 2.5, l_1(a,c) = 1.5$.
$D_2 = (\mathcal{E}_2, l_2)$ mit $\mathcal{E}_2 = \{a = (0,1.5), b = (2,0), c = (2,1.5)\}$ und $l_2(a,b) = 2.5, l_2(b,c) = 1.5, l_2(a,c) = 2$.
$D_3 = (\mathcal{E}_3, l_3)$ mit $\mathcal{E}_3 = \{a = (0,0), b = (2,0), c = (1,1.5)\}$ und $l_3(a,b) = 2, l_3(b,c) = l_3(a,c) \approx 1.80$.

(ii) Wir betrachten die Abbildung

$$f_{1,2} : \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2, \quad \begin{cases} (0,0) \mapsto (2,1.5) \\ (2,0) \mapsto (0,1.5) \\ (0,1.5) \mapsto (2,0) \end{cases} .$$

$f_{1,2}$ ist bijektiv und es gilt offensichtlich $l_1(e_1, e_2) = l_2(f_{1,2}(e_1), f_{1,2}(e_2))$ für alle $e_1, e_2 \in \mathcal{E}_1$.
Damit ist wegen (SSS) gezeigt, dass D_1 kongruent zu D_2 ist.
Es sind $(2,0), (0,1.5) \in \mathcal{S}_1$ mit $l_1((2,0),(0,1.5)) = 2.5$. Da für alle $e_1, e_2 \in \mathcal{E}_3$ gilt $l_3(e_1, e_2) \neq 2.5$, kann es die in (SSS) geforderte Abbildung nicht geben. D_1 ist also nicht kongruent zu D_3.

(iii) Seien im Folgenden $D_a = (\mathcal{E}_a, l_a), D_b = (\mathcal{E}_b, l_b)$ und $D_c = (\mathcal{E}_c, l_c) \in \mathcal{D}$ Dreiecke.

Reflexivität. Wir betrachten die Identität $id_{\mathcal{E}_a} : \mathcal{E}_a \to \mathcal{E}_a$ auf $\mathcal{E}_a$. Diese Abbildung ist offensichtlich bijektiv und für alle $e_1, e_2 \in \mathcal{E}_a$ gilt $l_a(id_{\mathcal{E}_a}(e_1), id_{\mathcal{E}_a}(e_2)) = l_a(e_1, e_2)$. Somit ist mit (SSS) gezeigt, dass D_a kongruent zu sich selbst ist. Also ist die Relation reflexiv.

Symmetrie. Es gelte, dass D_a kongruent zu D_b ist. Es gibt also eine bijektive Abbildung $f_{ab} : \mathcal{E}_a \to \mathcal{E}_b$, sodass für alle $e_1, e_2 \in \mathcal{E}_a$ gilt: $l_a(e_1, e_2) = l_b(f_{ab}(e_1), f_{ab}(e_2))$. Da f_{ab} bijektiv ist, gibt es die ebenfalls bijektive Umkehrabbildung $f_{ba} := f_{ab}^{-1} : \mathcal{E}_b \to \mathcal{E}_a$. Seien $e_1 = f_{ab}(e_1'), e_2 = f_{ab}(e_2') \in \mathcal{E}_b$ mit $e_1', e_2' \in \mathcal{E}_a$. Dann gilt

$$l_a(f_{ba}(e_1), f_{ba}(e_2)) = l_a(e_1', e_2') = l_b(f_{ab}(e_1'), f_{ab}(e_2')) = l_b(e_1, e_2).$$

Somit ist mit (SSS) gezeigt, dass D_b auch kongruent zu D_a ist, woraus die Symmetrie folgt.

Transitivität. Es gelte, dass D_a kongruent zu D_b und D_b kongruent zu D_c ist. Es gibt also bijektive Abbildungen $f_{ab} : \mathcal{E}_a \to \mathcal{E}_b, f_{bc} : \mathcal{E}_b \to \mathcal{E}_c$, sodass für alle $e_1, e_2 \in \mathcal{E}_a$ gilt $l_a(e_1, e_2) = l_b(f_{ab}(e_1), f_{ab}(e_2))$ und für alle $e_1, e_2 \in \mathcal{S}_b$ gilt $l_b(e_1, e_2) = l_c(f_{bc}(e_1), f_{bc}(e_2))$. Wir betrachten $f_{ac} : \mathcal{E}_a \to \mathcal{E}_c$ definiert durch $e \mapsto f_{bc}(f_{ab}(e))$. Die Funktion ist als Verknüpfung bijektiver Funktionen ebenfalls bijektiv. Außerdem gilt für $e_1, e_2 \in \mathcal{S}_a$

$$l_c(f_{ac}(e_1), f_{ac}(e_2)) = l_c(f_{bc}(f_{ab}(e_1)), f_{bc}(f_{ab}(e_2))) = l_b(f_{ab}(e_1), f_{ab}(e_2)) = l_a(e_1, e_2).$$

Damit ist mit (SSS) gezeigt, dass D_a kongruent zu D_c ist, woraus die Transitivität folgt.

Da Reflexivität, Symmetrie und Transitivität erfüllt sind, handelt es sich um eine Äquivalenzrelation.

(iv) Wir betrachten die Dreiecke $D_a = (\mathcal{E}_a, l_a)$ und $D_b = (\mathcal{E}_b, l_b)$ mit $\mathcal{E}_a = \{a_1, a_2, a_3\}, \mathcal{E}_b = \{b_1, b_2, b_3\}$ und $l_a(a_1, a_2) = l_a(a_2, a_3) = l_a(a_2, a_3) = l_b(b_1, b_2) = l_b(b_2, b_3) = 2$ und $l_b(b_1, b_3) = 3$. Offenbar kann jeden $e_1, e_2 \in \mathcal{E}_a$ $b_1, b_2 \in \mathcal{E}_b$ zugeordnet werden mit $l_a(e_1, e_2) = l_b(b_1, b_2)$. Also ist D_a peter-kongruent zu D_b.

Andersherum gibt es aber keine $e_1, e_2 \in \mathcal{S}_a$ mit $l_a(e_1, e_2) = l_b(b_1, b_3)$. Somit ist D_b nicht kongruent zu D_a. Die „Peter-Kongruenz“ von Dreiecken ist also keine Äquivalenzrelation, da sie nicht symmetrisch ist.

Die Formulierung ist untauglich, da sie zwei offensichtlich nicht kongruente Dreiecke (obiges Gegenbeispiel zur Symmetrie) als „peter-kongruent“ bezeichnen würde. Somit ist sie nicht äquivalent zur Kongruenzdefinition.

□

Einbettung in die Veranstaltung

Die hier vorliegende Schnittstellenaufgabe stammt aus den Präsenzübungen zum Themenblock 3 (Mengen, Relationen und Funktionen). Für diesen Themenblock wurden unter anderem die folgenden Lernziele definiert.

(LZ4) Relationen

(c) Die Studierenden können für einfache Relationen herausfinden, ob diese reflexiv, transitiv, oder symmetrisch sind. (3)

(f) Die Studierenden können für einfache Äquivalenzrelationen herausfinden, ob zwei gegebene Elemente bezüglich dieser Relation äquivalent sind oder nicht. (3)

(LZ5) Funktionen/Abbildungen

(e) Die Studierenden können für einfache Funktionen herausfinden, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. (3)

(f) Die Studierenden können für einfache bijektive Funktionen die Umkehrfunktion ermitteln. (3)

Aufgabenteil (ii) verlangt die Relation auf ein Beispiel anzuwenden. Somit ist (LZ4)(f) abgedeckt. In (iii) und (iv) müssen dann die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation nachgewiesen werden, dies entspricht (LZ4)(c). Um den Nachweis der Äquivalenzrelation zu erbringen, müssen in der Aufgabe bijektive Funktionen konstruiert werden. Bei der Symmetrie wird dazu die Umkehrfunktion einer anderen bijektiven Funktion benötigt. Insgesamt wird also auf die Lernziele (LZ5) (e) und (f) eingegangen.

Desweiteren wird implizit das Angeben von Funktionen auf endlichem Definitionsbereich und die Anwendung einer gegebenen, neuen Definition auf Beispiele verlangt. Eine besondere Schwierigkeit dieser Aufgabe ist, dass die Themenbereiche „Äquivalenzrelationen“ und “Eigenschaften von Funktionen“ miteinander kombiniert werden müssen, um die Aufgabe zu lösen.

Einordnung in gymnasiale Lehrpläne

Explizit wird die Dreieckskongruenz im Kernlehrplan NRW in den „Kompetenzerwartungen am Ende der Jahrgangsstufe 8“ erwähnt. Im Bereich der *Geometrie* wird unter „Anwenden“ die folgende Kompetenz definiert.

> „[Die SuS] erfassen und begründen Eigenschaften von Figuren mithilfe von Symmetrie, einfachen Winkelsätzen oder **der Kongruenz.**“ (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2007, S. 27), (Hervorhebung M.H.)

Doch auch an zwei weiteren Stellen spielt die Thematik eine implizite Rolle. Zum Einen findet sich ebenfalls im Bereich *Geometrie* unter dem Aspekt „Konstruieren“ die Formulierung:

> “[Die SuS] zeichnen Dreiecke aus gegebenen Winkel- und Seitenmaßen“ (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2007, S. 27)

Die Durchführbarkeit eben dieser Konstruktionen beruht auf den Kongruenzsätzen für Dreiecke. Diese definieren die minimal nötigen Angaben, um ein Dreieck eindeutig definieren zu können.

Zum Anderen findet sich unter den Kompetenzen im Bereich *Argumentieren/Kommunizieren* die folgende Anforderung.

> “[Die SuS] nutzen mathematisches Wissen für Begründungen, auch in mehrschrittigen Argumenationen.“ (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2007, S. 24)

In diese Kompetenz fällt sowohl die Begründung der Kongruenzsätze, wie auch Argumentationen, die auf den Kongruenzsätzen fußen. Gerade im Bereich der Geometrie lassen sich viele anschauliche Begründungsaufgaben finden.

Anknüpfungspunkte und Kategorisierung

Äquivalenzrelationen spielen an sehr vielen Stellen der Hochschulmathematik eine wichtige Rolle, insbesondere auch in der EmDA-Veranstaltung. Zwei Anwendungsfälle haben dabei eine besondere Bedeutung: Bereits vor der Einführung der Äquivalenzrelationen wurden bereits die Restklassen definiert. Diese sind ein Spezialfall von Äquivalenzrelationen. Der zweite Themenbereich ist die Konstruktion der ganzen, rationalen und reellen Zahlen, durch die die Veranstaltung abgeschlossen wird. Im Rahmen dieser Konstruktion werden Schritt für Schritt die Zahlensysteme erweitert, dabei werden die ganzen Zahlen als Äquivalenzklassen natürlicher Zahlen, die rationalen Zahlen als Äquivalenzklassen von ganzen Zahlen und die reellen Zahlen als Äquivalenzklassen von rationalen Cauchyfolgen definiert.

Es ist also wichtig, dass dieses zentrale Konzept von den Studierenden verstanden wird. Dazu ist es nötig, verschiedenste Beispiele und Gegenbeispiele für Äquivalenzrelationen zu untersuchen. Es ist leicht, aus der Schule bekannte, einfache Beispiele wie die „=“-Relation oder die „$\Leftrightarrow$“-Relation zu finden. Die entsprechenden Beweise sind jedoch sehr einfach. Natürlich kann man sich beliebig komplizierte Relationen konstruieren, jedoch ist es gerade in einer Veranstaltung für angehende MathematiklehrerInnen besser, Beispiele aus der Schule zu finden. Die Kongruenz von Dreiecken ist so ein aus der Schule bekanntes und nicht zu einfaches Beispiel für eine Äquivalenzrelation.

Eine erste Anforderung besteht bereits darin, die in der Schule eher anschaulichen und nicht ganz exakten Formulierungen für die Dreieckskongruenz und die entsprechenden Kongruenzsätze sinnvoll zu formalisieren.[9] Die Relevanz einer solchen Formalisierung wird durch Aufgabenteil (iv) verdeutlicht. Hier wird gezeigt, dass bereits eine scheinbar äquivalente umgangssprachliche Formulierung zu einer untauglichen Definition führt.

Verwendet man diese Aufgabe in einer Präsenzübung bieten sich mehrere Möglichkeiten an, sinnvoll darauf aufzubauen. Eine Aufgabe, die sich fast kanonisch aus der hier vorliegenden Schnittstellenaufgabe ergibt, ist die Angabe und Beschreibung der Äquivalenzklassen bezüglich der Kongruenz-Relation. Dies kann auf formaler und auf anschaulicher Ebene geschehen.

Eine weitere Möglichkeit, die sich anbietet, wäre eine Diskussion über die Dreiecksdefinition [10]. Abhängig davon, ob man Dreiecke als Punktmenge im $\mathbb{R}^2$, als eindeutig definiert durch den Schnitt dreier Geraden, als eindeutig definiert durch drei Punkte, als eigenständige Objekte mit Eigenschaften wie Winkelgröße und Länge, etc. definiert, ist es erforderlich, die Kongruenz von Dreiecken anders zu definieren. Je nach Definition kann es sogar sein, dass zwei Dreiecke bereits gleich sind, wenn sie z. B. den (SSS)-Satz erfüllen.

Wenn wir beispielsweise Dreiecke wie in der Aufgabe durch ihre drei Eckpunkte in der euklidischen Ebene definieren, können wir sagen, dass zwei Dreiecke kongruent sind, wenn wir durch eine endliche Anzahl von Verknüpfungen von Spiegelungen, Translationen und Rotationen die Eckpunkte aufeinander abbilden können.

Jede der Definitionen bringt Vor- und Nachteile mit sich. Der Vorteil der in der Aufgabe gewählten Definition ist der, dass man sehr einfach den Kongruenzsatz (SSS) definieren kann. In einer Diskuission mit Studierenden kann sich dann zeigen, dass diese Definition bei der Betrachtung von Kongruenzsätzen, die einen Winkel enthalten, nicht praktisch ist. Es kann überlegt werden, welche Definition eines Dreiecks für andere Kongruenzsätze sinnvoller ist. Insofern würde sich diese Schnittstellenaufgabe auch im Rahmen einer Geometrieveranstaltung anbieten.

Ein weiterer Anknüpfungspunkt an diese Aufgabe ist die Suche nach anderen Äquivalenzrelationen, die in der Schule eine Rolle spielen. Gute Beispiele dafür sind die bereits angesprochenen Restklassen oder die rationalen Zahlen. Betrachtet man die rationalen Zahlen nämlich als Brüche, so hat man verschiedene Darstellungen für eine Zahl (z. B. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \ldots$). Man kann nun definieren, dass zwei Brüche $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ in Relation zueinander stehen, wenn $ad = bd$ ist. Nun kann man relativ einfach zeigen, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt, wobei die Äquivalenzklassen je eine rationale Zahl sind.[11] Ein entsprechender Beweis findet sich im Anhang auf Seite 54.

[9] Auch diese Art des Formalisierens ist ein Bezug auf die Kernlerplänen, in denen genau dieses Vorgehen, ein Modell zu entwickeln und danach zu prüfen, unter der Kompetenz *Modellieren* gefordert wird.

[10] Die Definition in der Aufgabe entspricht dem Vorhandensein einer bijektiven Isometrie, die die Punkte aufeinander abbildet.

[11] Genau auf diese Art und Weise werden im hinteren Teil der Vorlesung die rationalen Zahlen definiert. An dieser Stelle bereits auf die entsprechende Mathematik einzugehen, ist somit sehr sinnvoll.

Desweiteren gibt es einige Beispiele für typische Relationen aus der Schule, bei denen es sich nicht um Äquivalenzrelationen handelt. Die zwei prominentesten Beispiele sind die $\leq$- und die $<$-Relation. Bei diesen handelt es sich um partielle Ordnungen. Solche Gegenbeispiele zeigen, dass es durchaus relevante Relationen gibt, die keine Äquivalenzrelationen sind.

In der hier vorliegenden Schnittstellenaufgabe werden Grundvorstellungen zu Relationen gefestigt. Die oben beschriebene Diskussion über verschiedene Definitionen von Dreiecken und deren Kongruenz in Verbindung mit der Aufgabe hilft dabei, verschiedene Zugänge zu betrachten.

Mit dem hochschulmathematischen Werkzeug der Äquivalenzrelation können Fragestellungen, wie die Korrektheit der in der Schule intuitiv verwendeten Eigenschaften Symmetrie und Transitivität für die Kongruenz von Dreicken bewiesen und verstanden werden. Außerdem werden auch in dieser Aufgabe typische mathematische Arbeitsweisen geübt und durch eine Diskussion reflektiert. In diesem Fall handelt es sich um das sinnvolle Definieren von mathematischen Gegenständen und die formale Beschreibung mathematischer Ausssagen als Basis für einen sauberen Beweis.

Insgesamt kann also festgehalten werden, dass die hier vorliegende Schnittstellenaufgabe alle Kategorien ((A),(B),(C) und (D)) abdeckt.

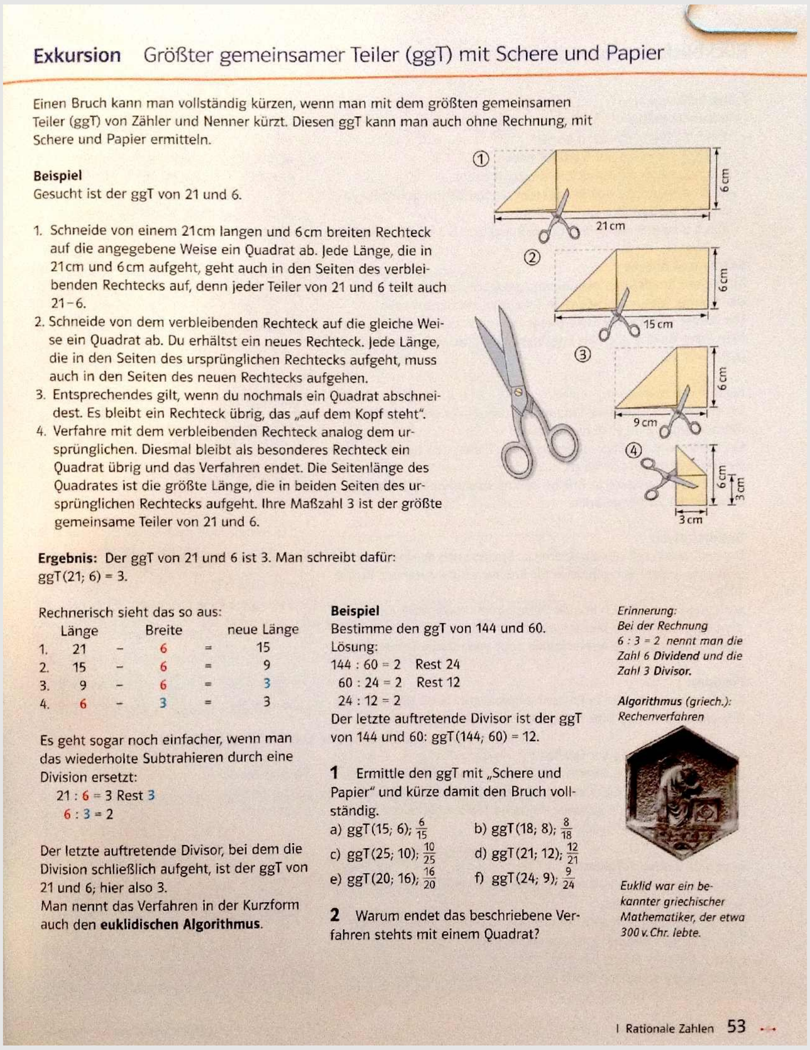
2.3.4 Aufgabe 4: Der euklidische Algorithmus in der Schule

Der größte gemeinsame Teiler (ggT) von zwei ganzen Zahlen ist ein wichtiges algebraisches Konstrukt, welches auch in der Hochschulmathematik Anwendung findet.[12] Auch in der Schule ist er ein wichtiges Hilfsmittel, um z. B. Brüche vollständig zu kürzen.

Kennt man die Primfaktorzerlegung zweier Zahlen, so kann man den ggT sofort ablesen. Eine weitere Möglichkeit den ggT zweier Zahlen zu ermitteln bietet der *euklidische Algorithmus.* Die folgende Aufgabe beschäftigt sich mit einem Verfahren zur „händischen" Ermittlung des ggTs unter Verwendung von Schere und Papier.

Die hier vorliegende Schnittstellenaufgabe, lässt sich vor allem der zweiten Wirkrichtung zuordnen. Sie verwendet die formale Definition und den formalen Beweis des euklidischen Algorithmus, um eine Schulbuchaufgabe besser zu durchdringen.[13]

Aufgabe 4 *Im Folgenden finden Sie einen Auszug aus dem Schulbuch „Lambacher Schweizer 6" (Baum et al., 2009), der sich mit dem ggT beschäftigt.*



Exkursion Größter gemeinsamer Teiler (ggT) mit Schere und Papier

Einen Bruch kann man vollständig kürzen, wenn man mit dem größten gemeinsamen Teiler (ggT) von Zähler und Nenner kürzt. Diesen ggT kann man auch ohne Rechnung, mit Schere und Papier ermitteln.

Beispiel
Gesucht ist der ggT von 21 und 6.

1. Schneide von einem 21cm langen und 6cm breiten Rechteck auf die angegebene Weise ein Quadrat ab. Jede Länge, die in 21cm und 6cm aufgeht, geht auch in den Seiten des verbleibenden Rechtecks auf, denn jeder Teiler von 21 und 6 teilt auch 21 − 6.
2. Schneide von dem verbleibenden Rechteck auf die gleiche Weise ein Quadrat ab. Du erhältst ein neues Rechteck. Jede Länge, die in den Seiten des ursprünglichen Rechtecks aufgeht, muss auch in den Seiten des neuen Rechtecks aufgehen.
3. Entsprechendes gilt, wenn du nochmals ein Quadrat abschneidest. Es bleibt ein Rechteck übrig, das „auf dem Kopf steht".
4. Verfahre mit dem verbleibenden Rechteck analog dem ursprünglichen. Diesmal bleibt als besonderes Rechteck ein Quadrat übrig und das Verfahren endet. Die Seitenlänge des Quadrates ist die größte Länge, die in beiden Seiten des ursprünglichen Rechtecks aufgeht. Ihre Maßzahl 3 ist der größte gemeinsame Teiler von 21 und 6.

Ergebnis: Der ggT von 21 und 6 ist 3. Man schreibt dafür:
ggT(21; 6) = 3.

Rechnerisch sieht das so aus:

	Länge		Breite		neue Länge
1.	21	−	6	=	15
2.	15	−	6	=	9
3.	9	−	6	=	3
4.	6	−	3	=	3

Es geht sogar noch einfacher, wenn man das wiederholte Subtrahieren durch eine Division ersetzt:
21 : 6 = 3 Rest 3
6 : 3 = 2

Der letzte auftretende Divisor, bei dem die Division schließlich aufgeht, ist der ggT von 21 und 6; hier also 3.
Man nennt das Verfahren in der Kurzform auch den **euklidischen Algorithmus**.

Beispiel
Bestimme den ggT von 144 und 60.
Lösung:
144 : 60 = 2 Rest 24
60 : 24 = 2 Rest 12
24 : 12 = 2
Der letzte auftretende Divisor ist der ggT von 144 und 60: ggT(144; 60) = 12.

1 Ermittle den ggT mit „Schere und Papier" und kürze damit den Bruch vollständig.
a) ggT(15; 6); $\frac{6}{15}$ b) ggT(18; 8); $\frac{8}{18}$
c) ggT(25; 10); $\frac{10}{25}$ d) ggT(21; 12); $\frac{12}{21}$
e) ggT(20; 16); $\frac{16}{20}$ f) ggT(24; 9); $\frac{9}{24}$

2 Warum endet das beschriebene Verfahren stehts mit einem Quadrat?

Erinnerung:
Bei der Rechnung 6 : 3 = 2 nennt man die Zahl 6 ***Dividend*** *und die Zahl 3* ***Divisor.***

Algorithmus *(griech.): Rechenverfahren*

Euklid war ein bekannter griechischer Mathematiker, der etwa 300 v. Chr. lebte.

I Rationale Zahlen 53

[12]Den ggT braucht man z. B. bei der Betrachtung von zyklischen Gruppen, n-ten Einheitswurzeln oder der Berechnung quadratfreier Polynome.

[13]Die in der Aufgabe gezeigte Schulbuchseite findet sich in größerem Format im Anhang E.3.1

Aufgabe 4 (Fortsetzung)
Beweisen Sie, dass dieses Verfahren den ggT zweier Zahlen korrekt bestimmt. Zeigen Sie dazu die Äquivalenz einzelner Schritte oder der Zusammenfassung von Schritten zu Schritten des Euklidischen Algorithmus, welcher - wie im Lesematerial bewiesen - den ggT korrekt berechnet.

Lösung. Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq a$. Betrachte ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b.

Wenn $b = a$ gilt, dann ist das Rechteck ein Quadrat und das Verfahren liefert korrekterweise $a = b = \mathrm{ggT}(a, b)$.

Wenn $b > a$ gilt, zieht man so oft a von b ab, bis eine Zahl herauskommt, die kleiner oder gleich a ist. Wenn man dazu k-mal a abgezogen hat, gilt $b - k \cdot a \leq a < b - (k-1) \cdot a$. Wenn $b - k \cdot a = a$, dann gilt $b = (k+1) \cdot a$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = a$, was das Verfahren korrekt als Ergebnis liefert, weil man nach diesen k Schritten das Quadrat der Seitenlänge a erhalten hat. Ist dagegen $b - k \cdot a < a$, dann ist $b = k \cdot a + r_1$ gerade die Division von b durch a mit Rest r_1, der $0 \leq r_1 < a$ erfüllt. Das bedeutet, aus dem Rechteck mit den Seitenlängen b und a ist das Rechteck mit den Seitenlängen a und r_1 geworden.

Aus dem Euklidischen Algorithmus weiß man, dass $\mathrm{ggT}(b, a) = \mathrm{ggT}(a, r_1)$ gilt. Fährt man mit dem Verfahren fort, so ist das genauso, als hätte man mit dem Rechteck mit den Seitenlängen a und r_1 begonnen. Das Verfahren liefert also im nächsten Schritt entweder ein Quadrat mit Seitenlänge $r_1 = \mathrm{ggT}(a, r_1)$ oder aber ein Rechteck mit den Seitenlängen r_1 und r_2, wobei $a = \ell \cdot r_1 + r_2$ die Division mit Rest von a durch r_1 ist. Jede diese Mehrfachsubtraktionen entspricht also einem Schritt im Euklidischen Algorithmus.

Das Verfahren endet, wenn die längere Seite ein Vielfaches der kürzeren Seite ist. In diesem Fall ist die Länge der kürzeren Seite der ggT der beiden Seitenlängen. $\square$

Einbettung in die Veranstaltung

Die hier vorliegende Schnittstellenaufgabe ist Teil der Präsenzübungsaufgaben zu Themenblock 4 (ggT und euklidischer Algorithmus). Für diesen Themenblock sind unter anderem die folgenden Lernziele definiert.

(LZ1) Teilen mit Rest

(c) Die S. können sowohl die Division mit Rest als auch den euklidischen Algorithmus verbal beschreiben. (1)

(d) Die S. können den Euklidischen Algorithmus allgemein in mathematischer Formelsprache formulieren. (2)

(e) Die S. können den Euklidischen Algorithmus für beliebige Zahlenpaare $n, m \in \mathbb{N}$ ausführen. (3)

(f) Die S. können den Euklidische Algorithmus mit der iterierten Division mit Rest in Verbindung setzen. (5)

Diese Lernzziele entsprechen den Fähigkeiten, die es braucht um die Aufgabe zu lösen. Da die Studierenden bereits sehr sicher im Umgang mit dem euklidischen Algorithmus sein müssen, um die Aufgabe bearbeiten zu können, eignet sich diese Aufgabe gut als abschließende Aufgabe zu diesem Themenbereich.

Einordnung in gymnasiale Lehrpläne

Der ggT wird in den neuen Kernlehrplänen nicht mehr explizit erwähnt. Jedoch gibt es mehrere geforderte Kompetenzen, die eine Behandlung rechtfertigen. Im Bereich *Arithmetik/Algebra* wird unter anderem gefordert:

> „[SuS] [. . .] nutzen das Grundprinzip des **Kürzens** und Erweiterns von Brüchen [. . .]“ (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2007, S. 21, Hervorhebung M.H.)

Um Brüche vollständig kürzen zu können, ist zumindet das Konzept – wenn auch nicht explizit benannt - eines größten gemeinsamen Teilers von Zähler und Nenner erforderlich.

Eine weitere Kompetenz in Verbindung mit dem ggT findet sich ebenfalls im Bereich *Arithmetik/Algebra*:

> „[SuS] bestimmen Teiler und Vielfache natürlicher Zahlen [. . .]“ (Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen, 2007, S. 21).

Bei der Bestimmung von Teilern bietet es sich an, Teiler verschiedener Zahlen miteinander zu vergleichen. Dabei erscheint es sinnvoll, den ggT als besonderen Teiler hervorzuheben.

Auch wenn die Lehrpläne keine explizite Behandlung der Thematik fordern, zeigen die hier dargestellten Anknüpfungspunkte jedoch, dass es sehr sinnvoll ist, wenn zumindest die Lehrkraft den ggT und seine Anwendungen in der Schulmathematik kennt.

Anknüpfungspunkte und Kategorisierung

Das besondere an dieser Schnittstellenaufgabe ist, dass sie von den Studierenden fordert, eine von einem Buch vorgenommene didaktische Reduktion auf ihre Richtigkeit und mathematische Fundierung zu überprüfen. Dabei soll das erworbene hochschulmathematische Wissen die Grundlage bilden. Dies ist eine Kompetenz, die auch im späteren Lehrerberuf absolut notwendig ist.

Wie bereits oben geschrieben eignet sich diese Aufgabe gut zum Abschluss der Betrachtungen zum euklidischen Algorithmus. Bei der Bearbeitung können alle Aspekte des Algorithmus wiederholt werden. Eine Möglichkeit, sinnvoll an die Aufgabe anzuschließen, ist die Verwendung des euklidischen Algorithmus zur Lösung diophantischer Gleichungen der Form

$$xa + yb = \mathrm{ggT}(a, b),$$

wobei $a, b \in \mathbb{Z}$ gegeben und $x, y \in \mathbb{Z}$ gesucht sind. Die Lösbarkeit dieser Gleichungen folgt aus dem Beweis der Existenz des ggT (vgl. z. B. I. Hilgert und Hilgert (2012, S. 43 f.)). Dort wird nämlich für $a, b \in \mathbb{Z}$ gezeigt

$$\mathrm{ggT}(a, b) = \min \{ax + by \in \mathbb{N} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}. \quad (\star)$$

Um nun tatsächlich eine Lösung für die Gleichung zu finden, kann man einfach den euklidischen Algorithmus „rückwärts“ anwenden. Ein Beispiel dafür findet sich im Anhang E.3.

Eine weitere Möglichkeit des weiteren Vorgehens ergibt sich daraus, dass man aus $(\star)$ direkt schließen kann: Seien a, b teilerfremd. Dann gibt es $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $ax + by = 1$ (vgl. I. Hilgert und Hilgert (2012, S. 46, Korollar 1.15)).

Betrachtet man nun die Restklassen modulo n, dann kann man mit Hilfe dieser Aussage z. B. zeigen, dass es sich dabei nicht um eine multiplikative Gruppe handelt, wenn n keine Primzahl ist.

Betrachtet man nun abschließend die Kategorien von Bauer, so stellt man fest, dass die hier vorliegende Schnittstellenaufgabe vor allem die Kategorie (C) abdeckt, da das viertiefte Verstehen einer Fragestellung aus der Schulmathematik genau die geforderte Aufgabe ist.

Außerdem deckt die Aufgabe auch die Kategorie (D) ab. Es wird geübt, mathematische Definitionen (der eukldische Algorithmus) auf Beispiele anzuwenden.

2.3.5 Weitere Schnittstellenaufgaben

Neben den im Vorangegangenen vorgestellten Schnittstellenaufgaben, lassen sich noch viele weitere Schnittstellen zu den bereits angesprochenen und auch zu den anderen Themen aus der Veranstaltung finden. Um dies zu zeigen, sind im Folgenden weitere der entwickelten Schnittstellenaufgaben unkommentiert aufgelistet.

Aufgabe 5: Umgekehrte Implikation

Aufgabe 5

(i) *Der Satz des Pythagoras*

(a) *Formulieren Sie den Satz des Pythagoras als Implikation der Form „$A \Rightarrow B$“.*

(b) *Formulieren Sie die umgekehrte Implikation des Satzes von Pythagoras („$B \Rightarrow A$“) als Satz.*

(ii) *Das notwendige Kriterium für Extremstellen*

(b) *Formulieren Sie das, aus der Schule bekannte, notwendige Kriterium für Extremstellen stetig differenzierbarer Funktionen als Implikation der Form „$A \Rightarrow B$“.*

(b) *Formulieren Sie die umgekehrte Implikation als Satz.*

(b) *Ist diese wahr?*

(iii) *Zeigen, oder widerlegen Sie, dass die umgekehrte Implikation „$B \Rightarrow A$“ von „$A \Rightarrow B$“ nicht logisch äquivalent zu „$A \Rightarrow B$“ ist.*

Aufgabe 6: Die Irrationalität von Wurzel 2

Aufgabe 6 *In der Schule wollen sie das Unterrichtsthema „Reelle Zahlen“ motivieren. Dazu zeigen Sie, dass die Gleichung $x^2 = 2$ keine rationale Lösung hat, es also keinen Bruch gibt, der diese Gleichung löst. Sie verwenden den folgenden Beweis:*

Wir definieren $\sqrt{2}$ als eine Lösung der Gleichung $x^2 = 2$ und zeigen das $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ist, es also kein $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ gibt mit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Angenommen, es gäbe zwei Zahlen $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, sodass $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ist. Dabei sei $\frac{p}{q}$ ein vollständig gekürzter Bruch. Dann müsste

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$$

gelten. Da $2q^2$ eine gerade Zahl ist, muss auch p^2 und damit auch p gerade sein. Also gibt es eine ganze Zahl r mit $2r = p$ und erhält somit

$$2q^2 = p^2 = (2r)^2 = 4r^2.$$

Mit der selben Argumentation ist dann auch q eine gerade Zahl. Da aber p und q gerade sind, kann $\frac{p}{q}$ nicht vollständig gekürzt gewesen sein.

Die Behauptung, dass $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ gilt, ist also falsch und die Behauptung somit bewiesen. □

Aufgabe 6 (Fortsetzung)

(i) *Welches Beweisverfahren wurde hier angewandt?*

(ii) *Offensichtlich ist* $\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{Q}$. *Warum funktioniert der obige Beweis für* $\sqrt{4}$ *nicht?*

(iii) *Für welche* a *können Sie mit dem obigen Beweis zeigen, dass die Gleichung* $x^2 = a$ *keine Lösung* $x \in \mathbb{Q}$ *hat? Begründen Sie Ihre Antwort.*

Aufgabe 7: Die natürlichen Zahlen in jedem Körper

Aufgabe 7 *In den aus der Schule bekannten geordneten Körpern* $\mathbb{Q}$ *und* $\mathbb{R}$ *finden wir immer die natürlichen Zahlen als Teilmenge wieder. Dies wollen wir nun verallgemeinert beweisen.*
Sei $(\mathcal{Z}, +, \cdot, \mathcal{P})$ *ein angeordneter Körper. Zeige, dass* $\mathcal{Z}$ *eine Teilmenge* $\mathcal{N}$ *enthält, die zusammen mit der Einschränkung von* $<$ *auf* $\mathcal{N}$ *ein Modell für die natürlichen Zahlen ist.*

Aufgabe 8: Die Addition auf den rationalen Zahlen

Aufgabe 8

(i) *Wir wollen uns mit der Addition auf den rationalen Zahlen beschäftigen. Diese ist definiert durch*

$$\frac{a}{b} +_{\mathbb{Q}} \frac{c}{d} := \frac{ad+bc}{bd}, \quad \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}$ *abgeschlossen unter dieser Addition und diese Addition außerdem wohldefiniert ist.*

(ii) *Oft benutzen SuS in der Schule eine Addition* $+_{fail}$ *definiert durch*

$$\frac{a}{b} +_{fail} \frac{c}{d} := \frac{a+c}{b+d}, \quad \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}.$$

Zeigen Sie, dass diese Addition nicht sinnvoll, also nicht wohldefiniert ist.

Aufgabe 9: Die Zahl Null und die natürlichen Zahlen

Aufgabe 9 *Historisch gesehen gibt es einige Diskussionen darüber, ob die 0 zu den natürlichen Zahlen gehört oder nicht. Auch in der Schule wird dies oftmals disskutiert. Zeigen Sie, dass die aus der Vorlesung bekannte axiomatische Einführung der natürlichen Zahlen und der Addition auf Modellen von natürlichen Zahlen die Existenz eines neutralen Elementes - also einer Null - ausschließt.*

Kapitel 3

Ergebnis, Reflexion und Ausblick

In dieser Arbeit wurden Bezüge zwischen Schulmathematik und den inhaltlichen Themen der EmDA-Veranstaltung beispielhaft anhand von Schnittstellenaufgaben aufgezeigt. Dazu wurde zunächst die von T. Bauer entwickelte Theorie vorgestellt und diese auf die zu betrachtenden Veranstaltung bezogen.

Daraufhin wurden für die Thematiken Teilbarkeit, Restklassen, Äquivalenzrelationen und ggT vier Schnittstellenaufgaben detailliert vorgestellt und weitere Aufgaben zu anderen Bereichen der Vorlesung ergänzt. Somit wurden mehrere Schulbezüge identfiziert und präzisiert.

Alle in dieser Arbeit vorgestellten Schnittstellenaufgaben wurden – in einer ersten Version – bereits in der Veranstaltung erprobt und teilweise für diese Arbeit vom Autor verbessert und ergänzt. Dadurch, dass der Autor selber Übungsgruppen gehalten hat und durch einen Erfahrungsaustausch mit den anderen Übungsgruppenleitern, kann eine erste subjektive Auswertung im Hinblick auf die anfangs formulierten Vermutungen und Thesen (S. 13 f.) durchgeführt werden.

Die Erfahrungen zeigen, dass die Schnittstellenaufgaben genau dann gut bearbeitet wurden, wenn sie eher einfach im Vergleich zu anderen Aufgaben auf einem Übungszettel waren. Als Beispiel ist an dieser Stelle Aufgabe 1 (2.3.1) zu nennen, die im wesentlichen die Anwendung eines bekannten Algorithmus erfordert. Dies lässt aber im Angesicht von Erfahrungen auf vergangene Semester nicht zwingend einen Schluss auf die Wirksamkeit von Schnittstellenaufgaben zu; die Erfahrung zeigt, dass sich einfache Aufgaben grundsätzlich einer höheren Beliebtheit erfreuen.

Gegen die auf S. 14 formulierte These sprechen die Erfahrungen, die mit der Schnittstellenaufgabe 4 (2.3.4) gemacht wurden. Auf dem selben Übungsblatt befanden sich noch zwei weitere Aufgabe zum euklidischen Algorithmus, zum Einen die Berechnung eines ggTs und zum anderen die Rückwärtsanwendung zum Lösen diophantischer Gleichung (vgl. Anhang E.3). Insbesondere die Rückwärtsanwendung ist etwas kompliziert, länglich, mühsam aufzuschreiben und hat keinerlei Schulbezug. Es zeigte sich jedoch, dass in den Übungsgruppen kein(!) Studierender von sich aus die Schnittstellenaufgabe bearbeitet hat, obwohl diese die erste Aufgabe auf dem Zettel war. Die beiden anderen Aufgaben – ohne Schulbezug – wurden deutlich bevorzugt.[1]

Ungeachtet dessen scheint es jedoch so, dass, unter der Bedingung, dass eine Schnittstellenaufgabe bearbeitet wird, dieses tatsächlich dazu führt, Verbindungen zwischen Schule und Hochschule zu erfahren und daraus zu lernen.

[1] Die Bearbeitungsreihenfolge wurde den Studierenden in der Präsenzübung freigestellt.

Im Anschluss gilt es nun die Wirksamkeit von Schnittstellenaufgaben mit wissenschaftlich probaten Mitteln empirisch zu untersuchen. Dabei können die Analyse von Lösungen von Studierenden, Fragebögen und die Durchführung qualitativer Interviews sinnvolle Methoden sein.

Desweiteren sollten nun im nächsten Schritt die vorgestellten (und auch weitere) Schnittstellaufgaben einer didaktischen Analyse unterzogen und auf Basis dieser optimiert werden. Dabei können z. B. hochschuldidaktische Betrachtungen zur Bearbeitung von Übungsaufgaben, kognitive Analysen, sowie eine genauere didaktische Untersuchung des Schulbezugs (Welche Probleme haben Schüler an dieser Stelle?, . . .) Anknüpfungspunkte sein.

Meiner Meinung nach können Forschungen in dieser Richtung die Mathematiklehrerausbildung deutlich verbessern. Ziel sollte es sein, nicht nur gute Schnittstellenaktivitäten zu entwickeln, sondern auch den Studierenden das enorme Potential dieser vor Augen führen und zu verdeutlichen, dass sich auch die Beschäftigtung mit schwierigen Schnittstellenaufgaben lohnt.

Abschließend soll, auf Basis der vom Autor gemachten Erfahrungen, noch der Einfluss auf den Weg des Lehrerwerdens durch die Entwicklung von Schnittstellenaufgaben erwähnt werden. Die Entwicklung von Schnittstellenaufgaben erfordert ein tiefe Auseinandersetzung mit den fachmathematischen Inhalten und eine gute Kenntniss der schulmathematischen Inhalte und Lehrpläne. Diese miteinander in Verknüpfung zu bringen kann angehende Lehrkräfte bei der Überwindung der doppelten Diskontinuität enorm unterstützen. Schließlich profitiert der Aufgabenentwickler genauso wie die Studierenden, die die Aufgaben bearbeiten, von der Betrachtung der Bezüge zwischen Hochschulmathematik und Schulmathematik.

Literaturverzeichnis

Bauer, T. (2012). *Analysis – Arbeitsbuch. Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik, sichtbar gemacht in Aufgaben mit kommentierten Lösungen.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Bauer, T. (2013). Schnittstellen bearbeiten in Schnittstellenaufgaben. In C. Ableitinger, J. Kramer & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 39–56). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Bauer, T. & Partheil, U. (2009). Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik. In *Math. semesterber. 56* (S. 85-103). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Baum, M., Bellstedt, M., Buck, H., Dürr, R., Freudigmann, H., Haug, F., ... Surrey, I. (2009). *Lambacher Schweizer 6, Mathematik für Gymnasien, Nordrhein-Westfalen*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag GmbH.

Bloom, B. S. (1972). *Taxonomie von Lernzielen im kognitiven Bereich* (4. Aufl.). Weinheim und Basel: Beltz.

Brandt, D., Greulich, D., Joergens, T., Jügensen-Engl, T., D.Lind, Mutz, D., ... Zimmermann, P. (2007). *Lambacher Schweizer 7, Mathematik für Gymnasien, Nordrhein-Westfalen*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag GmbH.

Danckwerts, R. (2013). Angehende Gymnasiallehrer(innen) brauchen eine „Schulmathematik vom höheren Standpunkt"! In C. Ableitinger, J. Kramer & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 77–94). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hefendehl-Hebeker, L. (2013). Doppelte Diskontinuität oder die Chance der Brückenschläge. In C. Ableitinger, J. Kramer & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 1–15). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hilgert, I. & Hilgert, J. (2012). *Mathematik - ein Reiseführer*. Berlin: Springer.

Hilgert, J., Hoffmann, M. & Panse, A. (2014?). Kann professorale Lehre tutoriell sein? Ein Modellversuch zur Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten. In W. Paravicini & J. Schnieder (Hrsg.), *Tagungsband zum Hansekolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik.* Münster: WTM-Verlag. (Eingereicht, Veröffentlichung voraussichtlich 2014)

Hoffmann, M. (2013). *Einführung in Äquivalenzrelationen*. unpublished. (Material speziell zur Vorlesung: Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten, WS 2013/2014, Universität Paderborn. (wird in KoaLA bereitgestellt und findet sich auch im Anhang dieser Arbeit))

Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis.* Leibzig: Teubner. (Zitiert nach der handschriftlichen Urfassung in openlibrary.org.)

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen. (2007). *Kernlehrplan für das Gymnasium - Sekundarstufe I (G8) in Nordrhein-Westfalen Mathematik* (1. Aufl.). Ritterbach Verlag.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen. (2008). *Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen Deutsch, Sachunterricht, Mathematik,...* (1. Aufl.). Ritterbach Verlag.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen. (2013). *Kernlehrplan für das Gymnasium - Sekundarstufe II (G8) in Nordrhein-Westfalen mathematik* (1. Aufl.). Ritterbach Verlag.

Universität Paderborn. (2011). *Besondere Bestimmungen der Prüfungsordnung für den Bachelorstudiengang Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen mit dem Unterrichtsfach Mathematik an der Universität Paderborn Vom 28. September 2011.*

Anhang A

Notationen

An dieser Stelle werden diejenigen in der Arbeit verwendeten Notationskonventionen dargestellt, die allgemein keinen eindeutigen Gebrauch haben.

- $\subset$ bzw. $\supset$ meint die allgemeine Teilmengenbeziehung. Ist eine echte Teilmenge gemeint, so wird $\subsetneq$ bzw. $\supsetneq$ verwendet.
- $[a]_m$ mit $a, m \in \mathbb{Z}$ bezeichnet die Restklasse von a modulo m. Wird aus dem Kontext deutlich, dass es um Restkassen modulo m geht, so wird manchmal nur $[a]$ geschrieben.
- $\mathbb{Z}_m$ bezeichnet die Menge aller Restklassen modulo m.
- Bei der standardmäßigen Multiplikation bei kann das Rechenzeichen $\cdot$ weggelassen werden, also $ab = a \cdot b$.
- Das Ende einer Lösung wird allgemein mit $\square$ gekennzeichnet. Dabei muss es sich nicht zwingend um einen Beweis handeln.
- Wir definieren $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
- $\operatorname{sign}(n)$ bezeichnet das Vorzeichen einer Zahl n.

Anhang B

Verwendete grundlegende Definitionen und Sätze

An dieser Stelle werden einige grundlegenden Definitionen und Sätze aus I. Hilgert und Hilgert (2012) aufgeführt, die für diese Arbeit relevant sind.

Definition B.1
Eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ heißt *teilbar* durch $b \in \mathbb{Z}$ mit Rest $r \in \{0, \ldots, b-1\}$, wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$n = k \cdot b + r.$$

Wir schreiben dann auch $n = r \mod b$ oder $n \equiv_b r$.

Ist $r = 0$, so ist n durch b teilbar. □

Definition B.2
Seien $a, m \in \mathbb{Z}$. Die Menge

$$[a]_m := \{n \in \mathbb{Z} \mid n \equiv_m a\} = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : n = k \cdot m + a\}$$

heißt die *Restklasse von a modulo m*. □

Bemerkung B.3
Seien $a, m \in \mathbb{Z}$. Wegen $a = 0m + a$ und $0 \in \mathbb{Z}$ folgt sofort $a \in [a]_m$. □

Anhang C

Übersicht über die Leseaufträge

Die folgenden Leseaufträge stammen aus dem originalen Veranstaltungsmaterial der EmDA im Wintersemester 2013/2014.

Themenblock 02 Lesen in I. Hilgert und Hilgert (2012, Kapitel 1) den Abschnitt *Ergebnis von Abstraktion: Neue Strukturen* bis einschließlich Seite 22 vorvorletzter Absatz.

Themenblock 03 Lesen Sie in I. Hilgert und Hilgert (2012, Kapitel 1) den vollständigen Abschnitt 1.4 *Sprechen über mathematische Objekte: Die Sprache der Mengenlehre*, sowie die *Einführung in Äquivalenzrelationen* von Hoffmann (2013).

Themenblock 04 Lesen Sie I. Hilgert und Hilgert (2012, Kapitel 1, S. 43 - 46) (außer den ersten Absatz auf Seite 43 und den letzten auf Seite 46).

Themenblock 05 Lesen Sie I. Hilgert und Hilgert (2012, Kapitel 1, S. 46 - 50) (ab dem letzten Absatz auf Seite 46 und einschließlich des ersten auf Seite 50).

Themenblock 06 Lesen Sie I. Hilgert und Hilgert (2012, Kapitel 1, S. 50 - 53) (Einschließlich die grauen Box auf Seite 53).

Themenblock 07 Lesen Sie I. Hilgert und Hilgert (2012, Kapitel 2, S. 85 - 88) bis zu dem Absatz, der mit *erfüllt* endet.

Themenblock 08 Lesen Sie I. Hilgert und Hilgert (2012, Kapitel 2, S. 88 - 90).

Themenblock 09 Lesen Sie I. Hilgert und Hilgert (2012, Anhang A.1, S. 226 - 231).

Themenblock 10 Lesen Sie I. Hilgert und Hilgert (2012, Anhang A.2, S. 231 - 235) bis vor den Abschnitt *Addition auf* $\mathbb{N}$.

Themenblock 11 Lesen Sie I. Hilgert und Hilgert (2012, Anhang A.2, S. 235 - 239) (*Addition und Multiplikation auf den natürlichen Zahlen*).

Themenblock 12 Lesen Sie I. Hilgert und Hilgert (2012, Anhang A.3, S. 240 - 243) (*Von den natürlichen zu den ganzen Zahlen*).

Themenblock 13 Lesen Sie I. Hilgert und Hilgert (2012, Anhang A.4, S. 243 - 246) (*Von den ganzen zu den rationalen Zahlen*).

Themenblock 14 Lesen Sie I. Hilgert und Hilgert (2012, Anhang A.4, S. 246 - 249) (*Von den rationalen zu den reellen Zahlen*) bis einschließlich Definition A. 34.

Anhang D

Übersicht über die Lernziele

Die hier aufgeführten Lernziele stammen aus dem originalen Veranstaltungsmaterial der EmDA im Wintersemester 2013/2014 und wurden von J. Hilgert in Zusammenarbeit mit A. Panse und dem Autor entwickelt. In Klammern findet sich hinter jedem Lernziel die Einordnung in die Bloomsche Taxonomie (S. 9)

Themenblock 1 Die folgenden Lernziele wurden für den Themenblock 1 definiert:

(LZ1) Grundlagen zu Mengen

- (a) Die S.[1] können die Definition einer Menge im CANTORschen Sinn nennen. (1)
- (b) Die S. können aus verbalen Beschreibungen einfacher Mengen formal korrekte mengentheoretische Beschreibungen dieser Mengen ableiten. (2)
- (c) Die S. können zu durch mengentheoretische Beschreibungen gegebenen einfachen Mengen verbale Beschreibungen formulieren. (2)

(LZ2) mathematisches Lesen

- (a) Die S. sind in der Lage, einen angemessenen mathematischen Text unter zwei Gesichtspunkten durchzuarbeiten: (3)
  - i. Identifikation des Themas und der wesentlichen Aussagen des Textes
  - ii. „Zeichenweises“ Verständnis des Textes
- (b) Die S. können Textstellen ermitteln, bei denen sie Schwierigkeiten haben. (3)
- (c) Die S. können eigene Verständnisschwierigkeiten isolieren und dementsprechend präzise Fragen formulieren. (4)

(LZ3) Die S. können mit Hilfe fachmathematischer Sprache (z.B. Mengen) eigene kurze mathematische Texte (insb. zählt dazu die Lösung von Übungsaufgaben) erstellen. (3)

Themenblock 2 Die folgenden Lernziele wurden für den Themenblock 2 definiert:

(LZ1) Teilen mit Rest und schriftliches Dividieren

- (a) Die S. können die Operation „Teilen mit Rest“ und den Algorithmus des schriftlichen Dividierens auf Zahlenbeispiele anwenden. (3)
- (b) Die S. können den Algorithmus des schriftlichen Dividierens und die Operation „Teilen mit Rest“ in Beziehung setzen und dementsprechend ableiten, dass der Algorithmus ein wiederholtes Durchführen der Operation „Teilen mit Rest“ ist. (5)

[1] Studierenden

(LZ2) Restklassen

(a) Die S. können Repräsentanten einer Restklasse benennen.(1)

(b) Die S. können die Restklassen bezüglich einer vorgegebenen natürlichen Zahl sowohl als Menge in aufzählender Schreibweise (Repräsentanten), als auch als Menge mit definierender Eigenschaft angeben. Desweiteren können die S. die Restklasse $[k]$ für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ angeben. (1)

(c) Die S. erklären die Rolle der Repräsentanten im Bezug auf die Beschreibung von Restklassen. (2)

(d) Die S. können Restklassen in den verschiedenen Sprech- und Schreibweisen darstellen (Mengenschreibweise aus (LZ2b), „modulo m“, $[n]$,$[n]_m$, $n \equiv r \mod m$, $n \equiv_m r$). (2)

(e) Die S. können für eine vorgegebene natürliche Zahl eine Additions- und eine Multiplikationstabelle erstellen. (3)

(f) Die S. können herausstellen, dass die Verfahren zur Addition und Multiplikation von Restklassen unabhängig von der Wahl der Repräsentanten sind. (4)

(LZ3) Restklassen und Teilbarkeit

(a) Die S. können erklären, wieso das Konzept der Restklasse erlaubt, die Teilbarkeit (durch eine feste Zahl n) einer Zahl mit der Teilbarkeit (durch n) der Ziffern in der Dezimaldarstellung in Zusammenhang zu setzen. (2)

(b) Die S. können Restklassen korrekt zur Beschreibung von Teilbarkeitseigenschaften verwenden. (3)

(LZ4) Teilbarkeitsregeln

(a) Die S. können Teilbarkeitsregeln für die Zahlen 2,3,4,5,6,8,9,10 formulieren. (2)

(b) Die S. können erklären, was die gewichtete Quersumme einer ganzen Zahl ist und diese bezüglich einer gegebenen Gewichtung für ein Zahlenbeispiel explizit bilden. (2+3)

(c) Die S. können die Argumente aus I. Hilgert und Hilgert (2012, S. 18, Beispiel 1.4) Schritt für Schritt anhand des Textes erklären und das Konzept der gewichteten Quersumme als tragend für das Beispiel herausstellen. (2) + (4)

(d) Die S. können eine gegebene Teilbarkeitsregel unter Verwendung des Beispiels 1.4 (s.o.) analysieren und so über deren Korrektheit entscheiden. (3)+(4)

(e) Die S. können eine Teilbarkeitsregel für die Teilbarkeit durch eine gegebene natürliche Zahl entwerfen. (5)

Themenblock 3 Die folgenden Lernziele wurden für den Themenblock 3 definiert:

(LZ1) Mengenschreibweisen

(a) Die S. können aus verbalen Beschreibungen einfacher Mengen formal korrekte mengentheoretische Beschreibungen dieser Mengen ableiten. (2)

(b) Die S. können zu durch mengentheoretische Beschreibungen gegebenen einfacher Mengen verbale Beschreibungen formulieren. (2)

(LZ2) Elemente und Teilmengen

(a) Die S. können ausführen, dass zwei Mengen genau dann gleich sind, wenn sie dieselben Elemente haben. (1)

(b) Die S. können für zwei einfache Mengen A und B herausfinden, ob $A \subseteq B$ gilt, indem sie überprüfen, ob jedes Element von A auch Element von B ist. (3)

(c) Die S. können für zwei einfache Mengen A und B herausfinden, ob $A = B$ gilt, indem sie überprüfen, ob $A \subseteq B$ und $A \supseteq B$ gilt. (3)

(LZ3) Mengenoperationen

(a) Die S. können angeben, was Vereinigung und Schnitt zweier Mengen sind. (1)
(b) Die S. können erklären, wie man Vereinigung und Schnitt einer Familie von Mengen bildet, die durch eine nichtleere Indexmenge parametrisiert ist. (2)
(c) Die S. können beschreiben, was es bedeutet, wenn Mengen disjunkt sind. (1)
(d) Die S. können für einfache Familien von Mengen herausfinden, ob sie disjunkt sind. (3)
(e) Die S. können erläutern, was das Komplement einer Teilmenge einer gegebenen Menge ist. (2)
(f) Die S. können erläutern, was die Potenzmenge einer gegebenen Menge ist. (2)
(g) Die S. können erläutern, was das kartesische Produkt zweier gegebener Mengen ist. (2)

(LZ4) Relationen

(a) Die S. können erklären, wieso man Teilmengen eines kartesischen Produktes Relationen nennt. (2)
(b) Die S. können für konkrete einfache Relationen die Beschreibung dieser als Teilmengen eines kartesischen Produktes aus der Formulierung über ein Relationssymbol ableiten. (2)
(c) Die S. können für einfache Relationen herausfinden, ob diese reflexiv, transitiv, oder symmetrisch sind. (3)
(d) Die S. können Beispiele für Relationen aufschreiben, die keine, eine, zwei, bzw. alle Eigenschaften aus LZ4c haben. (1)
(e) Die S. können erklären, wieso die Äquivalenzklassen einer Äquivalenzrelation disjunkt sind und warum jedes Element der Menge zu mindestens einer Äquivalenzklasse gehören muss. (2)
(f) Die S. können für einfache Äquivalenzrelationen herausfinden, ob zwei gegebene Elemente bezüglich dieser Relation äquivalent sind oder nicht. (3)
(g) Die S. können herausstellen, wieso $x \equiv_m y$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine Äquivalenzrelation definiert, deren Äquivalenzklassen die Restklassen modulo m sind. (4)

(LZ5) Funktionen/Abbildungen

(a) Die S. können die Definition von Abbildungen angeben. (1)
(b) Die S. können die Definitionen der Eigenschaften injektiv, surjektiv und bijektiv angeben. (1)
(c) Die S. können für graphisch dargestellte Relationen identifizieren, ob es sich um eine Funktion/Abbildung handelt, und ggf. erläutern, ob diese injektiv, surjektiv und/oder bijektiv ist. (2)
(d) Die S. können für einfache Relationen herausfinden, ob es sich dabei um eine Funktion/Abbildung handelt. (3)
(e) Die S. können für einfache Funktionen herausfinden, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. (3)
(f) Die S. können für einfache bijektive Funktionen die Umkehrfunktion ermitteln. (3)

(g) Die S. können erklären, warum für eine surjektive Funktion $f\colon A \to B$ der Definitionsbereich A mindestens so viele Elemente haben muss, wie der Bildbereich B. (2)

(h) Die S. können erklären, warum für eine injektive Funktion $f\colon A \to B$ der Bildbereich B mindestens so viele Elemente haben muss, wie der Definitionsbereich A. (2)

Themenblock 04 Die folgenden Lernziele wurden für den Themenblock 3 definiert:

(LZ1) Teilen mit Rest

(a) Die S. können für beliebige Zahlenbeispiele $n, k \in \mathbb{N}$ den Rest $0 \leq r < k$ und die Zahl $m \in \mathbb{N}$ bestimmen, für die $n = m \cdot k + r$ gilt (2).

(b) Die S. können die Division mit Rest allgemein in mathematischer Formelsprache (siehe (a)) formulieren. (2)

(c) Die S. können sowohl die Division mit Rest als auch den euklidischen Algorithmus verbal beschreiben. (1)

(d) Die S. können den Euklidischen Algorithmus allgemein in mathematischer Formelsprache formulieren. (2)

(e) Die S. können den Euklidischen Algorithmus für beliebige Zahlenpaare $n, m \in \mathbb{N}$ ausführen. (3)

(f) Die S. können den Euklidische Algorithmus mit der iterierten Division mit Rest in Verbindung setzen. (5)

(LZ2) Größter gemeinsamer Teiler (ggT)

(a) Die S. nutzen für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ den Euklidischen Algorithmus um den ggT zu bestimmen. (3)

(b) Die S. können die Definition des ggT zweier natürlicher Zahlen verbal und in mathematischer Formelsprache formulieren. (2)

(c) Die S. können für beliebige Zahlen $a, b, k \in \mathbb{N}$ herausfinden, ob k der ggT von a und b ist. (3)

(d) Die S. können anhand einer ausformulierten Darstellung (zum Beispiel (I. Hilgert & Hilgert, 2012), Beweis von Satz 1.14) herausstellen, wieso das Ergebnis des Euklidischen Algorithmus der ggT der beiden Zahlen ist, auf die man den Algorithmus anwendet. (4)

(e) Die S. können den Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis für den ggT zweier Zahlen (zum Beispiel [HH12], Beweis von Satz 1.13) analysieren. Insbesondere können sie anhand des Textes die Argumente danach sortieren, ob sie zum Nachweis der Existenz oder der Eindeutigkeit eingesetzt werden. (4)

(f) Die S. können Korollar 1.15 in (I. Hilgert & Hilgert, 2012) erklären. (2)

(g) Die S. können Korollar 1.15 in (I. Hilgert & Hilgert, 2012) auf einfache Beispiele anwenden. (3)

(h) Die S. können unter Verwendung des Euklidischen Algorithmus zu zwei vorgegebenen Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ zwei ganze Zahlen x, y bestimmen, für die die ganzzahlige Linearkombination $ax + by$ der ggT von a und b ist. (3)

Anhang E

Anlagen zu einzelnen Aufgaben

E.1 Programmcode zu Aufgabe 2.3.1

Der in (I. Hilgert & Hilgert, 2012) S. 18, Beispiel 1.4 und S. 21, Beispiel 1.5 vorgestelle Algorithmus zum Ermitteln einer gewichteten Quersummenregel lässt sich auf einfache Art und Weise in einer Programmiersprache implementieren.

In Listing 1 findet man eine Möglichkeit der Umsetzung in der Programmiersprache C.

```c
// Bestimmung von gewichteten Quersummenregeln

#include <stdio.h>

int main(int argc, char *argv[]) {

        unsigned long int potenz;
        int teiler,tmp,i;

        teiler = atoi(argv[1]);
        int reste[teiler+1];

        potenz = 1;
        for(i = 0; i < teiler+1; i++) {
                reste[i] = 0;
        }

        tmp = teiler;

        do {    reste[tmp] = 1;
                tmp = potenz%teiler;
                printf("%lu is in [%d] %d\n",potenz,tmp,teiler);

                potenz = potenz*10;

        } while(reste[tmp] ==0);
        printf("von jetzt an Wiederholung von Obigem\n");
}
```

Listing E.1: Algorithmus zum Ermitteln einer gewichteten Quersummenregel (Programmiersprache: C)

E.2 Anlage zu Aufgabe 2.3.3

Wir können die rationalen Zahlen wie folgt durch eine Menge M beschreiben.

$$M = \{(p, q) \mid p \in \mathcal{Z}, q \in \mathcal{N}\}.$$

Dabei steht das erste Element eines Tupels für den Zähler und das zweite für den Nenner eines Bruches.

Der Bruch $\frac{2}{3}$ wäre also z. B. das Tupel $(2, 3)$.

Die folgene Relation auf M regelt nun die Gleichheit von gekürzten und erweiterten Brüchen. Sie ist wie folgt definiert

$$(a, b) \sim (c, d) :\Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c, \qquad (a, b), (c, d) \in M$$

Daraus erhalten wir z. B. für $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ schon $(1, 2) \sim (2, 4)$, wegen $1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$.

Wir zeigen nun, dass durch $\sim$ eine Äquivalenzrelation definiert wird. Im Folgenden seien $(a, b), (c, d), (e, f) \in M$.

Reflexivität: Wegen $ab = ba$ folgt $(a, b) \sim (a, b)$ und somit die Reflexivität.

Symmetrie: Es gelte $(a, b) \sim (c, d)$, also $ad = bc$. Damit gilt auch $cb = da$ und somit $(c, d) \sim (a, b)$. Damit ist die Symmetrie gezeigt.

Transitivität: Es gelte $(a, b) \sim (c, d)$ und $(c, d) \sim (e, f)$. Wir haben also $ad = bc$ und $cf = de$. Daraus folgt schon $adf = bcf = bde$ und somit $(af)d = (be)d \Leftrightarrow af = be$ und schließlich $(a, b) \sim (e, f)$. Damit ist die Transitivität gezeigt.

$\sim$ ist also eine Äquivlalenzrelation. $\square$

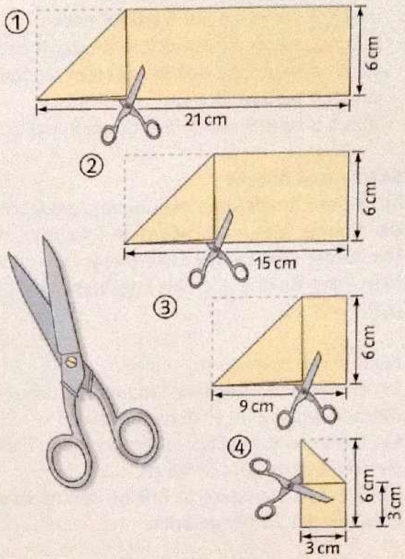
E.3 Anlage zu Aufgabe 2.3.4

E.3.1 Die Schulbuchseite in besserer Qualität.

Exkursion Größter gemeinsamer Teiler (ggT) mit Schere und Papier

Einen Bruch kann man vollständig kürzen, wenn man mit dem größten gemeinsamen Teiler (ggT) von Zähler und Nenner kürzt. Diesen ggT kann man auch ohne Rechnung, mit Schere und Papier ermitteln.

Beispiel
Gesucht ist der ggT von 21 und 6.



1. Schneide von einem 21 cm langen und 6 cm breiten Rechteck auf die angegebene Weise ein Quadrat ab. Jede Länge, die in 21 cm und 6 cm aufgeht, geht auch in den Seiten des verbleibenden Rechtecks auf, denn jeder Teiler von 21 und 6 teilt auch 21 − 6.
2. Schneide von dem verbleibenden Rechteck auf die gleiche Weise ein Quadrat ab. Du erhältst ein neues Rechteck. Jede Länge, die in den Seiten des ursprünglichen Rechtecks aufgeht, muss auch in den Seiten des neuen Rechtecks aufgehen.
3. Entsprechendes gilt, wenn du nochmals ein Quadrat abschneidest. Es bleibt ein Rechteck übrig, das „auf dem Kopf steht".
4. Verfahre mit dem verbleibenden Rechteck analog dem ursprünglichen. Diesmal bleibt als besonderes Rechteck ein Quadrat übrig und das Verfahren endet. Die Seitenlänge des Quadrates ist die größte Länge, die in beiden Seiten des ursprünglichen Rechtecks aufgeht. Ihre Maßzahl 3 ist der größte gemeinsame Teiler von 21 und 6.

Ergebnis: Der ggT von 21 und 6 ist 3. Man schreibt dafür:
ggT(21; 6) = 3.

Rechnerisch sieht das so aus:

	Länge		Breite		neue Länge
1.	21	−	6	=	15
2.	15	−	6	=	9
3.	9	−	6	=	3
4.	6	−	3	=	3

Es geht sogar noch einfacher, wenn man das wiederholte Subtrahieren durch eine Division ersetzt:

21 : 6 = 3 Rest 3
6 : 3 = 2

Der letzte auftretende Divisor, bei dem die Division schließlich aufgeht, ist der ggT von 21 und 6; hier also 3.
Man nennt das Verfahren in der Kurzform auch den **euklidischen Algorithmus**.

Beispiel
Bestimme den ggT von 144 und 60.
Lösung:
144 : 60 = 2 Rest 24
60 : 24 = 2 Rest 12
24 : 12 = 2
Der letzte auftretende Divisor ist der ggT von 144 und 60: ggT(144; 60) = 12.

1 Ermittle den ggT mit „Schere und Papier" und kürze damit den Bruch vollständig.

a) ggT(15; 6); $\frac{6}{15}$ b) ggT(18; 8); $\frac{8}{18}$
c) ggT(25; 10); $\frac{10}{25}$ d) ggT(21; 12); $\frac{12}{21}$
e) ggT(20; 16); $\frac{16}{20}$ f) ggT(24; 9); $\frac{9}{24}$

2 Warum endet das beschriebene Verfahren stehts mit einem Quadrat?

Erinnerung:
*Bei der Rechnung 6 : 3 = 2 nennt man die Zahl 6 **Dividend** und die Zahl 3 **Divisor**.*

***Algorithmus** (griech.): Rechenverfahren*

Euklid war ein bekannter griechischer Mathematiker, der etwa 300 v. Chr. lebte.

I Rationale Zahlen 53

E.3.2 Rückwärtsanwendung des euklidischen Algorithmus

Gesucht sind Lösungen $m, n \in \mathbb{Z}$ für die Gleichung $14592m + 6468n = 12$.

Lösung Teilt man die Gleichung $14592m + 6468n = 12$ durch 12, so erhält man $1216m + 539n = 1$. Der Euklidische Algorithmus liefert für das Zahlenpaar $(1216, 539)$

$$\begin{aligned}
1216 &= 2 \cdot 539 + 138 \\
539 &= 3 \cdot 138 + 125 \\
138 &= 1 \cdot 125 + 13 \\
125 &= 9 \cdot 13 + 8 \\
13 &= 1 \cdot 8 + 5 \\
8 &= 1 \cdot 5 + 3 \\
5 &= 1 \cdot 3 + 2 \\
3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\
2 &= 2 \cdot 1
\end{aligned}$$

Damit rechnet man rückwärts

$$\begin{aligned}
\mathbf{1} &= 3 - 1 \cdot 2 \\
&= 3 - (5 - 3) \;=\; 2 \cdot 3 - 5 \\
&= 2 \cdot (8 - 5) - 5 \;=\; 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \\
&= 2 \cdot 8 - 3 \cdot (13 - 8) \;=\; 5 \cdot 8 - 3 \cdot 13 \\
&= 5 \cdot (125 - 9 \cdot 13) - 3 \cdot 13 \;=\; 5 \cdot 125 - 48 \cdot 13 \\
&= 5 \cdot 125 - 48 \cdot (138 - 125) \;=\; 53 \cdot 125 - 48 \cdot 138 \\
&= 53 \cdot (539 - 3 \cdot 138) - 48 \cdot 138 \;=\; 53 \cdot 539 - 207 \cdot 138 \\
&= 53 \cdot 539 - 207 \cdot (1216 - 2 \cdot 539) \;=\; \mathbf{467 \cdot 539 - 207 \cdot 1216} \\
&= 251713 - 251712
\end{aligned}$$

Somit ist$(m, n) = (-207, 467)$ Lösung der Gleichung.

Anhang F

Material zum Themenblock 02 - Einführung in Äquivalenzrelationen

Im Folgenden findet man den Text Hoffmann (2013), der den Studierenden bereitgestellt wurde.

Einführung in Äquivalenzrelationen

MAX HOFFMANN

2. Oktober 2013

Inhaltsverzeichnis

Dieser Text richtet sich an Hörerinnen und Hörer der Veranstaltung „Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten“ im Wintersemester 2013/2014 an der Universität Paderborn.

1 Motivation und Definition

Wir wollen uns in diesem Text mit einer speziellen Art von Relation beschäftigen, welcher in der Mathematik an vielen Stellen eine wichtige Bedeutung zukommt. Dazu erinnern wir uns zunächst an die Definition einer Relation im Allgemeinen.

Definition 1.1 (Relation auf zwei Mengen)
Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ beliebige Mengen. Eine Relation R auf $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist eine Teilmenge des Kartesischen Produktes $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Notation. Stehen zwei Elemente $a \in \mathcal{A}$ und $b \in \mathcal{B}$ zueinander in Relation, so schreiben wir

$$(a, b) \in R \text{ oder } aRb.$$

■

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass eine Relation nicht unbedingt mit einer intuitiven Vorstellung verknüpft ist. Dies zeigt Teil (iii) des folgenden

Beispiel 1.2

(i) Eine der wohl bekanntesten Relationen ist „=“. Sie setzt zwei reelle Zahlen in Beziehung und ist somit Teilmenge des kartesischen Produktes $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Es gilt z.B.

$$(1, 1), (\pi, \pi), (0.5, 0.5) \in = .$$

Die bekanntere Notation an dieser Stelle ist $1 = 1, \pi = \pi$ bzw. $0.5 = 0.5$.

(ii) Die aus der Schule bekannte „<“ Beziehung zwischen zwei Zahlen definiert eine Relation auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Dabei gilt z. B.
$$(1,2),(3,4),(23,42) \in < .$$
Auch hier können wir die Notation $1 < 2, 3 < 4, 23 < 42$ verwenden.

(iii) Wir definieren
$$R := \{(1,3),(7,2),(5,42),(23,4711),(4711,23)\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$
R definiert als Teilmenge des kartesischen Produktes $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ eine „sinnlose“, doch formal korrekte Relation auf den natürlichen Zahlen.

■

Wie man in Beispiel 1.2(iii) gut sehen kann, bietet das Konzept einer Relation wenig Einschränkungen und es erscheint somit sinnvoll spezielle Relationen anhand gewisser Eigenschaften herauszustellen.

Ein Kandidat für eine Relation, die man als *besonders* bezeichnen mag, ist die =-Relation aus Beispiel 1.2(i). Man kann für reelle Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ mehrere interessante Eigenschaften erkennen, die für die Darstellung einer Gleichheit auch wünschenswert sind. Offensichtlich ist jede Zahl zu sich selbst *gleich*, es gilt also $a = a$. Ein weiterer Punkt ergibt sich durch eine vorhandene Symmetrie im Sinne von: Wenn $a = b$ gilt, so gilt auch $b = a$. Eine dritte Eigenschaft lässt sich formulieren durch: Wenn $a = b$ und $b = c$ gelten, so gilt auch $a = c$.

Diese drei Eigenschaften sollen uns als Grundlage für die Definition sogenannter Äquivalenzrelationen dienen.

Definition 1.3 (Äquivalenzrelation)
Sei $\mathcal{M}$ eine Menge und $\sim$ eine Relation auf $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$. Wir nennen $\sim$ eine **Äquivalenzrelation** auf $\mathcal{M} \times \mathcal{M}$, wenn die folgenden Eigenschaften gelten.

(R) Für alle $x \in \mathcal{M}$ gilt: $(x, x) \in \sim$.
(alternative Notation: $x \sim x$). *(Reflexivität)*

(S) Für alle $x, y \in \mathcal{M}$ gilt: Wenn $(x, y) \in \sim$ gilt, dann gilt auch $(y, x) \in \sim$.
(alternative Notation: Aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$.) *(Symmetrie)*

(T) Für alle $x, y, z \in \mathcal{M}$ gilt: Wenn $(x, y) \in \sim$ und $(y, z) \in \sim$ gilt, so gilt auch $(x, z) \in \sim$.
(alternative Notation: Aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt $x \sim z$.) *(Transitivität)*

■

Offenbar erfüllt z. B. „=“ die Bedingungen, während „<“ keine Äquivalenzrelation definiert, da (R) und (S) verletzt werden.

2 Äquivalenzklassen

Wir wollen ein weiteres Beispiel für eine Äquivalenzrelation betrachten.

Beispiel 2.1
Sei $\mathcal{S}$ eine Menge von Schülern, die an verschiedenen Tischen in einem Klassenraum sitzen. Wir definieren eine Relation $\sim$ auf der Menge aller Schüler durch
$$a \sim b :\Leftrightarrow a \text{ sitzt am selben Tisch wie } b, \quad a, b \in \mathcal{S}.$$
Wir zeigen, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf S definiert.

Beweis. Seien $a, b, c \in \mathcal{S}$. Wir zeigen die Eigenschaften reflexiv, symmetrisch und transitiv ((R),(S) und (T)).

(R) Offensichtlich sitzt jeder Schüler am selben Tisch wie er selbst, also gilt $a \sim a$.

(S) Es gelte $a \sim b$. Dann sitzt a am selben Tisch wie b. Also sitzt auch b am selben Tisch wie a und es folgt $b \sim a$.

(T) Es gelte $a \sim b$ und $b \sim c$. Also sitzt a am selben Tisch wie b und b am selben Tisch wie c. Offenbar sitzt dann auch a am selben Tisch wie c, woraus $a \sim c$ folgt.

Da alle Eigenschaften erfüllt sind, definiert $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{S}$. ∎

Anhand dieses Beispiels wollen wir uns eine andere wichtige Eigenschaft von Äquivalenzrelationen verdeutlichen. Offenbar können wir die Schüler, die an einem Tisch sitzen zusammenfassen. Somit erhalten wir für jeden Tisch (an dem mindestens ein Schüler sitzt) eine Menge von Schülern. Sitzen nun Markus und Claudia am selben Tisch, so ist es egal, ob wir vom „Tisch an dem Claudia sitzt" oder von „Tisch an dem Markus sitzt" sprechen - beide Namen repräsentieren den selben Tisch und stehen somit für die selbe Menge von Schülern.

Dieses Konzept lässt sich auch allgemein für Äquivalenzrelationen beschreiben. Diese sogenannten Äquivalenzklassen bildet den Gegenstand von

Definition 2.2
Seien $\mathcal{M} \neq \emptyset$ eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{M}$. Sei ferner $x \in \mathcal{M}$. Dann nennen wir die Menge

$$\{y \in \mathcal{M} \mid x \sim y\}$$

die **Äquivalenzklasse** von x bezüglich $\sim$.

Wir schreiben dafür $[x]_\sim$ bzw. $[x]$, wenn klar ist, um welche Relation es sich handelt.

Die Elemente einer Äquivalenzklasse bezeichen wir als **Repräsentanten** und die Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$ bezeichnet man mit $\mathcal{M} /\!\sim$.

Es gilt also der folgende Zusammenhang

$$x \in [x]_\sim = \{y \in \mathcal{M} \mid x \sim y\} \in \mathcal{M} /\!\sim .$$

∎

Wir wollen diese formale Definition wiederum mit einigen Beispielen untermauern. Dabei sei darauf hingewiesen, dass an dieser Stelle **nicht** bewiesen wurde, dass es sich bei den nachfolgenden Relationen tatsächlich um Äquivalenzrelationen handelt. Die entsprechenden Beweise sind jedoch Teil des zu diesem Themenblock gehörenden Übungsmaterials.

Beispiel 2.3

(i) Die bereits eingeführten Restklassen sind Beispiele für Äquivalenzklassen. Daher steht auch die obige Notation nicht im Konflikt mit der bereits bekannten Schreibweise für Restklassen.

(ii) Die Kongruenz von Dreiecken definiert eine Äquivalenzrelation, wobei die Äquivalenzklassen aus den jeweils zueinander kongruenten Dreiecke bestehen

(iii) Die Äquivalenzklassen bezüglich der „=" - Relation sind einelementige Mengen, bestehend aus nur einer Zahl.

∎

3 Wichtig Sätze zum Themengebiet

Abschließend wollen wir noch zwei wichtige, scheinbar selbstverständliche, jedoch nicht offensichtlich korrekte Sätze aus dem Dunstkreis der Äquivalenzrelationen vorstellen und beweisen.

Im Hinblick auf unsere Schüler aus Beispiel 2.1 erscheint es sinnvoll, dass der Schnitt unterschiedlicher Äquivalenzklassen leer ist. Schließlich sitzt jeder Schüler auch nur an einem Tisch. Dies belegt

Satz 3.1
Seien $\mathcal{M} \neq \emptyset$ eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{M}$. Wir zeigen, dass alle Äquivalenzklassen disjunkt sind.

Beweis. Um den Beweis zu führen wählen wir zwei beliebige Äquivalanzklassen aus. Für den Fall, dass die Relation nur eine Äquivalenzklasse hat, ist nichts zu zeigen. Wir nehmen also an, dass $\sim$ mindestens zwei Äquivalenzklassen besitzt.

Seien $x, y \in \mathcal{M}$ mit $[x]_\sim \cap [y]_\sim \neq \emptyset$. Dann gibt es $z \in \mathcal{M}$ mit $z \in [x]_\sim$ und $z \in [y]_\sim$. Nach Definition folgt $x \sim z$ und $y \sim z$. Wegen Symmetrie folgt $z \sim y$ und wegen der Transitivität erhalten wir somit $x \sim y$. Dann gilt für alle $x' \in [x]_\sim$ wieder wegen Definition und Symmetrie $x' \sim x$ und wegen der Transitivität $x' \sim y$. Dies bedeutet wiederum $x' \in [y]_\sim$. Also erhalten wir $[x]_\sim \subseteq [y]_\sim$.

Mit analoger Argumentation zeigen wir $[x]_\sim \supseteq [y]_\sim$ und können somit $[x]_\sim = [y]_\sim$ schließen. Damit haben wir gezeigt, dass zwei Klassen, wenn Sie nicht disjunkt sind, gleich sein müssen und umgekehrt gilt also, dass zwei ungleiche Äquivalenzklassen immer disjunkt sind. Damit haben wir die Behauptung gezeigt.

■

Daraus folgt direkt die wichtige Eigenschaft der eindeutigen Zugehörigkeit zu einer Äquivalenzklasse.

Satz 3.2
Sei $\mathcal{M} \neq \emptyset$ eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{M}$. Sei ferner $x \in \mathcal{M}$. Wir zeigen, dass x zu genau einer Äquivalenzklasse, nämlich $[x]_\sim$ gehört.

Beweis. Sei $y \in \mathcal{M}$. Nach Definition gilt $x \in [x]_\sim$. Gilt dann auch $x \in [y]_\sim$, so ist offensichtlich $[x]_\sim \cap [y]_\sim \neq \emptyset$. Wegen Satz 3.1 folgt dann schon $[x]_\sim = [y]_\sim$. Damit ist die Behauptung bewiesen. ■

Anhang G

Eidestattliche Versicherung

Hiermit versichere ich, MAX HOFFMANN, dass ich die Bachelorarbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, alle Ausführungen, die anderen Schriften wörtlich oder sinngemäß entnommen wurden, kenntlich gemacht sind und die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Fassung noch nicht Bestandteil einer Studien- oder Prüfungsleistung war.

Paderborn, den 22. Mai 2014