UNIVERSITÄT PADERBORN
Die Universität der Informationsgesellschaft

BACHELORARBEIT

zur Erlangung des Grades
Bachelor of Education

Klassische Konstruktionsprobleme als Beispiel für die Integration historischer Aspekte in den Mathematikunterricht

WINTERSEMESTER 2016/17

Autor:
JANA POSTMA
Matrikelnummer 7005411
Rathenaustraße 24
33102 Paderborn
E-Mail: pjana@mail.upb.de

Erster Prüfer:
PROF. DR. JOACHIM HILGERT

Zweiter Prüfer:
JUN.-PROF. DR. TOBIAS WEICH

Abgabe: 9. März 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **5**

2 Grundlagen **7**

2.1 Geschichte der Geometrie 7

2.2 Drei klassische Konstruktionsprobleme 8

2.2.1 Mathematik-didaktische Sichtweise auf Konstruktionen 9

2.2.2 Mathematische Präzisierung von Konstruktionen mit Zirkel und Lineal . . 10

2.2.3 Papierfaltkonstruktionen im Vergleich mit Zirkel-und-Lineal Konstruktionen 29

2.2.4 Reflexion der mathematischen Arbeitsweise 33

3 Praktischer Teil **35**

3.1 Inhaltliche Einordnung der Winkeldrittelung in den Kernlehrplan Mathematik NRW 35

3.2 Planung eines Unterrichtsvorhabens zum geschichtlichen Thema Winkeldrittelung 37

3.2.1 Voraussetzungen 38

3.2.2 Didaktische Aspekte 38

3.2.3 Methodische Aspekte 40

3.2.4 Tabellarischer Verlauf 43

4 Fazit der vorliegenden Arbeit im Gesichtspunkt der Unterrichtsplanung **45**

4.0.1 Reflexion des persönlichen Arbeitsprozesses 47

Abbildungsverzeichnis **51**

Literaturverzeichnis **51**

A Mathematische Grundlagen **53**

B Materialien zum Unterrichtsvorhaben **57**

C Ehrenwörtliche Erklärung **77**

Kapitel 1

Einleitung

Schülerinnen und Schüler sollen mithilfe des Mathematikunterrichts die Mathematik als geistige Schöpfung wahrnehmen und dadurch die Struktur dieser erkennen. Dies ist als ein wesentliches Ziel des Mathematikunterrichts in die Kernlehrpläne verankert [NRW07, S. 11], [NRW14, S.11]. Doch als Lehrperson stellt man sich die Frage, wie man dieses und weitere Ziele nun konkret im Unterricht wahrnehmen kann und welche Inhalte dabei helfen.

In dieser Arbeit soll untersucht werden, wie historische Aspekte einen Mehrwert bei der Erreichung von Unterrichts- und Kernlehrplanzielen bieten können. Anhand des Konstruktionsproblems der Winkeldrittelung soll ein konkretes Unterrichtsvorhaben als Beispiel für die Integration historischer Aspekte in den Mathematikunterricht entwickelt werden, welches einen Beitrag dazu leisten kann, die Ziele des Mathematikunterrichts zu erreichen.

Dazu wird das Konstruktionsproblem der Winkeldrittelung innerhalb der Geschichte der Geometrie dargestellt und im Grundlagenteil wird das für die Lehrperson wichtige Hintergrundwissen zu dieser Thematik erarbeitet. Hierfür wird zunächst eine mathematik-didaktische Sichtweise auf Konstruktionen beschrieben. Die dort betrachteten Werkzeuge Zirkel und Lineal werden anschließend mathematisch präzisiert. Da die Winkeldrittelung die Konstruierbarkeit von Strecken bestimmter Längen fordert, wird erarbeitet, welche Zahlen sich konkret konstruieren lassen. Dieses Wissen kann anschließend auf die Winkeldrittelung angewendet werden. Neben Zirkel und Lineal werden auch die Hände als Werkzeug für das Falten von Papier betrachtet. Die Unterschiede dieser beiden Werkzeuge werden herausgestellt und eine Papierfaltkonstruktion zur Winkeldrittelung wird angegeben.

Mit diesem Hintergrundwissen wird im nächsten Kapitel ein konkretes Unterrichtsvorhaben zur Winkeldrittelung entwickelt. Ziel des Vorhabens ist, dass die Schülerinnen und Schüler die Unterschiede der beiden genannten Werkzeuge wahrnehmen können. So soll mit der Verbindung zur Geschichte der Geometrie ein veränderter Blick auf diese Teilstruktur der Mathematik entstehen.

Abschließend wird die Arbeit unter dem Gesichtspunkt der Unterrichtsplanung reflektiert.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Geschichte der Geometrie

Da das spätere Unterrichtsvorhaben den zentralen Aspekt, die Struktur der Mathematik anhand des Konstruktionsproblems der Winkeldrittelung wahrzunehmen, beinhalten soll, wird in diesem Abschnitt ein Teil der Geschichte der Geometrie bis hin zu den Werkzeugen Zirkel und Lineal genauer betrachtet. So soll die Entwicklung der Struktur der Geometrie in Teilen herausgearbeitet werden. Die Informationen dazu stammen aus [SS03, S. 6-40].

Die Geschichte der Geometrie begann schon vor mehr als 40000 Jahren, als die Menschen geometrische Objekte nutzten, um zum Beispiel Tongefäße zu verschönern. Dabei wurden sie stets von der Natur inspiriert und verwendeten beispielsweise den Kreis, weil sie ihn als Querschnitt eines Baumstamms kannten. Im weiteren Verlauf der Geschichte wurden immer mehr Anstöße durch alltägliche Situationen gegeben, zum Beispiel durch die Vermessung eines Feldes oder den Bau eines Hauses.

Die Ägypter erweiterten diese Ansätze ab ca. 2000 v. Chr., indem sie Flächen und Volumina explizit berechneten. Dabei sind in alten Schriften immer wieder Aufgaben gegeben, in denen an einem Beispiel gezeigt wird, wie solche Berechnungen durchgeführt werden. Allerdings konnten nie allgemeingültige Formeln entdeckt werden, sodass sich behaupten lässt, dass diese ausschließlich mit Zahlenbeispielen gerechnet haben. So ließ sich unter Anderem eine Fläche berechnen, indem man ein Streifenmaß nutzte. Für Volumina wurde hingegen mit Schichtmaßen gerechnet. Daraus lässt sich schließen, dass die Ägypter eher Näherungen als exakte Formeln verwendeten.

Die babylonischen Mathematiker (ca. 1900 bis 1600 v. Chr.) konnten einen etwas höheren Entwicklungsstand erreichen: es war ihnen zum Beispiel möglich, eine Näherung zur Berechnung der Quadratwurzel anzugeben.

Auch wenn die vorgriechischen Kulturen Eigenschaften verschiedener geometrischer Objekte erkannt und genutzt haben, waren es erst die Griechen, die nach Begründungen gesucht haben. Man bezeichnet diese auch als Begründer der Wissenschaft von der Natur, denn sie haben die aus den vorherigen Kulturen überlieferten Regeln systematisiert, begründet und daraus ein Theoriegebilde erzeugt. So haben die frühen Naturphilosophen das deduktive Vorgehen der

Mathematik etabliert. Zu diesen Philosophen zählt auch Thales, der als der erste Mathematiker bezeichnet wird. Er beschäftigte sich mit den ältesten Elementen der Geometrie, dem Punkt, der geraden Linie und dem Kreis, und fügte weiterhin den Winkel hinzu. So entstanden wichtige Aussagen wie die des Peripheriewinkelsatzes. In der Ionischen Periode entwickelte auch Pythagoras die reine Mathematik und gab somit einen Gegensatz zum Handeln aus praktischen Lebenserfordernissen. Im Zuge seiner Lehre über einfache Zahlenverhältnisse kam er zu der Erkenntnis der Existenz irrationaler Verhältnisse und löste somit die erste Grundlagenkrise der Mathematik aus.

In der späteren Athenischen Periode (ca. 450-300 v. Chr.) entwickelte sich das Idealbild der Mathematik als eine rein deduktiv aufgebaute Wissenschaft zwischen der Welt der Ideen und der der erfahrbaren Dinge. In dieser Zeit erweiterte Eudoxos die Proportionenlehre der Pythagoreer auf irrationale Verhältnisse. Am Ende dieser Periode beschäftigte Euklid sich mit der Elementargeometrie und entwickelte so seine Elemente, die sich auf mit Zirkel und Lineal durchführbare Konstruktionen beziehen.

2.2 Drei klassische Konstruktionsprobleme

Im Laufe der Geschichte der Geometrie stießen die Mathematiker auf Probleme, die sie mit den häufig verwendeten Werkzeugen Zirkel und Lineal nicht lösen konnten. Dies resultierte vermutlich aus einem bewussten Einschränken in den verwendeten Werkzeugen, um die Grenzen dieser zu erfahren. Drei klassische Konstruktionsprobleme sind die Würfelverdopplung, welche die Konstruktion der Seitenlänge eines Würfels mit doppeltem Volumen verlangt, die Winkeldrittelung und die Quadratur des Kreises. Im Folgenden wird der Fokus auf die Drittelung eines beliebigen Winkels gelegt.

Das Konstruktionsproblem entstand vermutlich, als Mathematiker für astronomische Zwecke eine Sehnentafel des Ptolemaios aufstellen wollten. Eine Sehnentafel ermöglicht das Messen von Entfernungen aus der Bestimmung von Winkeln und Strecken. Dabei ergab sich das Problem, dass aus der Sehne für $3°$ die Sehne für $1°$ erzeugt werden musste [SS03, S. 44]. Hippias von Elis (um 420 v. Chr.) war damit der Erste, der sich intensiv mit diesem Konstruktionsproblem der Winkeldrittelung beschäftigte [Hen12, S. 50]. Nachdem dieser das Problem nicht exakt lösen konnte, wurden auch in den folgenden Jahrhunderten nur Näherungen entwickelt, welche oft die zugelassenen Hilfsmittel Zirkel und Lineal erweiterten. So gab beispielsweise Archimedes eine Lösung an, indem er den zugelassenen Hilfsmitteln ein „Einschiebelineal" hinzufügte [Hen12, S. 66]. Dies nutzt die Eigenschaft, dass eine Strecke markiert und passend angelegt werden kann. Mithilfe der Algebra konnte Pierre Laurent Wantzel (1814-1884) als Erster beweisen, dass es unmöglich ist, einen Winkel von $60°$ und somit einen beliebigen Winkel mit Zirkel und Lineal zu dritteln [Hen12, S. 50].

Im Jahr 1994 gab Kazuo Haga einen neuen Zugang zu dem Konstruktionsproblem, indem er eine Verbindung von Mathematik und Origami etablierte. Origami beschreibt das reine Falten eines quadratischen Stück Papiers und diente ursprünglich der Erzeugung von künstlerischen Objekten. Die Verbindung zwischen Mathematik und Origami baut auf den von Humiaki Huzita im Jahr 1992 entwickelten Grundkonstruktionen von Papierfaltkonstruktionen auf. Mit Hilfe dieser lässt sich auch die Winkeldrittelung durchführen [Hen12, S. 59-60].

Einleitend soll im Folgenden zunächst eine mathematik-didaktische Sichtweise auf Konstruktionen eingenommen werden. Anschließend werden die Werkzeuge Zirkel und Lineal mathematisch präzisiert. Anhand des Beispiels der Winkeldrittelung soll gezeigt werden, dass diese Konstruktion tatsächlich nicht mit Zirkel und Lineal zu lösen ist. Hierzu wird der Beweis von Pierre Laurent Wantzel aufgegriffen. Anschließend wird die Möglichkeit der Winkeldrittelung anhand von Papierfaltkonstruktionen erarbeitet, indem zunächst die erwähnten Grundkonstruktionen genauer vertieft werden.

2.2.1 Mathematik-didaktische Sichtweise auf Konstruktionen

Konstruieren bedeutet das Erzeugen, Herstellen oder Zeichnen geometrischer Objekte mithilfe gegebener Werkzeuge. In der Schulmathematik kann das Konstruieren dieser geometrischen Objekte über verschiedene Zugänge erarbeitet werden. Zugänge zum Konstruieren lassen sich beispielsweise durch Zeichnungen oder das Falten von Papier realisieren. [LW14, S. 55]. Durch verschiedene Zugänge zum Konstruieren wird das Verwenden unterschiedlicher Werkzeuge ermöglicht.

Soll das Konstruieren anhand von Zeichnungen realisiert werden, so bieten sich die wohl bekanntesten Werkzeuge Zirkel und Lineal an. Dabei darf das Lineal nicht zum Abtragen von Längen genutzt werden, sondern gibt lediglich die Möglichkeit, gerade Linien zu ziehen. Das Falten von Papier wird in der Schule vorrangig genutzt, um den Schülerinnen und Schülern den Aufbau geometrischer Körper näher zu bringen. Dies bietet aber ebenfalls einen engen Zusammenhang zum Konstruieren. Mit den Händen als Werkzeug können durch das Falten Konstruktionen durchgeführt werden, die über die Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen hinausgehen. Dies liegt daran, dass bestimmte Einschiebefaltungen möglich sind, die sich mit Zirkel und Lineal nicht nachstellen lassen. In Kapitel 1.3.3 und auch in dem später geplanten Unterrichtsvorhaben werden diese Werkzeuge genauer verglichen. [LW14, S. 57]

Unabhängig von den verwendeten Werkzeugen wird beim Konstruieren vom Arbeiten mit idealen Objekten ausgegangen, wie zum Beispiel einem Punkt ohne Dimension oder einer Linie ohne Dicke. Die real durchgeführten Konstruktionen sind lediglich Annäherungen an diese idealen Konstruktionen.

Jede Konstruktion beruht auf einer Ausgangslage, das heißt, dass eine Menge geometrischer Objekte, die in bestimmter Beziehung zueinander stehen, gegeben ist. Ausgehend von dieser Ausgangslage wird mithilfe von endlichen Konstruktionsschritten, die auf von den Werkzeugen abhängigen Grundkonstruktionen beruhen, eine Zielkonfiguration erreicht, welche wieder eine Menge geometrischer Objekte, die in Beziehung zueinander stehen, beschreibt. Die Zielkonfiguration beinhaltet und erweitert die Ausgangslage. [LW14, S. 64-65]

Das Erstellen von Konstruktionsbeschreibungen mithilfe der beschriebenen Ausgangslage, den Konstruktionsschritten und der Zielkonfiguration bietet den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, ihren Lösungsweg zu dokumentieren und fördert so die Fähigkeit, ihre Handlungen zu verbalisieren. Zudem können sowohl die Schülerinnen und Schüler als auch die Lehrperson auf diese Weise den Lösungsweg auf der Zeichenebene nachvollziehen und überprüfen. [LW14, S. 67]

2.2.2 Mathematische Präzisierung von Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

Es wurde nun betrachtet, was Konstruktionen mathematik-didaktisch bedeuten und über welche Zugänge das Konstruieren in der Schulmathematik realisiert werden kann. Die Werkzeuge Zirkel und Lineal, die für den Zugang über das Zeichnen verwendet werden können, sollen im folgenden Kapitel mathematisch präzisiert werden, um das Konstruktionsproblem der Winkeldrittelung genauer hinterfragen zu können. Dazu werden zunächst die Grundkonstruktionen, die mit Zirkel und Lineal möglich sind, definiert [Hen12, S. 54]:

(K1) Das Legen einer Verbindungsgerade durch zwei verschiedene Punkte;

(K2) Das Konstruieren des Schnittpunktes von zwei nicht parallelen Geraden;

(K3) Das Zeichnen eines Kreises k um einen gegebenen Punkt M als Mittelpunkt durch einen weiteren Punkt P, sodass der Radius r des Kreises dem Abstand der Punkte M und P entspricht;

(K4) Das Konstruieren der Schnittpunkte zweier Kreise oder eines Kreises mit einer Geraden.

Werden diese vier Grundkonstruktionen beliebig aber endlich oft hintereinander durchgeführt, so wird dies als Zirkel-und-Lineal-Konstruktion bezeichnet.

Die in dem Konstruktionsproblem verlangte Winkeldrittelung hängt mit der Konstruktion einer Strecke mit bestimmter Länge, die in Satz 17 beschrieben wird, zusammen. Um herausfinden zu können, ob der gedrittelte Winkel konstruierbar ist, muss also geprüft werden, ob sich die Zahl, welche die Länge der Strecke beschreibt, konstruieren lässt. Dazu soll zunächst die Konstruierbarkeit einer Zahl aus gegebenen Streckenlängen definiert werden:

Definition 1 (Konstruierbarkeit von Zahlen)**.**
Es wird von einem Zahlenstrahl mit den Einheitspunkten O, E mit $|\overline{OE}| = 1$ ausgegangen. [Hen12, S. 56].
Eine Zahl x, repräsentiert als Strecke $\overline{OX}$ der Länge $|\overline{OX}| = x$, ist genau dann aus gegebenen Strecken *konstruierbar*, wenn sie durch endliches, aufeinanderfolgendes Durchführen der Grundkonstruktionen konstruiert werden kann.

Es stellt sich die Frage, welche Zahlen sich mit dieser Definition der Konstruierbarkeit denn nun genau aus gegebenen Strecken darstellen lassen. Da sich diese Zahlen im Laufe des Kapitels in bestimmte Erweiterungskörper einordnen lassen, soll zunächst überlegt werden, welche Rechenoperationen mit Hilfe von Zirkel und Lineal darstellbar sind. Hierfür werden der Strahlensatz, der Höhensatz [GPS04b] und der Thaleskreis [GPS04a] genutzt. Des Weiteren wird die Konstruktion einer parallelen Geraden benötigt. Aufgrund besserer Übersicht wird dies als einzelnes Beispiel vorweg erarbeitet. Den Inhalten liegen die hochschulmathematischen Kenntnisse der Geometrie des Lehramtsstudiengangs zugrunde.

Beispiel 2 (Konstruktion der parallelen Geraden durch einen Punkt im $\mathbb{R}^2$).

Ausgangslage:

Gegeben sind eine Gerade g durch zwei Punkte A, B und ein weiterer Punkt C, der nicht auf der Geraden liegt. Es soll nun die *parallele Gerade* zu g durch den Punkt C konstruiert werden. Die Grundlagen hierfür sind [Wei16] entnommen. Zur besseren Übersicht ist die Konstruktion in Abbildung 2.1 dargestellt, wobei die Ausgangslage und die Zielkonfiguration etwas stärker gezeichnet sind. Die entsprechenden Grundkonstruktionen sind in den einzelnen Konstruktionsschritten genannt.

Konstruktionsschritte:

1. Konstruieren der Strecke $\overline{AC}$ $(K1)$;
2. Zeichnen eines Kreises k_1 um A durch C $(K3)$;
3. Zeichnen eines Kreises k_2 um C durch A $(K3)$;
4. Es existieren zwei Schnittpunkte von k_1 und k_2, die mit S_1 und S_2 bezeichnet werden $(K4)$;
5. Zeichnen der Geraden durch S_1 und S_2 $(K1)$. Dies ist die Mittelsenkrechte von A und C und wird m_{AC} genannt.;
6. Die Mittelsenkrechte m_{AC} schneidet die Strecke $\overline{AC}$ im Mittelpunkt M von A und C $(K2)$;
7. Zeichnen der Geraden h durch B und M $(K1)$;
8. Zeichnen eines Kreises k_3 um M durch B $(K3)$;
9. Bezeichnen des Schnittpunktes der Geraden h und des Kreises k_3 mit B' $(K4)$;
10. Legen der Geraden i durch C und B' $(K1)$. Dies ist die gesuchte parallele Gerade.

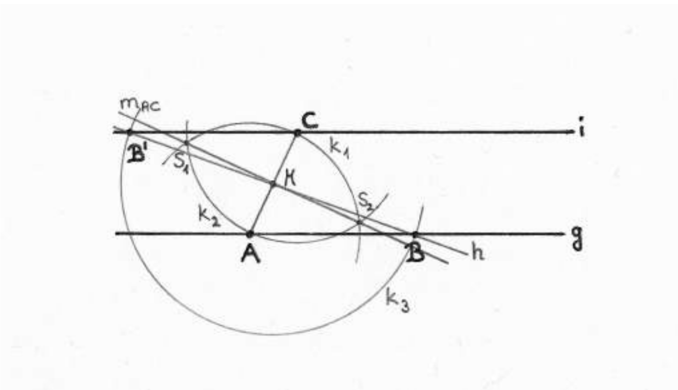


Abbildung 2.1: Konstruktion der parallelen Geraden

Durchführbarkeit:

Die Durchführbarkeit von 1., 2. und 3. ist durch die Grundkonstruktionen gegeben. Da die Kreise k_1 und k_2 jeweils den Abstand von A und C als Radius haben, ist die Summe der beiden Radien kleiner als der Abstand der Mittelpunkte A und C. Somit müssen, wie in

[Wei16, Übung 46] beschrieben, zwei Schnittpunkte existieren, womit Schritt 4 durchführbar ist. Schritt 5 beruht ebenfalls auf den Grundkonstruktionen. Da die Mittelsenkrechte senkrecht zu der entsprechenden Strecke ist, existiert der Mittelpunkt als Schnittpunkt und Schritt 6 ist durchführbar. Die Grundkonstruktionen begründen wieder die Durchführbarkeit der Konstruktionsschritte 7 und 8. Da es zu einem Punkt auf einer Geraden immer genau zwei Punkte mit dem selben Abstand gibt (was aus der Parametrisierung der Geraden ersichtlich ist), muss es neben B noch einen weiteren Schnittpunkt B' geben und 9. ist somit ebenfalls durchführbar. Die Durchführbarkeit von 10. beruht auf den Grundkonstruktionen.

Korrektheit:

An dieser Stelle soll nun die Korrektheit der Konstruktion gezeigt werden. Sei ϱ_M die Punktspiegelung an M. Es gilt $\varrho_M(A) = C$. Punktspiegelungen lassen sich als Verknüpfung von Geradenspiegelungen darstellen, wodurch Geraden unter einer Punktspiegelung wieder auf Geraden abgebildet werden. Also ist $i := \varrho_M(g)$ eine Gerade. Gilt $C \in g$, so ist $\varrho_M(g) = g$, also $g = i$ und somit $g \parallel i$. Für $C \notin g$ gilt auch $M \notin g$. Gäbe es nun $S \in g \cap i$, dann gäbe es $S' \in g$ mit $S = \varrho_M(S') \in g$. Das ist jedoch nicht möglich, da M nicht auf g liegt und somit die Gerade durch S' und M ungleich g ist. Somit gilt $g \cap i = \varnothing$ und es folgt $g \parallel i$. [Wei16, Übung 66]

Bemerkung 3 (Abtragen von Strecken bestimmter Längen)**.**

In den folgenden Beispielen wird immer wieder das Hintereinanderauftragen von Strecken verwendet. Dies bedeutet, dass eine Strecke einer bestimmten Länge an den Startpunkt angesetzt wird und an deren Endpunkt eine weitere Strecke abgetragen wird. Dieses Abtragen der Strecke einer bestimmten Länge, welche nicht am Einheitspunkt O beginnt, konstruiert und beweist Euklid in seiner Proposition 2.

Mit diesen Grundlagen können nun nachfolgend die Konstruktionen verschiedener Rechenoperationen behandelt werden.

Beispiel 4 (Konstruktion von $a + b$, $a - b$)**.**

Es sind Strecken der Längen a und b gegeben.

- Die Zahl $a + b$, repräsentiert durch eine Strecke der Länge $a + b$, lässt sich durch Hintereinanderauftragen der Strecken der Längen a und b auf dem Zahlenstrahl darstellen.
- Um die Zahl $a - b$, repräsentiert durch eine Strecke der Länge $a - b$, zu konstruieren, müssen zwei verschiedene Fälle betrachtet werden, nämlich $a > b$ und $a \leq b$. Um diese Fälle geometrisch zu unterscheiden, wird folgende Konstruktion betrachtet:

  Ausgangslage:

  Gegeben sind zwei Strecken der Längen a, b und der Zahlenstrahl z mit dem Punkt O.

Konstruktionsschritte:

1. Zeichnen der Strecken der Längen a und b, sodass diese jeweils bei O beginnen und sich überlappen. Der Endpunkt der Strecke der Länge a wird mit A bezeichnet und der Endpunkt der Strecke der Länge b mit B;
2. Konstruktion der Senkrechten s zu z durch A nach [Wei16];
3. Zeichnen des Kreises k_1 um O durch B (K3);
4. Kennzeichnen aller Schnittpunkte von s und k_1, falls diese existieren (K4).

Durchführbarkeit:

Die Durchführbarkeit der Konstruktion ist durch die Grundkonstruktionen (K3), (K4) und [Wei16] gegebenen.

Korrektheit:

Die möglichen Fälle für die Zielkonfiguration sind in den Abbildungen 2.2, 2.3 und 2.4 skizziert. Dabei wird der Fall $a \leq b$ für die Skizzen in $a < b$ und $a = b$ aufgeteilt. Existieren keine Schnittpunkte von s und k_1, so gilt $a > b$. Dies lässt sich dadurch begründen, dass der Radius des Kreises k_1 nach Konstruktion des Kreises b entspricht und A nicht innerhalb des Kreises liegen kann, wenn die Gerade s durch A und der Kreis k_1 keine Schnittpunkte haben. Somit muss A außerhalb des Kreises k_1 liegen und da die beiden Strecken jeweils beginnend bei O auf dem Zahlenstrahl eingezeichnet wurden, folgt $a > b$.

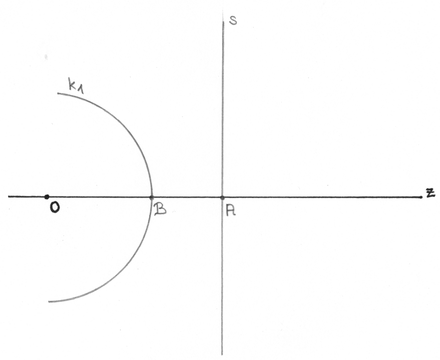


Abbildung 2.2: Konstruktion von $a - b$: Fall $a > b$

Existiert mindestens ein Schnittpunkt von s und k_1, so gilt $a \leq b$. Da z senkrecht zu s ist und A der Schnittpunkt dieser beiden Geraden ist, muss A die orthogonale Projektion von $O \in z$ sein. Existierende Schnittpunkte S_i des Kreises k_1 und der Geraden s liegen ebenfalls auf s. Aufgrund der Eigenschaft der orthogonalen Projektion und der Erkenntnis, dass der Abstand von O und B dem Radius von k_1 entspricht, folgt damit insgesamt:

$$d(O, A) \leq d(O, S_i) = r = d(O, B).$$

Daraus folgt, dass $a \leq b$ gilt.

Mit Hilfe dieser Konstruktion können nun im Folgenden die Fälle $a > b$ und $a \leq b$ geometrisch unterschieden werden:

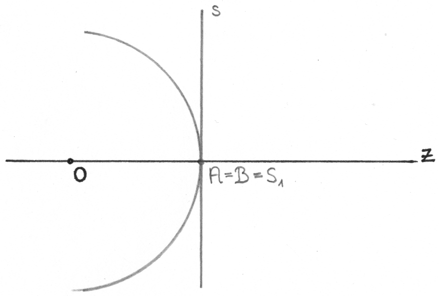


Abbildung 2.3: Konstruktion von $a - b$: Fall $a = b$

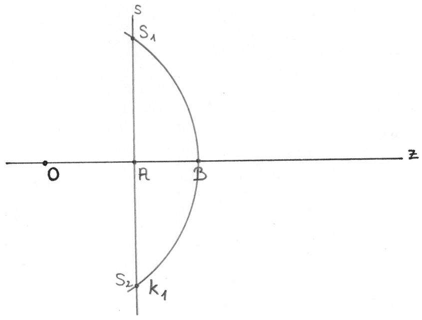


Abbildung 2.4: Konstruktion von $a - b$: Fall $a < b$

1. Es gilt $a > b$. Dann lässt sich eine Strecke der Länge $a - b$ konstruieren, indem die Strecken der Längen a und b jeweils an einem Punkt O auf dem Zahlenstrahl angesetzt werden. Der Endpunkt der Strecke der Länge a auf dem Zahlenstrahl wird mit A bezeichnet, der der Strecke der Länge b mit B. Dann wird die Strecke der Länge $a - b$ dargestellt durch die Strecke zwischen B und A.
2. Es gilt $a \leq b$. Zunächst wird die Strecke der Länge $|a - b|$ wie im ersten Fall konstruiert. Da es sich in diesem Fall allerdings um eine negative Zahl handeln kann, wird die nun bekannte Strecke auf dem Zahlenstrahl von Null nach links aufgetragen. Der Punkt, an dem die Strecke nun endet, stellt die Zahl $a - b$ dar.

Neben den Rechenoperationen $a + b$ und $a - b$ lässt sich auch $a \cdot b$ konstruieren:

Beispiel 5 (Konstruktion von $a \cdot b$)**.**

Gegeben sind Strecken der Längen a und b.

Ausgangslage:

Als Ausgangslage sind zwei Geraden g und h mit einem Schnittpunkt O gegeben. Die Strecken der Längen 1 und a sind nach Bemerkung 3 hintereinander, ausgehend vom Schnittpunkt O der Geraden, auf der Geraden g abgetragen, sodass sich die Punkte E als Endpunkt der Strecke der Länge 1 und der Punkt A als Endpunkt der Strecke der Länge a ergeben. Damit hat die Strecke $\overline{EA}$ die Länge a. Analog ist die Strecke der Länge b auf der Geraden h mit Endpunkt B dargestellt. Die Ausgangslage, die Konstruktionsschritte und die Zielkonfiguration sind in Abbildung 2.5 veranschaulicht.

Konstruktionsschritte:

1. Zeichnen der Geraden i durch die Punkte E und B $(K1)$;
2. Konstruktion der parallelen Geraden p zu i durch A nach Beispiel 2 [1];
3. Der Schnittpunkt von p und h wird mit X bezeichnet $(K2)$;
4. Zeichnen der Strecke $\overline{BX}$ $(K1)$. Dies ist die gesuchte Strecke.

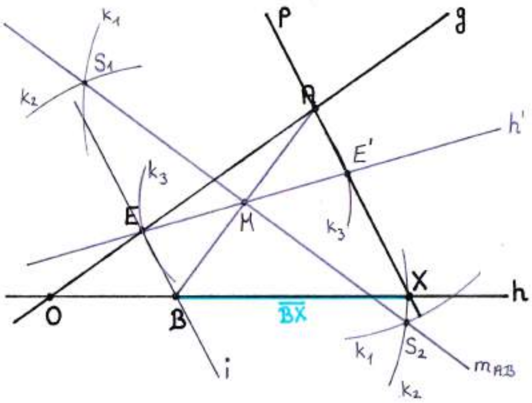


Abbildung 2.5: Konstruktion von $a \cdot b$

Durchführbarkeit:

Die Durchführbarkeit von Schritt 1 beruht auf den Grundkonstruktionen. Schritt 2 ist nach Beispiel 2 durchführbar. Da die Gerade p parallel zu der Geraden i ist und diese h in B schneidet, muss auch p einen Schnittpunkt mit h haben und 3. ist somit durchführbar. Der vierte Konstruktionsschritt basiert wieder auf den Grundkonstruktionen.

Korrekheit:

Die Korrektheit der Konstruktion wird mit dem Strahlensatz begründet. Demnach sind g und h zwei sich schneidende Geraden, also die Strahlen, die von den zwei Parallelen i und p geschnitten werden. Somit gilt

$$\frac{a}{1} = \frac{|\overline{BX}|}{b} \Leftrightarrow |\overline{BX}| = ab$$

Somit wurde die Zahl $a \cdot b$, repräsentiert durch die Strecke der Länge $a \cdot b$, konstruiert.

Ähnlich zu Beispiel 5 lassen sich auch die Rechenregeln $\frac{a}{b}$ und $r \cdot a$ mit beliebigem, aber festem $r \in \mathbb{Q}^+$ darstellen.

Beispiel 6 (Konstruktion von $\frac{a}{b}$)**.**

Gegeben sind die Strecken der Längen a und b.

[1] mit den Kreisen k_1, k_2, k_3, den Punkten S_1, S_2, M, E' und den Geraden m_{AB} und h'

Ausgangslage:

Es sind zwei Geraden g und h mit einem Schnittpunkt O gezeichnet. Die Strecken der Längen b und a sind nach Bemerkung 3 hintereinander, ausgehend vom Schnittpunkt O der Geraden, auf der Geraden g abgetragen, sodass sich die Punkte B als Endpunkt der Strecke der Länge b und A als Endpunkt der Strecke der Länge a ergeben. Auf der Geraden h ist die Strecke der Länge 1 von O ausgehend angesetzt, sodass man den Endpunkt E erhält. In Abbildung 2.6 werden die Ausgangslage, die Konstruktionsschritte und die Zielkonfiguration gezeigt.

Konstruktionsschritte:

1. Zeichnen der Geraden i durch die Punkte B und E $(K1)$;
2. Konstruktion der parallelen Geraden p zu i durch A nach Beispiel 2 [2];
3. Der Schnittpunkt von p und h wird mit X bezeichnet $(K2)$;
4. Zeichnen der Strecke $\overline{EX}$ $(K1)$. Dies ist die gesuchte Strecke.

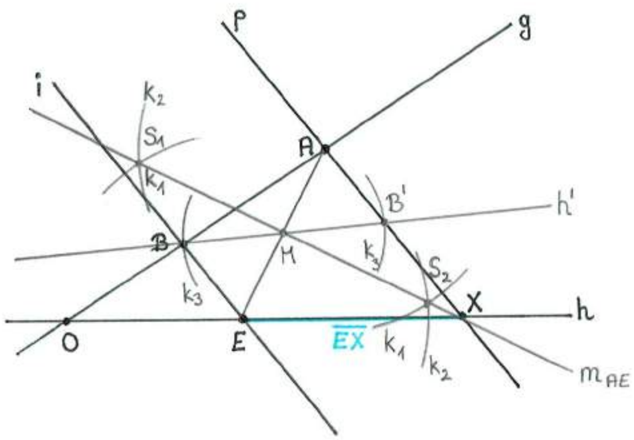


Abbildung 2.6: Konstruktion von $\frac{a}{b}$

Durchführbarkeit:

Die Durchführbarkeit ist analog zu Beispiel 5 gegeben.

Korrektheit:

Die Korrektheit der Konstruktion wird mit dem Strahlensatz begründet. Die Geraden g und h schneiden sich, sie sind also die Strahlen, die von den zwei Parallelen i und p geschnitten werden. Somit gilt

$$\frac{|\overline{EX}|}{1} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow |\overline{EX}| = \frac{a}{b}$$

Somit wurde die Rechenoperation $\frac{a}{b}$, repräsentiert durch die Strecke der Länge $\frac{a}{b}$, konstruiert.

[2] mit den Kreisen k_1, k_2, k_3, den Punkten S_1, S_2, M, B' und den Geraden m_{AE} und h'

Beispiel 7 (Konstruktion von $r \cdot a$ mit $r \in \mathbb{Q}^+$).

Gegeben sind die Strecken der Längen a und 1 und $r \in \mathbb{Q}^+$.

Ausgangslage:

Sei $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$ mit $p, q \in \mathbb{N}$. Gegeben sind zusätzlich zwei Geraden g und h mit Schnittpunkt O. Basierend auf Bemerkung 3 ist die Strecke der Länge 1 bei O beginnend zunächst q-mal und dann p-mal hintereinander auf der Geraden g abgetragen, die jeweiligen Endpunkte sind mit Q und P bezeichnet. Auf der Geraden h ist die Strecke mit der Länge a an O angesetzt und der Endpunkt mit A bezeichnet. Die Konstruktion wird in Abbildung 2.7 veranschaulicht.

Konstruktionsschritte:

1. Zeichnen der Geraden i durch die Punkte Q und A $(K1)$;
2. Konstruktion der parallelen Geraden p zu i durch P nach Beispiel 2 [3];
3. Der Schnittpunkt von p und h wird mit X bezeichnet $(K2)$;
4. Zeichnen der Strecke $\overline{AX}$ $(K1)$. Dies ist die gesuchte Strecke.

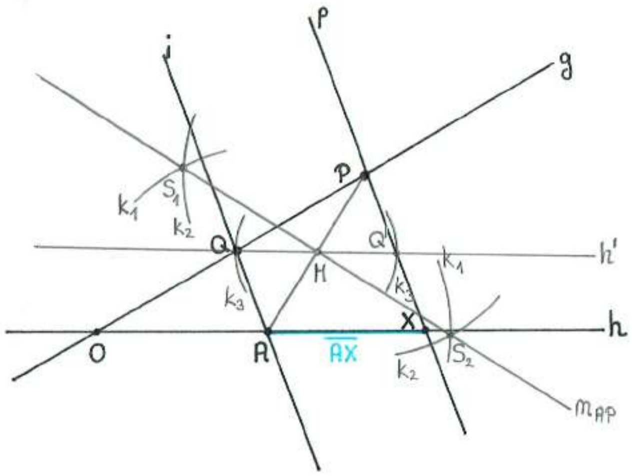


Abbildung 2.7: Konstruktion von $r \cdot a$

Durchführbarkeit:

Die Durchführbarkeit gilt analog zu Beispiel 5.

Korrektheit:

Die Korrektheit der Konstruktion folgt mithilfe des Strahlensatzes. Die Geraden g und h schneiden sich und sind somit die Strahlen, die von den zwei Parallelen i und p geschnitten werden. Folglich gilt

$$\frac{p}{q} = \frac{|\overline{AX}|}{a} \Leftrightarrow |\overline{AX}| = \frac{p}{q} \cdot a = r \cdot a$$

[3] mit den Kreisen k_1, k_2, k_3, den Punkten S_1, S_2, M, Q' und den Geraden m_{AP} und h'

Somit wurde die Konstruierbarkeit der Rechenoperation $r \cdot a$, repräsentiert durch die Strecke der Länge $r \cdot a$, gezeigt.

Die Konstruktion von $\sqrt{a}$ lässt sich im Gegensatz zu den anderen Beispielen, die bisher allesamt auf den Strahlensätzen beruhten, auf Grundlage des Höhensatzes und des Thaleskreises durchführen:

Beispiel 8 (Konstruktion von $\sqrt{a}$)**.**

Es sind Strecken der Längen 1 und a gegeben.

Ausgangslage:

Es ist eine Gerade g gegeben. Von einem Punkt $O \in g$ sind zuerst die Strecke der Länge 1 mit Endpunkt E und schließlich beginnend bei E die Strecke der Länge a mit Endpunkt A entlang g aufgetragen. Die Ausgangslage, die Konstruktionsschritte und die Zielkonfiguration sind in Abbildung 2.8 dargestellt.

Konstruktionsschritte:

1. Konstruktion der Senkrechten h zu g durch E:
   - 1.1 Zeichnen eines Kreises k_1 um E durch O $(K3)$;
   - 1.2 Benennen des weiteren Schnittpunktes von k_1 und g mit S_1 $(K4)$;
   - 1.3 Zeichnen eines Kreises k_2 um O durch S_1 $(K3)$;
   - 1.4 Zeichnen eines Kreises k_3 um S_1 durch O $(K3)$;
   - 1.5 Die Schnittpunkte von k_2 und k_3 werden mit S_2 und S_3 bezeichnet $(K4)$;
   - 1.6 Zeichnen der Geraden h durch S_2 und S_3 $(K1)$. Dies ist die Senkrechte zu g durch E;
2. Konstruktion des Mittelpunktes der Strecke $\overline{OA}$:
   - 2.1 Zeichnen des Kreises k_4 um A durch O $(K3)$;
   - 2.2 Zeichnen des Kreises k_5 um O durch A $(K3)$;
   - 2.3 Die Schnittpunkte von k_4 und k_5 werden S_4 und S_5 genannt $(K4)$;
   - 2.4 Zeichnen der Geraden i durch S_4 und S_5 $(K1)$;
   - 2.5 Der Schnittpunkt von g und i wird M genannt $(K2)$. Dies ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{OA}$;
3. Zeichnen eines Kreises k_6 um M durch A $(K3)$;
4. Ein Schnittpunkt von h und k_6 wird P genannt $(K4)$;
5. Es wird O mit P, P mit A und P mit E verbunden $(K1)$. Die Strecke $\overline{PE}$ hat die gesuchte Länge $\sqrt{a}$.

Durchführbarkeit:

Der Konstruktionsschritt 1.1 ist durchführbar nach den Grundkonstruktionen. 1.2 ist durchführbar, da es zu einem Punkt einer Geraden immer genau zwei Punkte der Geraden mit

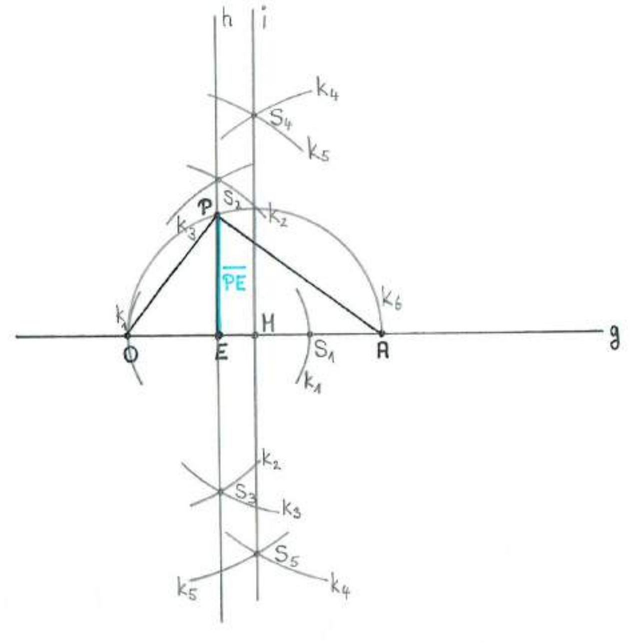


Abbildung 2.8: Konstruktion von $\sqrt{a}$

demselben Abstand gibt (was aus der Parametrisierung der Geraden ersichtlich ist). 1.3 und 1.4 sind erneut auf Grundlage der Grundkonstruktionen durchführbar. Da O und A weniger weit auseinander liegen als das doppelte des Radius der Kreise k_2 und k_3, ist auch dieser Schritt möglich. Die Schritte 1.6, 2.1 und 2.2 beruhen auf den Grundkonstruktionen. Die Schnittpunkte S_4 und S_5 existieren nach dem gleichen Argument der Existenz von S_2 und S_3. 2.4 ist wieder eine Grundkonstruktion. M existiert, da i die Mittelsenkrechte von O und A ist und $O, A \in g$ gilt. 3. ist nach den Grundkonstruktionen durchführbar. Der Schnittpunkt P existiert, weil $O, E, M \in g$ gilt, der Abstand von O zu M kleiner ist als der von E zu M und $E \in h$ gilt. Auch 5. basiert wieder auf den Grundkonstruktionen.

Korrektheit:

Zunächst soll die Korrektheit der Konstruktion der Senkrechten h gezeigt werden. Alle Punkte auf k_2 haben denselben Abstand wie S_1 zu O. Außerdem gilt, dass alle Punkte auf k_3 diesen Abstand zu S_1 haben. Daraus folgt, dass S_2 und S_3 jeweils den gleichen Abstand zu O und S_1 haben und sie somit auf der Mittelsenkrechten von O und S_1 liegen. Da der Mittelpunkt von O und S_1 aber gerade E ist, entspricht die Mittelsenkrechte der Senkrechten zu g durch E. Nun muss noch gezeigt werden, dass $|\overline{PE}| = \sqrt{a}$ gilt. k_6 ist ein Thaleskreis durch P, O und A, da O und A auf der Geraden g durch den Mittelpunkt M von k_6 liegen. Somit ist der Winkel $\angle APO$ ein rechter und nach dem Höhensatz gilt:

$$|\overline{PE}|^2 = 1 \cdot a = a \;\Rightarrow\; |\overline{PE}| = \sqrt{a}$$

Nachdem nun dargestellt wurde, welche Rechenoperationen konstruierbar sind, soll nun herausgefunden werden, wie sich die konstruierbaren Zahlen in bestimmte Körpererweiterungen einordnen lassen, um die Menge der konstruierbaren Zahlen genauer zu beschreiben. Wichtige

Grundlagen zu diesem Abschnitt sind im Anhang zusammengefasst. Es wird zudem folgende Definition benötigt:

Definition 9 (Körpererweiterung, algebraisch [MK16, Definition 5.1])**.**
Sei K ein Körper. Eine *Körpererweiterung* von K ist ein Körper L, der K als Teilkörper enthält. Dies wird auch geschrieben als L/K.
Sei L/K eine Körpererweiterung. Ein Element $\alpha \in L$ heißt *algebraisch* über K, wenn es ein Polynom $f \in K[X]$, $f \neq 0$ gibt mit $f(\alpha) = 0$. Ist α nicht algebraisch über K, so nennt man α transzendent.

Ist L eine Körpererweiterung von K, so lässt sich L als K-Vektorraum auffassen. Der Körpergrad von L über K $(L : K)$ wird als die Vektorraumdimension definiert. Je nachdem, ob dieser Körpergrad endlich oder unendlich ist, wird auch der Erweiterungskörper als endlich oder unendlich bezeichnet.

Um die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal algebraisch zu beschreiben, soll es zunächst um endliche Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$ gehen. Dabei werden unter algebraischen Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ Erweiterungskörper verstanden, bei denen jedes Element algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist. Ein Körper heißt reell-algebraisch, wenn er algebraisch über $\mathbb{Q}$ und ein Teilkörper von $\mathbb{R}$ ist [Hen12, S. 54]. Algebraische Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$ können auch mit Hilfe irreduzibler Polynome beschrieben werden:

Definition 10 (irreduzibel [Hen12, S. 55])**.**
Ein Polynom f heißt *reduzibel* in einem Polynomring $K[X]$, wenn es sich nichttrivial in zwei Polynome zerlegen lässt, d.h. $f(x) = g(x) \cdot h(x)\ \forall x \in K$ mit $g, h \in K[X]$ und $\deg g$, $\deg h \geq 1$, g und h dürfen also keine konstanten Polynome sein. Sonst heißt f *irreduzibel*.

Beispiel 11 (reduzibles Polynom)**.** Das Polynom

$$f(x) := x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 11x^2 + 15$$

ist reduzibel in $\mathbb{Q}[X]$, da es zwei Polynome $g, h \in \mathbb{Q}[X]$ gibt mit $g(x) \cdot h(x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{Q}$. Diese lassen sich beispielsweise darstellen durch

$$g(x) = x^2 + 3 \text{ und } h(x) = x^3 + 2x^2 + 5,$$

wobei g und h keine konstanten Polynome sind.

Beispiel 12 (irreduzibles Polynom)**.** Das Polynom

$$f(x) := x + 1$$

ist irreduzibel, da es keine zwei Polynome $g, h \in \mathbb{Q}[X]$ gibt mit $g(x) \cdot h(x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{Q}$ und $\deg g$, $\deg h \geq 1$. Wäre dies möglich, so müsste für alle $x \in \mathbb{Q}$ $x + 1 = g(x) \cdot h(x)$ gelten. Daraus würde aber folgen, dass $\deg g = 1$ und $\deg h = 0$ bzw. $\deg g = 0$ und $\deg h = 1$ gilt. Damit wäre h bzw. g aber ein konstantes Polynom und f irreduzibel.

Ist nun $\alpha \in \mathbb{C}$ die Nullstelle eines irreduziblen Polynoms f aus $\mathbb{Q}[X]$, so ist $K := \mathbb{Q}(\alpha)$ definiert als der kleinste Körper, der $\mathbb{Q}$ und α enthält. Die Existenz einer solchen komplexen Nullstelle ist durch den Fundamentalsatz der Algebra gesichert [Hen12, S.55]. Dieser besagt, dass jedes nichttriviale Polynom aus $\mathbb{C}[X]$ mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat [Hen12, S. 201]. Die Struktur dieses Körpers K soll nachfolgend genauer untersucht werden:

Korollar 13 ([Hen12, Aufgabe 3.3])**.**

Ist α Nullstelle des irreduziblen Polynoms $f \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad n, so lässt sich $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ schreiben als

$$K = \{a_{n-1}\alpha^{n-1} + a_{n-2}\alpha^{n-2} + ... + a_1\alpha + a_0 \mid a_i \in \mathbb{Q} \text{ für } i = 1, ..., n-1\}$$

Beweis: Da die definierte Menge K eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ ist, kann mit den aus $\mathbb{C}$ bekannten Rechenoperationen gerechnet werden. Im Folgenden werden die Körperaxiome bewiesen. Elemente aus K sind dabei Polynome vom Grad kleiner oder gleich $n-1$ ausgewertet an α.

- Abgeschlossenheit der Addition und Multiplikation:

  Seien dazu $g(\alpha), h(\alpha) \in K$. Dann ist $g + h$ ebenfalls vom Grad kleiner oder gleich $n-1$ und es gilt $g(\alpha) + h(\alpha) \in K$. Nach der Division mit Rest (vgl. [Hen12, Satz 5.2]) existieren Polynome A und B mit

  $$g(x) \cdot h(x) = A(x) \cdot f(x) + B(x), \text{ deg } B \leq n-1.$$

  Da α eine Nullstelle von f ist, folgt $g(\alpha) \cdot h(\alpha) = B(\alpha)$ mit deg $B \leq n-1$. Daraus lässt sich direkt $g(\alpha) \cdot h(\alpha) \in K$ schließen und die Abgeschlossenheit ist gezeigt.

- Inverse:

  Das additive Inverse zu $g(\alpha) \in K$ ist $-g(\alpha) \in K$. Sei $g(\alpha) \neq 0$. Daraus folgt, dass g und f teilerfremd sind, da f irreduzibel ist. Somit lässt sich herleiten, dass $A(x) \cdot g(x) + B(x) \cdot f(x) = 1$ gilt. Setzt man α in diese Gleichung ein, so erhält man $A(\alpha) \cdot g(\alpha) = 1$ und $A(\alpha)$ ist folglich das multiplikative Inverse zu $g(\alpha)$.

Die restlichen Körperaxiome lassen sich durch Nachrechnen und Umformen nachweisen. Aufgrund der Definition von K lässt sich erkennen, dass α und $\mathbb{Q}$ in K enthalten sind. Des Weiteren enthält jeder Körper, der α enthält, auch K und es ist gezeigt, dass K der kleinste Körper ist, der $\mathbb{Q}$ und α enthält. [Hen12] □

Ein Erweiterungskörper K von $\mathbb{Q}$ mit endlicher Dimension n ist auch immer algebraisch über $\mathbb{Q}$. Dies lässt sich dadurch begründen, dass für eine beliebig gewählte Zahl $\beta \in K$ die Zahlen $\beta^n, \beta^{n-1}, ..., \beta, 1$ linear abhängig über $\mathbb{Q}$ sind, da $n+1$ Elemente eines n-dimensionalen Vektorraums betrachtet werden, und man somit ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ mit $f(\beta) = 0$ erhält. Mit Korollar 13 lässt sich folgern, dass der durch das irreduzible Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad n mit $f(\alpha) = 0$ definierte Körper $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ die Basis $\{\alpha^{n-1}, \alpha^{n-2}, ..., \alpha, 1\}$ hat und sich somit ein Körpergrad von $(K : \mathbb{Q}) = n$ ergibt. Diese Folgerung gilt für beliebige Körpererweiterungen

K über einem Körper k und ebenfalls für die spezielle Körpererweiterung $K := k(\alpha)$, wobei k ein Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$ und f ein irreduzibles Polynom ist mit $f \in k[X]$ und $f(\alpha) = 0$. [Hen12, S. 55] Mit diesen Kenntnissen lässt sich ein wichtiger Zusammenhang formulieren:

Lemma 14 (Gradsatz [SP15, S. 255]).
Seien $K \subseteq L \subseteq M$ Körper. Dann ist

$$(M : K) = (M : L) \cdot (L : K).$$

Ist $\{u_i \mid i \in I\}$ eine K-Basis von L und $\{v_j \mid j \in J\}$ eine L-Basis von M, so ist $\{u_i v_j \mid i \in I, j \in J\}$ eine K-Basis von M.

Beweis: Seien die u_i, v_j wie beschrieben. Ist $c \in M$, so gilt $c = \sum_{j \in J} b_j v_j$ mit $b_j \in L$. Jedes b_j lässt sich darstellen als

$$b_j = \sum_{i \in I} a_{ij} u_i \text{ mit } a_{ij} \in K.$$

Man erhält somit

$$c = \sum_{j \in J} b_j v_j = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} u_i v_j,$$

die $u_i v_j$ erzeugen als den K-Vektorraum M. Zudem sind diese linear unabhängig, denn sind $a_{ij} \in K$ mit

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} u_i v_j = 0,$$

so ist

$$\sum_{i \in I} a_{ij} u_i =: b_j \in L \; \forall j \in J$$

und damit

$$\sum_{j \in J} b_j v_j = 0.$$

Da die v_j linear unabhängig über L sind, sind alle $b_j = 0$. Da die u_i linear unabhängig über K sind, folgt $a_{ij} = 0$ für alle $i \in I, j \in J$. [SP15, S. 255]

$\square$

Mit diesen Erkenntnissen kann nun die Menge der konstruierbaren Zahlen beschrieben werden:

Satz 15 (Hauptsatz über konstruierbare Zahlen [Hen12, S. 56]).

Mit Zirkel und Lineal sind genau diejenigen reellen Zahlen α (als Streckenlängen) *konstruierbar*, die in einem reell-algebraischen Erweiterungskörper K von $\mathbb{Q}$ mit Körpergrad $(K : \mathbb{Q}) = 2^n$ liegen, wobei $\mathbb{Q}$ und K durch eine Kette quadratischer Körpererweiterungen

$$\mathbb{Q} = K_0 \underset{2}{\subsetneq} K_1 \underset{2}{\subsetneq} K_2 \underset{2}{\subsetneq} ... \underset{2}{\subsetneq} K_n = K$$

verbunden sind. Die Zahl α lässt sich dann durch (eventuell mehrfach geschachtelte) Quadratwurzeln ausdrücken.

Beweis: Der Beweis ist [Hen12, S. 56-58] entnommen.

Die Aussage des Satzes fordert zum einen, dass sich eine Zahl, die sich in dem Körper K einer solchen Kette quadratischer Körpererweiterungen befindet, mithilfe von Zirkel und Lineal konstruieren lässt. Andersherum muss aber auch gezeigt werden, dass nur die mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Zahlen in einer solchen Körpererweiterung liegen.

1. Es wird zunächst angenommen, dass eine, wie in Satz 15 beschriebene, Kette quadratischer Erweiterungskörper existiert. Nun wird gezeigt, dass eine Zahl konstruierbar ist, wenn sie in dem Körper K liegt. Dazu werden die Zahlen, die in der Körpererweiterung K liegen, auf Konstruierbarkeit geprüft.

   Die Beispiele 4, 5, 6 und 7 betrachten die Konstruierbarkeit der Zahlen $a + b, a \cdot b, \frac{a}{b}$ und $r \cdot a$ aus gegebenen Strecken der Längen a, b und mit $r \in \mathbb{Q}^+$. Hinzu kommt die Überlegung, dass sich negative Zahlen darstellen lassen, indem die jeweiligen Strecken auf dem Zahlenstrahl „nach links“ abgetragen werden, sodass die jeweilige Zahl durch den so erreichten Punkt repräsentiert wird. Insgesamt folgt damit, dass bei n gegebenen Strecken der Längen $a_1, a_2, ..., a_n$ die Menge aller hieraus mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Zahlen einen Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$ ergibt, da durch die Möglichkeit der Konstruktion der angegebenen Rechenoperationen alle Zahlen aus dem Erweiterungskörper konstruierbar sind. Für den weiteren Beweis wird folgendes Lemma benötigt:

   Lemma 16 (Reell-quadratische Erweiterung [Hen12, Satz 3.2]).

   Sind alle Zahlen aus dem reell-algebraischen Körper k konstruierbar, so sind auch für jede Zahl $d \in k$ mit $d > 0$ und $\sqrt{d} \notin k$ alle Zahlen aus der reell quadratischen Erweiterung $K = k(\sqrt{d})$ konstruierbar.

   Beweis: Beispiel 8 zeigt, dass $\sqrt{d}$ konstruierbar ist. Nach den obigen Überlegungen sind zusätzlich alle anderen Zahlen aus dem Erweiterungskörper $K = k(\sqrt{d})$ konstruierbar und dieser Erweiterungskörper besteht nach Korollar 13 gerade aus den Zahlen $a + b\sqrt{d}$ mit $a, b \in k$, da das in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzible Polynom $f(x) = x^2 - d$ die Nullstelle $\sqrt{d}$ hat und eindimensional ist. [Hen12, S. 57] □

   Durch mehrfaches Anwenden von Lemma 16 kann nun die Konstruierbarkeit jeder reellen Zahl, die sich ausgehend von rationalen Zahlen durch sukzessives Quadratwurzelziehen, darstellen lässt, gezeigt werden. Dies bedeutet also in Bezug zu Satz 15, dass die Zahl konstruierbar ist, wenn es eine endliche Folge reell-quadratischer Körpererweiterungen

$$\mathbb{Q} = K_0 \underset{2}{\subsetneq} K_1 \underset{2}{\subsetneq} K_2 \underset{2}{\subsetneq} ... \underset{2}{\subsetneq} K_n = K$$

gibt, sodass diese Zahl in K_n liegt.

2. Im Folgenden wird gezeigt, dass keine weiteren Zahlen existieren, die konstruierbar sind. Die bereits konstruierten Zahlen liegen nun in einem Erweiterungskörper K von $\mathbb{Q}$. Es wird mit Hilfe eines kartesischen Koordinatensystems geprüft, welche Zahlen sich überhaupt durch die Grundkonstruktionen $(K1) - (K4)$ konstruieren lassen, da die Konstruktionen bezüglich dieser Basis durchgeführt werden.

(K1) Die erste Grundkonstruktion $(K1)$ beschreibt das Legen eine Gerade durch zwei Punkte. Sind also zwei Punkte $P = (p_1|p_2)$ und $Q = (q_1|q_2)$ gegeben, so besteht die Verbindungsgerade im Allgemeinen aus allen Punkten $(x|y)$ mit

$$Ax + By + C = 0, \tag{2.1}$$

wobei A, B und C rational von den Koordinaten von P und Q abhängen. Man bleibt also in dem durch die gegebenen Größen definierten Körper K.

(K2) In der zweiten Grundkonstruktion wird das Konstruieren des Schnittpunktes zweier nicht paralleler Geraden beschrieben. Dabei sind die Koordinaten des Schnittpunktes mit Hilfe eines Gleichungssystems bestimmbar, welches aus zwei Geradengleichungen der Form 2.1 zusammengesetzt ist. Somit hängen diese Koordinaten wieder rational von den Parametern der Geradengleichungen ab und befinden sich in dem definierten Körper K.

(K3) Die dritte Grundkonstruktion beschreibt das Zeichnen eines Kreises $k = (M; r)$ mit Mittelpunkt $M = (m_1|m_2)$ und Radius r. Dieser Kreis besteht aus den Punkten $(x|y)$ mit

$$(x - m_1)^2 + (y - m_2)^2 = r^2, \tag{2.2}$$

sodass wiederum eine rationale Abhängigkeit beschrieben wird.

(K4) $(K4)$ bezieht sich auf die Konstruierbarkeit der Schnittpunkte von einer Geraden und einem Kreis und von zwei Kreisen. Die Koordinaten der Schnittpunkte von einem Kreis und einer Geraden lassen sich mit Hilfe eines nichtlinearen Gleichungssystems, welches aus den Gleichungen 2.1 und 2.2 besteht, bestimmen. Löst man Gleichung 2.1 für $B \neq 0$ nach y auf, so erhält man

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Dies kann nun in Gleichung 2.2 eingesetzt werden und es ergibt sich für x eine Gleichung der Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \; mit \; a \neq 0. \tag{2.3}$$

Mit $B = 0$ bekommt man eine analoge Gleichung für y. Dabei hängen die Koeffizienten a, b und c rational von den Parametern A, B, C, m_1, m_2 und r ab. Für x erhält man durch Umformen der Gleichung 2.3 die zwei Lösungen

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \; x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

welche beide in dem über K reell-quadratischen Erweiterungskörper $K(\sqrt{b^2 - 4ac})$ liegen. Nach Gleichung 2.1 hängen y_1, y_2 rational von x_1, x_2 ab und liegen somit ebenfalls in diesem Zahlkörper.
Für die Schnittpunkte von zwei Kreisen wird ein Gleichungssystem aufgestellt, welches aus zwei Kreisgleichungen der Form 2.2 besteht. Bildet man die Differenz der beiden Gleichungen, so erhält man

$$(2(n_1 - m_1))x + (2(n_2 - m_2))y + (r_2^2 - r_1^2 + m_1^2 + m_2^2 + n_1^2 + n_2^2) = 0,$$

was im Allgemeinen der Form 2.1 entspricht. Mit dieser Gleichung und einer der zuerst aufgestellten Kreisgleichung, ergibt sich ein Gleichungssystem, welches analog zu dem Gleichungssystem der Schnittpunkte von Gerade und Kreis aufgebaut ist. Somit bleibt man auch hier in der quadratischen Erweiterung.

Als Ausgangspunkt wurde der Zahlenstrahl, also der Körper $\mathbb{Q}$ gewählt, sodass nun auch gezeigt werden konnte, dass keine weiteren Zahlen konstruierbar sind.

□

Anwendung auf die Winkeldrittelung

Mit dem erarbeiteten Wissen über die Menge der mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Zahlen lässt sich nun der folgende Satz beweisen:

Satz 17. Die Winkeldrittelung ist im Allgemeinen nicht mit Zirkel und Lineal konstruierbar.

Beweis: Der Beweis ist [Hen12, S. 64-65] entnommen. Hierfür werden Vorkenntnisse der Vorlesung Analysis I des gymnasialen Lehramtsstudiengangs vorausgesetzt.

Um die Aussage zu beweisen, wird im Folgenden zunächst überlegt, dass sich die Konstruierbarkeit der Winkeldrittelung auf die Konstruierbarkeit des Sinus und Kosinus des gedrittelten Winkels zurückführen lässt. Es wird die Annahme formuliert, dass die Winkeldrittelung im Allgemeinen konstruierbar ist. Mithilfe des über die Additionstheoreme hergeleiteten Zusammenhangs im Beweis und Satz 15 wird anschließend gezeigt, dass sich der Kosinus bzw. Sinus des gedrittelten Winkels für den Ausgangswinkel $\alpha = 60°$ nicht konstruieren lässt. Dies beweist schließlich, dass die Winkeldrittelung im Allgemeinen nicht durchführbar ist.

Der Winkel α, welcher durch die drei Punkte A, O und P charakterisiert ist ($\alpha = \angle AOP$), soll gedrittelt werden. Dies ist in Abbildung 2.9 veranschaulicht. $\frac{\alpha}{3}$ ist dabei mit Q, O und P dargestellt ($\frac{\alpha}{3} = \angle QOB$). Die Winkeldrittelung mit Zirkel und Lineal bedeutet somit die Konstruktion von Q, B oder der Strecke $\overline{BQ}$.

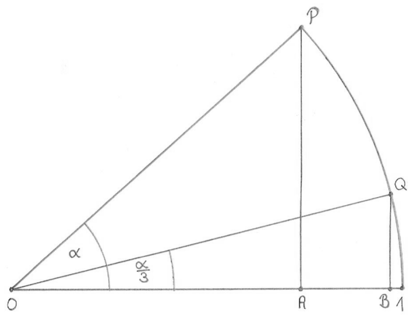


Abbildung 2.9: Drittelung des Winkels α

Es wird zunächst mit den Additionstheoremen für Sinus und Kosinus folgender Zusammenhang von α und $\frac{\alpha}{3}$ hergeleitet:

Lemma 18. Es gilt für einen Winkel α und den gedrittelten Winkel $\frac{\alpha}{3}$ im Allgemeinen:

$$4\cos^3\left(\frac{\alpha}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) - \cos(\alpha) = 0 \tag{2.4}$$

Beweis: Im Allgemeinen gilt

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta), \tag{2.5}$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta) \tag{2.6}$$

$$\text{und } \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1 \tag{2.7}$$

Für einen Winkel α gilt somit:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \cos\left(\frac{\alpha}{3} + 2\frac{\alpha}{3}\right) \\
&\overset{2.5}{=} \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)\cos\left(2\frac{\alpha}{3}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)\sin\left(2\frac{\alpha}{3}\right) \\
&\underset{2.6}{\overset{2.5}{=}} \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)\cdot\left(\cos^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)\cdot\left(2\sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right) \\
&= \cos^3\left(\frac{\alpha}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)\sin^2\left(\frac{\alpha}{3}\right) \\
&\overset{2.7}{=} \cos^3\left(\frac{\alpha}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)\cdot\left(1-\cos^2\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right) \\
&= 4\cos^3\left(\frac{\alpha}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)
\end{aligned}$$

Damit folgt, dass gilt:

$$4\cos^3\left(\frac{\alpha}{3}\right) - 3\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) - \cos(\alpha) = 0$$

□

Es wird angenommen, dass α sich mit Zirkel und Lineal dritteln ließe. Das heißt, dass die Konstruktion des Punktes Q, B oder der Strecke $\overline{BQ}$ möglich ist. Für die Punkte P und Q in Abbildung 2.9 gilt

$$P = (\cos(\alpha)|\sin(\alpha)) \text{ und } Q = \left(\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) | \sin\left(\frac{\alpha}{3}\right)\right),$$

da sie beide auf dem Einheitskreis liegen und sich somit die Koordinaten mit Sinus und Kosinus des jeweiligen Winkels darstellen lassen.
Es gilt $\cos^2(\frac{\alpha}{3}) + \sin^2(\frac{\alpha}{3}) = 1$. Ist nun $\sin(\frac{\alpha}{3})$ konstruierbar, so befindet sich $\sin(\frac{\alpha}{3})$ nach Satz 15 in einem reell-algebraischen Erweiterungskörper K von $\mathbb{Q}$ mit Körpergrad $(K : \mathbb{Q}) = 2^n$. Da die genannte Gleichung auf den Grundrechenarten von Körpern beruht, liegt dann auch $\cos(\frac{\alpha}{3})$ in diesem Erweiterungskörper K. Andersherum gilt das Gleiche und $\sin(\frac{\alpha}{3})$ ist somit genau dann konstruierbar, wenn $\cos(\frac{\alpha}{3})$ konstruierbar ist. Deswegen wird nachfolgend der Fokus auf die Konstruierbarkeit von $\cos(\frac{\alpha}{3})$ gelegt.

Gleichung 2.4 wird von $\cos(\frac{\alpha}{3})$ erfüllt und $\cos(\frac{\alpha}{3})$ ist der Annahme nach konstruierbar. Also liegt $\cos(\frac{\alpha}{3})$ nach Satz 15 in einem reell-algebraischen Erweiterungskörper K mit $(K : \mathbb{Q}) = 2^n$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$. Somit lässt sich eine Zahl z konstruieren, die Nullstelle des Polynoms

$$f(x) = 4x^3 - 3x - \cos(\alpha) \tag{2.8}$$

ist.
Mit diesen Vorüberlegungen kann nun ein Gegenbeispiel dafür gegeben werden, dass die Winkeldrittelung im Allgemeinen mit Zirkel und Lineal durchführbar ist:

Lemma 19. Der Winkel $\alpha = 60°$ lässt sich mit Zirkel und Lineal nicht dritteln.

Beweis: Für den Winkel $\alpha = 60°$ erhält man das Polynom

$$f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}.$$

Substituiert man nun das Polynom $F(x) := 2f(x)$ mit $y = 2x$, so erhält man

$$g(y) = 8 \cdot \frac{1}{8}y^3 - \frac{1}{2} \cdot 6y - 1 = y^3 - 3y - 1.$$

Wäre f reduzibel über $\mathbb{Q}$, so wäre auch g reduzibel über $\mathbb{Q}$, da f in diesem Fall in Linearfaktoren zerfallen würde und diese durch die Multiplikation nicht beeinträchtigt werden. Folglich würde dies bedeuten, dass sich g darstellen lässt als $g = p \cdot q$, wobei q ohne Beschränkung der Allgemeinheit den Grad 1 hat. Daraus würde folgen, dass es eine rationale Nullstelle von q also auch von g gibt. Es gibt somit eine rationale Zahl $\frac{a}{b}$ mit teilerfremden Zahlen $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{N}$, für die gelten würde

$$\frac{a^3}{b^3} - 3\frac{a}{b} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \; a^3 = b^3 + 3ab^2 = b^2(b + 3a) \tag{2.9}$$

bzw.

$$b^3 = a^3 - 3ab^2 = a(a^2 - 3b^2) \tag{2.10}$$

Nach Gleichung 2.9 wäre jeder Primteiler von b auch ein Teiler von a, dies ist allerdings ein Widerspruch zur Teilerfremdheit. Deswegen müsste $b = 1$ gelten. Daraus würde aber mit Gleichung 2.10 folgen, dass jeder Primteiler von a auch 1 teilen würde. Dies würde implizieren, dass $a = 1$ oder $a = -1$ gilt, was wiederum einen Widerspruch darstellt. Damit ist f irreduzibel über $\mathbb{Q}$ und der von z erzeugte Körper $L := \mathbb{Q}(z)$ hat den Erweiterungsgrad 3 über $\mathbb{Q}$. Mit der Formel aus Lemma 14 gilt dann für $\mathbb{Q} \subseteq L \subseteq K$

$$2^n = (K : \mathbb{Q}) = (K : L) \cdot (L : \mathbb{Q}) = (K : L) \cdot 3 \; ↯$$

Also kann $\frac{\alpha}{3}$ für $\alpha = 60^\circ$ nicht konstruierbar sein. □

Da ein Gegenbeispiel existiert, ist gezeigt, dass sich die Winkeldrittelung im Allgemeinen nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren lässt. □

Für bestimmte Winkel lässt sich jedoch eine Konstruktion der Winkeldrittelung angeben:

Beispiel 20 (Drittelung des Winkels $\alpha = 90^\circ$)**.**

Für den Winkel $\alpha = 90^\circ$ erhält man ausgehend von Gleichung 2.8 das Polynom

$$f(x) = 4x^3 - 3x = x \cdot (4x^2 - 3).$$

Dieses Polynom lässt sich aber in zwei Polynome zerlegen, die mindestens einen Grad von 1 haben. Das bedeutet, dass f in diesem Fall reduzibel ist und die Winkeldrittelung ist mit Zirkel und Lineal durchführbar.

Dazu lässt sich auch eine Konstruktion angeben:

Ausgangslage:

Gegeben sind zwei Halbgeraden g und h, die beide in S beginnen. Auf g sei der Punkt P gekennzeichnet und auf h der Punkt Q, wobei P und Q nicht S entsprechen. Der Winkel $\angle PSQ$ beträgt 90°.

Konstruktionsschritte:

1. Zeichnen eines Kreises k_1 um S durch P (K3);
2. Zeichnen eines Kreises k_2 um P durch S (K3);
3. Bezeichnen des Schnittpunktes von k_1 und k_2 mit S_1 (K4);

4. Zeichnen der Geraden i durch S und S_1 (K1);
5. Kennzeichnen des Winkels $\angle S_1SQ$. Dieser beträgt 30°.

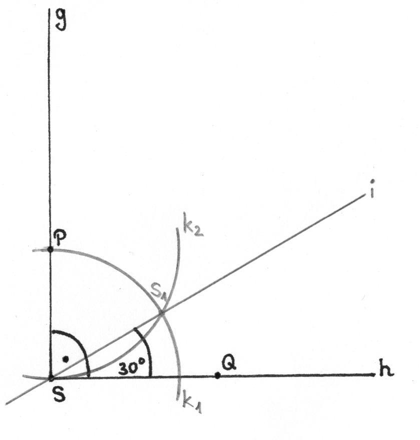


Abbildung 2.10: Drittelung des rechten Winkels

Durchführbarkeit:

Die jeweiligen Schritte sind nach den in den Konstruktionsschritten gekennzeichneten Grundkonstruktionen durchführbar. Dabei existiert der Schnittpunkt von k_1 und k_2, da beide als Radius den Abstand von P und S haben, aber dies auch gerade die Mittelpunkte der Kreise sind. Der Abstand der Mittelpunkte der Kreise ist somit genauso groß wie der Radius der beiden Kreise und der Schnittpunkt muss somit existieren.

Korrektheit:

Da sowohl P als auch S_1 auf k_1 liegen, haben beide den gleichen Abstand vom Mittelpunkt S von k_1. Da der Radius von k_2 ebenfalls dem Abstand von P und S entspricht und S_1 auch auf k_2 liegt, haben P und S_1 auch diesen Abstand. Somit ist das Dreieck PSS_1 gleichseitig und der Winkel $\angle PSS_1$ beträgt 60°. Somit ergibt sich durch Subtraktion, dass der Winkel $\angle S_1SQ = 30°$ sein muss.

Es wurde nun mathematisch begründet, dass sich die Winkeldrittelung im Allgemeinen nicht mit Zirkel und Lineal durchführen lässt. Eine Möglichkeit, die Winkeldrittelung im Allgemeinen durchzuführen wird dadurch erreicht, dass man die Werkzeuge, mit denen konstruiert wird, variiert. So lässt sich diese zum Beispiel mit dem Falten von Papier durchführen.

2.2.3 Papierfaltkonstruktionen im Vergleich mit Zirkel-und-Lineal Konstruktionen

Um später die Winkeldrittelung mit Papierfaltkonstruktionen durchzuführen und eine Wissensbasis für die Lehrkraft zu legen, sollen die Papierfaltkonstruktionen zunächst mathematisch präzisiert werden. Es gibt folgende Grundkonstruktionen [SHH13, S. 157]:

(P1) Falten einer Faltlinie durch zwei gegebene Punkte;

(P2) Bestimmen der Schnittpunkte gegebener Faltlinien;

(P3) Aufeinanderlegen von zwei Punkten durch eine Faltung;

(P4) Aufeinanderfalten zweier Faltlinien;

(P5) Falten eines gegebenen Punktes P_1 auf eine gegebene Faltlinie g, sodass die dabei entstehende Faltlinie durch einen weiteren gegebenen Punkt P_2 geht;

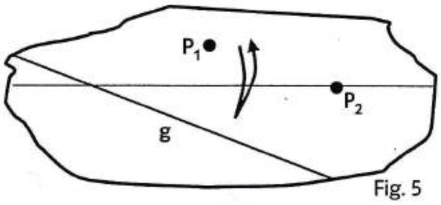


Abbildung 2.11: Papierfaltgrundkonstruktion (P5) [SHH13]

(P6) Falten eines gegebenen Punktes P_1 auf eine gegebene Faltlinie g_1, sodass dabei ein zweiter gegebener Punkt P_2 auf eine zweite gegebene Faltlinie g_2 gefaltet wird.

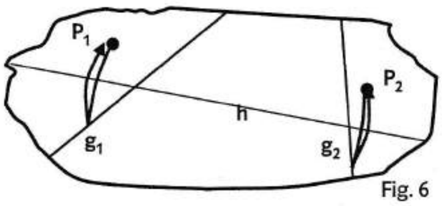


Abbildung 2.12: Papierfaltgrundkonstruktion (P6) [SHH13]

Eine Papierfaltkonstruktion ist durch das beliebig häufige, aber endliche Hintereinaderausführen dieser Grundkonstruktionen definiert.

(P1) bedeutet in Bezug zu Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen das Legen einer Verbindungsgerade durch zwei gegebene Punkte, dies entspricht der Grundkonstruktion (K1). (P2) ist vergleichbar mit dem Bestimmen der Schnittpunkte von nicht parallelen Geraden, dies ist Grundkonstruktion (K2). Des Weiteren beschreibt (P3) bezugnehmend auf die Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen das Konstruieren einer Mittelsenkrechten und (P4) das Konstruieren einer Winkelhalbierenden, falls die Faltlinien nicht parallel sind. Sind die Faltlinien in (P4) parallel, so kann eine zu den zwei parallelen Geraden wiederum parallele Gerade konstruiert werden, die zu den gegebenen Geraden den gleichen Abstand hat. Dazu wird zu einem gegeben Punkt auf einer der beiden Geraden der Lotfußpunkt bezüglich der anderen Geraden konstruiert. Die Mittelsenkrechte dieser beiden Punkte entspricht dann der gesuchten, parallelen Geraden mit gleichem Abstand.

(P5) lässt sich durch den Schnitt eines Kreises und einer Geraden veranschaulichen. Dazu seien die Punkte P_1, P_2 und die Gerade g gegeben. Ziel ist es, die Faltlinie darzustellen, die durch P_2 geht und P_1 auf g faltet. Dies ist mit Zirkel und Lineal möglich, indem um P_2 ein Kreis durch P_1 geschlagen und der Schnittpunkt mit der Geraden g gekennzeichnet wird. Die Mittelsenkrechte des Schnittpunktes und P_1 entspricht dann der gesuchten Faltlinie.

Die in (P6) genutzte Einschiebefaltung ist diejenige, die sich mit Zirkel und Lineal nicht durchführen lässt. Dabei werden die Punkte, die auf der Geraden g_1 bzw. g_2 liegen und auf die Punkte P_1 und P_2 gefaltet werden, mit P_1' bzw. P_2' bezeichnet. Soll dieser Schritt mit Zirkel und Lineal konstruiert werden, müssten die Punkte P_1' und P_2' so gewählt werden, dass die Mittelsenkrechte von P_1 und P_1' und die von P_2 und P_2' dieselbe Gerade ergeben. Diese Variation der Punkte lässt sich mit Zirkel und Lineal nicht konstruieren. Dazu befindet sich im digitalen Anhang eine Geogebra-Datei. Die roten Geraden kennzeichnen hierbei die Mittelsenkrechten, die eine Gerade ergeben müssen.

Mit Hilfe der beschriebenen Faltmöglichkeiten lässt sich die Konstruktion der Winkeldrittelung mit Papierfalten nachfolgend durchführen.

Dreiteilung eines Winkels mit Papierfaltkonstruktionen

Die Inhalte und Grafiken dieses Abschnitts sind [Hof16] entnommen.

Es ist ein DIN-A4-Blatt im Hochformat gegeben.

Ausgangslage:

Als Ausgangslage wird auf dem Blatt ein beliebiger Winkel $\angle BAP$ gefaltet. In Abbildung 2.13 sind die Ausgangslage, die Konstruktionsschritte und die Zielkonfiguration mit den jeweiligen Bezeichnungen dargestellt. Im Folgenden meint beispielsweise AB die Gerade durch A und B bzw. die entsprechende Faltlinie.

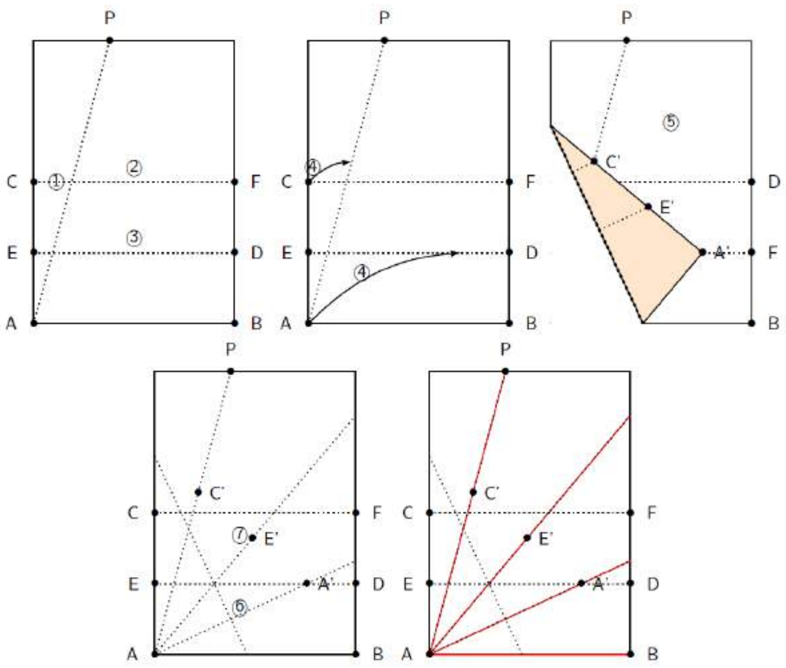


Abbildung 2.13: Winkeldrittelung durch Falten

Konstruktionsschritte:

1. Es wird eine Parallele zu AB gefaltet, die das Blatt halbiert;

2. Falten der Parallelen zu AB, die die Strecke $\overline{AC}$ halbiert;
3. Das Blatt wird so gefaltet, dass A auf ED und C auf AP landet;
4. Die Punkte A', E', C' werden markiert. Auf diesen Punkten kommen A, E und C nach der Faltung zu liegen;
5. Das Blatt wird wieder auseinander gefaltet und man falte nun die Gerade durch A und A';
6. Falten der Geraden durch A und E'.

Durchführbarkeit:

Die ersten beiden Konstruktionsschritte sind nach (P4) durchführbar. Konstruktionsschritt 3 und 4 beruhen auf (P6) und die Schritte 5 und 6 sind nach (P1) durchführbar.

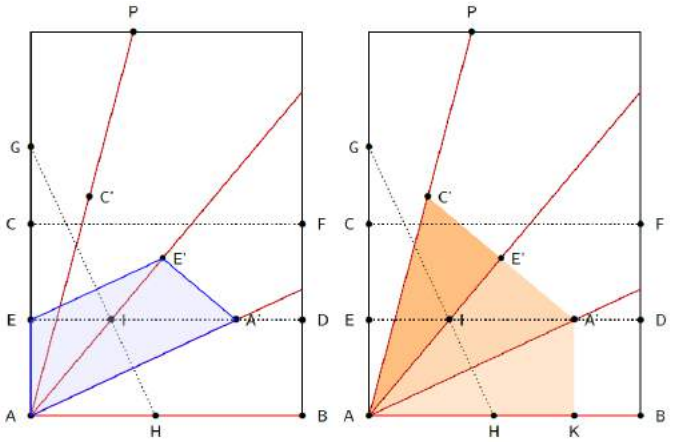


Abbildung 2.14: Korrektheit der Winkeldrittelung durch Falten

Korrektheit:

Der Beweis der Korrektheit der Konstruktion ist in Abbildung 2.14 veranschaulicht. Die Beweisidee ist, dass gezeigt wird, dass die gefalteten Dreiecke kongruent zueinander sind und die entsprechenden Winkel somit gleich groß sein müssen. Zunächst wird gezeigt, dass es sich bei dem Viereck $AEE'A'$ um ein symmetrisches Trapez handelt:

> Aufgrund der Faltung in Schritt 3 sind die Strecken $\overline{EE'}$ und $\overline{AA'}$ orthogonal zu GH und somit parallel zueinander. Daraus folgt, dass es sich bei dem Viereck $AEE'A'$ um ein Trapez handelt. Mit Schritt 3 ergibt sich auch, dass dieses Trapez symmetrisch ist.

Die Faltlinien EA' und AE' sind die Diagonalen des Trapezes $EAA'E'$ und symmetrisch zu GH. Sie schneiden sich somit in einem Punkt I auf GH. Aufgrund der Faltung in Schritt 2 ergibt sich, dass EA' orthogonal zu EA ist. Da das Trapez $EAA'E'$ symmetrisch ist, folgt damit auch $AE' \perp E'A'$. Es wird eine Senkrechte zu AB durch A' als Hilfslinie eingezeichnet. Nun wird noch gezeigt, dass die in Abbildung 2.14 markierten Dreiecke kongruent sind:

> Die Faltung in Schritt 3 ergibt, dass die Strecken $\overline{A'E'}$ und $\overline{E'C'}$ gleich lang sind. Da außerdem $AE' \perp E'A'$ gilt, stimmen die Dreiecke $AE'C'$ und $AA'E'$ in zwei

Seiten und dem eingeschlossenen Winkel bei E' überein und sind somit nach dem Kongruenzsatz SWS kongruent zueinander.

Durch die Faltung in Schritt 3 erhält man $|\overline{A'E'}| = |\overline{AE}|$. Da EF nach Schritt 2 parallel zu AB ist, $A'K$ senkrecht zu AB ist und A' auf der Faltlinie EF und K auf der Faltlinie AB liegt, gilt $|\overline{AE}| = |\overline{A'K}|$. Da $AE' \perp E'A'$ und $AK \perp KA'$ gilt, folgt, dass die Dreiecke AKA' und $AA'E'$ in zwei Seiten und dem Winkel, der gegenüber der längeren Seite liegt, übereinstimmen. Nach dem Kongruenzsatz SsW folgt damit, dass die Dreiecke kongruent zueinander sind.

Aus der Kongruenz der Dreiecke AKA', $AA'E'$ und $AE'C'$ folgt, dass die drei Winkel $\angle C'AE'$, $\angle E'AA'$ und $\angle A'AK$ gleich groß sind.

Es konnte somit gezeigt werden, dass sich ein Winkel im Allgemeinen mit Papierfaltkonstruktionen dritteln lässt.

2.2.4 Reflexion der mathematischen Arbeitsweise

Mindestens genauso wichtig wie die erarbeiteten Inhalte ist die Arbeitsweise, mit der diese mathematischen Inhalte verstanden und erläutert werden. So war die zentrale Absicht dieses Kapitels, den Begriff der mathematischen Konstruktionen, der aus einem Teil der Geschichte der Geometrie entstanden ist, zu entwickeln, um ein detailliertes Hintergrundwissen zum Konstruktionsproblem der Winkeldrittelung aufzubauen. Die mathematischen Konstruktionen wurden aus verschiedenen Positionen betrachtet: Hierfür wurden zwei verschiedene Axiomensysteme erforscht, welche sich auf Papierfaltkonstruktionen und das Konstruieren mit Zirkel und Lineal beziehen. Die beiden Herangehensweisen wurden über verschiedene Zugänge zum Konstruieren in der Schulmathematik erkannt.

Zunächst wurden daraufhin Konstruktionen mit Zirkel und Lineal mathematisch präzisiert. Aufbauend auf den Grundkonstruktionen (K1) bis (K4) wurden mit Zirkel und Lineal durchführbare Konstruktionen definiert. Da das Konstruktionsproblem der Winkeldrittelung später die Konstruktion einer Strecke mit bestimmter Länge erfordern würde, wurde zunächst die Konstruierbarkeit einer Zahl basierend auf diesen Grundkonstruktionen definiert. Anschließend sollte herausgefunden werden, wie sich die Zahlen, die konstruierbar sind, einordnen lassen. Da sich diese mit Hilfe von Körpererweiterungen ordnen lassen, wurden zunächst die verschiedenen Rechenoperationen auf Konstruierbarkeit geprüft, wenn bestimmte Strecken gegeben sind. Weitere Definitionen und Sätze unterstützten das Ziel, den Begriff der Konstruierbarkeit immer mehr zu verstehen, sodass am Ende der Hauptsatz über konstruierbare Zahlen bewiesen werden und somit eine Aussage darüber, welche Zahlen sich genau mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen, gemacht werden konnte. Dies gab die Möglichkeit, die aus der Geschichte der Geometrie hervorgegangene Behauptung, dass die Winkeldrittelung im Allgemeinen mit Zirkel und Lineal nicht durchführbar ist, zu beweisen und somit die Entwicklung der Geometrie genauer zu verstehen.

Anschließend wurden die Papierfaltkonstruktionen betrachtet. Auch hier wurden Grundkonstruktionen formuliert, die wiederum alle Papierfaltkonstruktionen definieren. Diese Grundkonstruktionen wurden mit Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen verglichen, sodass mit der sechsten Grundkonstruktion eine Konstruktion entdeckt wurde, die sich nicht mit Zirkel und Lineal nachstellen lässt. Dies gab die Möglichkeit, die Winkeldrittelung mit dem Falten von Papier durchzuführen und auf ihre Korrektheit zu beweisen. Es konnte somit entdeckt werden, welchen Einfluss der Gebrauch unterschiedlicher Werkzeuge, nämlich zum einen Zirkel und Lineal und zum anderen die Hände zum Falten von Papier, auf die Durchführbarkeit von Konstruktionen hat. Diese Variation von Werkzeugen spiegelt die Struktur der Geometrie und somit auch der Mathematik wider, die in der Geschichte immer wieder erweitert wurde. Inwiefern die Geschichte und somit die Entwicklung der Geometrie einen Mehrwert zur Erreichung von Unterrichtszielen bietet, soll anhand der nun erarbeiteten Kenntnisse und Arbeitsweisen im folgenden Kapitel untersucht werden.

Kapitel 3

Praktischer Teil

3.1 Inhaltliche Einordnung der Winkeldrittelung in den Kernlehrplan Mathematik NRW

Als Grundlage der Argumentation werden [NRW07] und [NRW14] verwendet.

Wesentliche Ziele von Mathematikunterricht werden durch die Grunderfahrungen von Winter repräsentiert. Dabei geht es als Erstes darum, Erscheinungen der Natur, Gesellschaft und Kultur anhand von Mathematik zu erklären und zu verstehen. Zweitens soll die Mathematik als eine eigene, geistig aufgebaute Struktur verstanden werden. Zuletzt sollen in der Auseinandersetzung mit der Mathematik überfachliche Kompetenzen erlernt werden. Insbesondere die ersten beiden Grunderfahrungen spiegeln sich in der Geschichte der Geometrie wider:

Die Mathematik diente von den frühen Kulturen bis hin zu den Ägyptern ausschließlich der Praxis. So wurden geometrische Objekte der Natur verwendet, um Tontöpfe zu verschönern oder Ideen für den Bau und ähnliche alltägliche Probleme zu erhalten. Flächen wurden näherungsweise berechnet, wodurch beispielsweise Pyramiden gebaut werden konnten. Diese Gegebenheiten können dabei helfen, die erste Grunderfahrung zu vermitteln. Schülerinnen und Schüler können erkennen, dass die Mathematik aus der Natur entstanden ist und, dass die Kulturen sich auf Grundlage dieser entwickelt haben.

Die zweite Grunderfahrung kann vor allem mithilfe der darauffolgenden Geschichte der Geometrie vermittelt werden. Die Griechen waren die Ersten, die die Mathematik als Wissenschaft betrachteten und sich von der praxisorientierten Mathematik entfernten. Damit können die Schülerinnen und Schüler verstehen, dass es sich bei der Mathematik um eine geistige Schöpfung handelt, nämlich ein Theoriegebilde, das aus auf sich aufbauenden Strukturen besteht. Da das Konstruktionsproblem der Winkeldrittelung im Zusammenhang mit der mathematischen Arbeit der Griechen steht und sich darin die Entwicklung der Mathematik als geistige Schöpfung widerspiegelt, hilft es besonders dabei, die zweite Grunderfahrung in den Fokus zu stellen.

Die im Mathematikunterricht zu vermittelnde mathematische Grundbildung wird in zwei Kompetenzbereiche aufgeteilt: inhaltsbezogene und prozessbezogene Kompetenzen. Zu den prozessbezogenen Kompetenzen gehören das Problemlösen, das Argumentieren, das Kommunizieren, das Modellieren und die Verwendung von Werkzeugen. Die Inhaltsbezogenen Kompetenzen werden in der Sekundarstufe I eingeteilt in Arithmetik/Algebra, Funktionen, Geometrie und Stochastik. In der Sekundarstufe 2 sind die inhaltlichen Kompetenzbereiche formuliert als Funktionen und Analysis, Analytische Geometrie und Algebra und Stochastik. Der Kompetenzbereich des Konstruierens wird in den Kernlehrplänen nicht als solches aufgegriffen. Dies wirft die Frage auf, an welcher Stelle dieses Thema inhaltlich sinnvoll eingeordnet werden kann.

Wird das Konstruktionsproblem der Winkeldrittelung unter dem Gesichtspunkt der Papierfaltkonstruktion betrachtet, so lässt sich dieses in den Kompetenzbereich Geometrie der Sekundarstufe I einordnen, in welchem es um das Erfassen von ebenen und räumlichen Strukturen nach Maß und Form geht. In der siebten Jahrgangsstufe werden unter anderem Winkelsätze an Geradenkreuzungen, die Innenwinkelsumme, die Winkelhalbierende, die Mittelsenkrechte und darauffolgend die Kongruenzsätze bearbeitet. Dies ist im Kernlehrplan unter den Kompetenzerwartungen am Ende der Jahrgangsstufe 8 zusammengefasst. Hier wird beschrieben, dass die Schülerinnen und Schüler Dreiecke aus gegebenen Winkel- und Seitenmaßen zeichnen können und Eigenschaften von Figuren mithilfe von Symmetrie, einfachen Winkelsätzen und Kongruenzsätzen erkennen und begründen können sollen. Zum Ende der siebten Jahrgangsstufe lässt sich die Winkeldrittelung mit Papierfaltkonstruktionen gut einordnen, um das Beweisen anhand der Kongruenz von Dreiecken zu üben. Da die Winkelhalbierende bereits behandelt wurde, kann ein Zusammenhang zwischen der Winkeldrittelung und der Winkelhalbierung erkannt werden.

An dieser Stelle können auch prozessbezogene Kompetenzen vermittelt werden. Zum einen könnten anhand einer Aufgabe zur Papierfaltkonstruktion Problemlösefähigkeiten entwickelt werden, da es sich bei Konstruktionsaufgaben um Probleme handelt. Die einzelnen Schritte des Problemlöseprozesses von Konstruktionsaufgaben lassen sich in Phasen einteilen. Das Nachvollziehen der Aufgabe, das Herausarbeiten eines Lösungsansatzes und das eventuelle Betrachten einer Fallunterscheidung gehört zu der heuristischen Phase. In der anschließenden algorithmischen Phase wird die Konstruktion durchgeführt und die Konstruktionsbeschreibung erstellt. Die analytische Phase beinhaltet die Begründung der Korrektheit der Konstruktion und Überlegungen dazu, ob das Ergebnis eindeutig ist bzw. warum keine Konstruktion durchführbar ist. [LW14, S. 71-72] Somit gelten Konstruktionsaufgaben als Übungsbeispiele für Problemlösesituationen, wobei die entsprechenden Fähigkeiten bei der Bearbeitung erweitert werden. Des Weiteren sind die verwendeten Werkzeuge einfach zu verwenden und die Konstruktionsschritte lassen sich auf der enaktiven Ebene und der Zeichenebene gut formulieren und verschriftlichen. Somit wird nicht vom eigentlichen Problemlöseprozess abgelenkt.

Neben weiteren Fähigkeiten können auch die Argumentations- und Kommunikationskompetenzen der Schülerinnen und Schüler mit der Durchführung der Papierfaltkonstruktion gefördert werden. Konstruktionsaufgaben geben die Möglichkeit, ihre Lösung schrittweise zu entwickeln, sodass eine klare Argumentationsbasis gegeben ist, mit der verständlich kommuniziert werden kann. Oft werden zur Begründung der Konstruktion bereits bekannte Sätze und Definitionen genutzt, was die Argumentationsfähigkeiten der Schülerinnen und Schüler fördert. [LW14, S. 74]

Soll allerdings das Konstruktionsproblem der Winkeldrittelung genauer untersucht werden, indem auf die Behauptung, dass sich dieses nicht mit Zirkel und Lineal lösen lässt, eingegangen wird, so kann dies inhaltlich in die Sekundarstufe II eingeordnet werden. Dabei bietet es sich an, den Beweis bezüglich der genutzten trigonometrischen Funktionen Sinus und Kosinus gemeinsam mit den Schülerinnen und Schüler zu erarbeiten. Die trigonometrischen Funktionen gehören zum Kompetenzbereich Funktionen und Analysis der Einführungsphase. So könnte der Umgang mit diesen Funktionen erweitert werden. Durch das optionale, selbstständige Erarbeiten einzelner Beweisschritte könnten bezüglich der prozessbezogenen Kompetenzen besonders die Argumentationsfähigkeiten gestärkt werden. Dabei stellt besonders das Argumentieren anhand bekannter Inhalte wie zum Beispiel den trigonometrischen Funktionen und das Erschließen neuer Zusammenhänge einen wichtigen Aspekt dar, der zusätzlich geübt würde. Auch die Kommunikationsfähigkeiten ließen sich fördern, indem Schülerinnen und Schüler ihre Beweisideen austauschen und erste Lösungsansätze diskutieren. Da die ausführliche Behandlung des Beweises im Unterricht sehr viel Zeit in Anspruch nehmen würde, bietet es sich an, diese Thematik zur Förderung talentierter Schüler in einem Projektkurs zu nutzen.

Es ist deutlich geworden, dass sich die Winkeldrittelung aus verschiedenen Perspektiven in unterschiedliche Kontexte der Schulbildung einordnen lässt. Dies bietet die Möglichkeit, die Grunderfahrungen und diverse Kompetenzen zu fördern. Aufgrund der besseren Integrierbarkeit der Winkeldrittelung in den Lehrplan der Sekundarstufe I anhand der behandelten Papierfaltkonstruktion wird im folgenden Abschnitt ein Unterrichtsvorhaben vorgestellt, dessen Kern eben diese Thematik ist.

3.2 Planung eines Unterrichtsvorhabens zum geschichtlichen Thema Winkeldrittelung

Das im Folgenden vorgestellte Unterrichtsvorhaben soll vor allem das Verständnis für die Struktur der Mathematik fördern. Dies ist im Kernlehrplan als Ziel des Mathematikunterrichts fest verankert. So heißt es im Kernlehrplan, dass „Schülerinnen und Schüler [...] im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen und Bildern, als geistige Schöpfungen verstehen und weiterentwickeln [sollen].“ [NRW07]

Dazu sollen die Schülerinnen und Schüler nach einem Einstieg, der die geschichtliche Entwicklung bis hin zum Konstruktionsproblem der Winkeldrittellung darstellt, die Struktur der Mathematik anhand der Möglichkeiten verschiedener Werkzeuge erforschen. Sie bekommen die Grundkonstruktionen des Papierfaltens vorgegeben und sollen diese mit Zirkel und Lineal nachstellen. Nachdem sie diese verschiedenen Herangehensweisen an Konstruktionen nun verglichen haben, wird die Winkeldrittelung anhand des Faltens von Papier durchgeführt. Es wird herausgestellt, an welcher Stelle sich die Konstruktion mit Zirkel und Lineal nicht nachstellen lässt. Abschließend wird den Schülerinnen und Schülern kurz dargelegt, dass auch die Griechen eine Lösung des Problems durch Variation der Werkzeuge entwickeln konnten, um den Zusammenhang zwischen dem Erarbeiteten und dem Vorgehen der Griechen zu erkennen.

3.2.1 Voraussetzungen

Da das Unterrichtsvorhaben das Konstruktionsproblem der Winkeldrittelung anhand der Papierfaltkonstruktion thematisiert, kann dieses wie beschrieben in die siebte Jahrgangsstufe eingeordnet werden. Wichtige Lernvoraussetzungen, die die Schülerinnen und Schüler zu diesem Zeitpunkt bereits mitbringen sollten, sind die Kenntnisse über Winkelhalbierende, Mittelsenkrechten und Kongruenzsätze von Dreiecken. Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass sie im Allgemeinen mit dem Verwenden der Werkzeuge Zirkel und Lineal vertraut sind.

3.2.2 Didaktische Aspekte

Damit das geschichtliche Konstruktionsproblem der Winkeldrittelung im Unterricht behandelt werden kann, sollte die Lehrperson ausreichend Fachwissen mitbringen. Dazu gehört zum einen der geschichtliche Aspekt, der zu Beginn des zweiten Kapitels beschrieben wird. Andererseits sollte die Lehrperson aber auch verstehen, wieso sich ein Winkel im Allgemeinen mit Zirkel und Lineal nicht dritteln lässt und worin der Unterschied zu den Papierfaltkonstruktionen besteht. Nur so wird es möglich, die fachwissenschaftlich exakten Beschreibungen zu reduzieren und an die Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler anzupassen. Dieses Fachwissen ist ebenfalls im zweiten Kapitel dargestellt.

Dieses Thema bringt für die Schülerinnen und Schüler insofern einen Mehrwert, als dass besonders die zweite Grunderfahrung von Winter verinnerlicht werden kann. Wird das geschichtliche Konstruktionsproblem der Winkeldrittelung anhand der Papierfaltkonstruktionen im Unterricht behandelt, so können die Schülerinnen und Schüler anhand der Auseinandersetzung mit verschiedenen Werkzeugen und mathematischen Hintergründen die Mathematik als geistige Schöpfung wahrnehmen.

Dazu soll anhand eines geschichtlichen Einstiegs zunächst das Interesse der Schülerinnen und Schüler an der Entwicklung der Geometrie geweckt werden. Dies erreicht eine erste Sensibilisierung dafür, dass die Mathematik als geistige Schöpfung entstanden ist. An dieser Stelle wird auch schon ein kurzer, historischer Blick auf das Konstruktionsproblem der Winkeldrittelung geworfen.

Als Nächstes soll es darum gehen, diese Teilstruktur der Mathematik zu entdecken, indem die Möglichkeiten verschiedener Konstruktionswerkzeuge verglichen werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen die Grundkonstruktionen, die mit Falten durchführbar sind, auf die Werkzeuge Zirkel und Lineal übertragen. Sie sollen erkennen, dass und wie sich die ersten fünf Grundkonstruktionen der Papierfaltkonstruktionen auch mit Zirkel und Lineal darstellen lassen. Anschließend soll ein Blick auf die letzte Papierfaltgrundkonstruktion geworfen werden. An dieser Stelle sollen die Schülerinnen und Schüler feststellen, dass das Papierfalten Konstruktionen ermöglicht, die über die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal hinausgehen. Hier kann wiederum eine Verbindung zur Struktur der Mathematik hergestellt werden, indem sie erkennen, dass der Teil der Geometrie der Griechen, welcher auf Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen beruhte, durch die Werkzeuge vermeintlich eingeschränkt wurde. Erst eine Erweiterung der Werkzeuge und somit eine Erweiterung der Mathematik ermöglichte es, das Konstruktionsproblem annäherungsweise zu lösen. Das heißt, dass dieses geistig erschaffene Problem der Winkeldrittelung erst dadurch lösbar wurde, dass sich Mathematik weiterentwickelte und somit erweiterte Strukturen, basierend auf erweiterten Werkzeugen und mathematischen Hintergründen, entstanden.

Dies vertiefen die Schülerinnen und Schüler anschließend. Dazu sollen sie anhand einer Konstruktionsvorschrift die Winkeldrittelung mit Papierfalten durchführen. Daraufhin soll die Korrektheit der Konstruktion begründet werden. Es soll zudem mit dem erarbeiteten Wissen herausgestellt werden, an welcher Stelle die Durchführung der Konstruktion mit Zirkel und Lineal nicht möglich wäre.

Schwierigkeiten sind besonders zu dem Zeitpunkt zu erwarten, wenn die Schülerinnen und Schüler eigenständig die Grundkonstruktionen der Papierfaltkonstruktionen auf die Werkzeuge Zirkel und Lineal übertragen sollen. Hier bietet es sich an, an geeigneten Stellen Hilfestellungen zu geben, um den sonst eigenständigen Erarbeitungsprozess zu unterstützen. Dies könnte zum Beispiel durch gestufte Hilfen in Form von Hilfekärtchen, die sich die Schülerinnen und Schüler bei der Lehrperson abholen können, erreicht werden.

Auch der Beweis der Korrektheit der später durchzuführenden Papierfaltkonstruktion zur Winkeldrittelung wird einigen Schülerinnen und Schülern Schwierigkeiten bereiten. Diesem kann entgegengewirkt werden, indem die Schülerinnen und Schüler durch geeignete Aufgabenstellungen eine Struktur des Beweises vorgegeben bekommen. Auch hier bieten sich Hilfestellungen in Form von Hilfekärtchen an.

Das Hauptlernziel des Unterrichtsvorhabens besteht darin, dass die Schülerinnen und Schüler die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal den Papierfaltkonstruktionen gegenüberstellen können und somit Unterschiede dieser mathematischen Herangehensweisen erkennen. Dieses Hauptlernziel soll durch mehrere Teillernziele erreicht werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen zunächst zu den ersten fünf Grundkonstruktionen der Papierfaltkonstruktionen entsprechende Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen darstellen können. Danach sollen sie bezüglich der letzten Grundkonstruktion angeben können, dass sich diese nicht mit Zirkel und Lineal durchführen lässt. Sie sollen zudem die Winkeldrittelung mit der Papierfaltkonstruktion begründen können. Anschließend sollen sie den Grund dafür identifizieren können, warum diese Papierfaltkonstruktion mit Zirkel und Lineal nicht durchführbar wäre, und dies auf die Grundkonstruktionen zurückführen können.

Gelingt es, dass sich die Schülerinnen und Schüler dieses Thema innerhalb des Unterrichtsvorhabens erschließen, so lernen sie, vorgegebene Strukturen zu untersuchen, zu hinterfragen und neue zu entdecken, indem sie Grenzen von Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen aufgezeigt bekommen und gleichzeitig die Möglichkeiten des Papierfaltens kennenlernen. Sie können erkennen, dass eine Wissenschaft nicht plötzlich vorhanden ist, sondern über Jahrhunderte aufgebaut wird und, dass diese Struktur immer weiter entwickelt werden kann. Dies bringt den Mehrwert mit sich, dass die Schülerinnen und Schüler lernen, sowohl mathematische als auch alltägliche Strukturen zu untersuchen, zu hinterfragen und weiterzuentwickeln. So kann ein kleiner Beitrag dazu geleistet werden, den Schülerinnen und Schülern gesellschaftskritisches Denken zu vermitteln und ihren eigenständigen Lebensweg zu unterstützen.

3.2.3 Methodische Aspekte

In diesem Abschnitt wird nun darauf eingegangen, mit welchen Sozialformen, Medien und mit welchem Material ein solches Unterrichtsvorhaben realisiert werden kann. Die konkreten Aufgaben, Arbeitsblätter und weiteren Inhalte hierfür befinden sich im Anhang unter dem Abschnitt „Materialien zum Unterrichtsvorhaben".

Der Unterrichtseinstieg kann durch eine Präsentation mit Prezi realisiert werden. Prezi ist eine Online-Präsentationssoftware, die sich vor allem durch ihre dynamischen Animationen anbietet. Die Präsentation befindet sich im Anhang als PDF-Datei und ist vollständig im digitalen Anhang anzusehen. Sie beinhaltet einige geschichtliche Informationen und leitet das Problem der Winkeldrittelung her. Hier bietet es sich an, den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit zu geben, die Präsentation selbst an einem Computer zu erforschen, um das Interesse zu wecken. Es wird eine Darstellung der Präsentation mit Prezi gewählt, da die vorhandene Bewegung der Folien für manche Schülerinnen und Schüler etwas Neues sein kann und so das Interesse zusätzlich geweckt werden kann. Je nach Ausstattung kann dies in Einzel- oder Partnerarbeit geschehen.

Anschließend leitet die Lehrperson mündlich zur Erarbeitungsphase über. Dabei ist es wichtig, den Schülerinnen und Schülern zu erklären, dass nun das Ziel ist, eine Möglichkeit zur Lösung des Problems zu finden, indem ein neues „Werkzeug" erforscht wird. Dies geschieht zunächst dadurch, dass dieses neue „Werkzeug" des Faltens von Papier, wobei das eigentliche Werkzeug die Hände sind, die das Papier falten, mit den Werkzeugen Zirkel und Lineal verglichen wird.

In der Erarbeitungsphase sollen nun die ersten fünf Grundkonstruktionen des Papierfaltens mit Zirkel und Lineal nachgestellt werden. Da dies ein kreativer Prozess ist und aus zeitlichen Gründen wahrscheinlich auch nicht jeder Schüler/ jede Schülerin jede Grundkonstruktion ausführlich nachstellen kann, bietet es sich an, dies in Gruppenarbeit durchzuführen. Die Arbeitsblätter für die Gruppenarbeit befinden sich ebenfalls im Anhang. Die ersten beiden Gruppen bearbeiten jeweils zwei Grundkonstruktionen und die dritte Gruppe beschäftigt sich mit der fünften, etwas schwierigeren Grundkonstruktion. Während der Gruppenarbeit werden mittels eines Beamers noch einmal die Grundkonstruktionen von Zirkel und Lineal der Prezi den Schülerinnen und Schülern zugänglich gemacht. Zudem werden auf dem Lehrerpult Hilfekärtchen ausgelegt, die verschiedene Hilfestufen für die verschiedenen Gruppen anbieten. Da der Umfang dieser Arbeit begrenzt ist, wird auf die konkrete Ausgestaltung der Hilfekärtchen verzichtet. Die Sicherung der Gruppenarbeit erfolgt in Form von Plakaten, die die Gruppen im Plenum vorstellen. So können die Plakate anschließend in der Klasse aufgehangen werden und die erarbeiteten Erkenntnisse sind im weiteren Verlauf präsent. Danach sollte die Lehrperson noch einmal zusammenfassen, dass alle bisher untersuchten Grundkonstruktionen des Papierfaltens auch mit Zirkel und Lineal nachgestellt werden konnten.

Allerdings gibt es noch eine sechste Grundkonstruktion des Papierfaltens. Es wird zunächst der Zettel ausgeteilt, der alle Grundkonstruktionen des Papierfaltens aufzählt. Die Schülerinnen und Schüler sollen sich die sechste Grundkonstruktion durchlesen. Die Lehrperson erklärt anschließend im Plenum, was nötig wäre, um dies mit Zirkel und Lineal nachzustellen. Es wurde bereits herausgefunden, dass die, durch das Aufeinanderfalten zweier Punkte entstehende, Faltlinie anhand einer Mittelsenkrechten der Strecke zwischen diesen beiden Punkten nachgestellt werden kann. Die sechste Grundkonstruktion erwartet, dass die Punkte der Geraden, auf die die beiden Punkte jeweils gefaltet werden sollen, so liegen, dass die beiden entstehenden Mittelsenkrechten die gleiche Gerade ergeben. Um das Verständnis hierfür zu stärken, sollen die Schülerinnen und Schüler dies danach anhand einer Geogebra-Datei, die sich im digitalen Anhang befindet, ausprobieren. Sie müssen also versuchen, die Punkte auf den Geraden so zu variieren, dass die beiden Mittelsenkrechten eine Gerade ergeben. An dieser Stelle sollen sie feststellen, dass dies nur schwer erreichbar ist und eine Durchführung der sechsten Grundkonstruktion mit Zirkel und Lineal somit nicht möglich ist. Je nach Verfügbarkeit an Computern kann dies in Einzel- oder Partnerarbeit durchgeführt werden. Hier sollten nicht zu große Gruppen gebildet werden, damit jeder Schüler/ jede Schülerin selbst die Erfahrung der Unmöglichkeit der Konstruktion machen kann.

Um nun zur Winkeldrittelung überzuleiten, sollte die Lehrperson noch einmal zusammenfassen, dass festgestellt werden konnte, dass das Papierfalten die Möglichkeit gibt, Faltungen durchzuführen, die mit Zirkel und Lineal nicht nachstellbar sind. Aufgrund dieser Eigenschaft kann nun die Winkeldrittelung mit Papierfalten durchgeführt werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen nun die Winkeldrittelung mit Hilfe des Arbeitszettels durchführen. Der Zettel zur Winkeldrittelung mit Origami wird ausgeteilt und jeder Schüler/jede Schülerin führt die Faltungen selbstständig durch. Anschließend wird der Arbeitszettel zur schrittweisen Begründung der Korrektheit der Konstruktion ausgeteilt. In Partnerarbeit sollen die Schülerinnen und Schüler die einzelnen Schritte nun begründen. Hier wird die Sozialform der Partnerarbeit gewählt, da einzelnen Schülerinnen und Schülern wahrscheinlich Ideen fehlen und sich die Schülerinnen und Schüler so gegenseitig ergänzen können. Zudem kann so der Lösungsprozess im Gegensatz zum Arbeiten in großen Gruppen anhand geeigneter Hilfestellungen individuell gestaltet werden. Als Hilfestellungen bieten sich auch hier wieder Hilfekärtchen an, die zwischen der enaktiven, ikonischen und symbolischen Ebene unterscheiden. So könnte man auf der enaktiven Ebene die Schülerinnen und Schüler zum Beispiel gewisse Faltungen durchführen lassen, um Ideen für die Begründungen zu bekommen. Auf der ikonischen Ebene könnten spezielle Zeichnungen, die die wichtigsten Gegebenheiten hervorheben, Hilfestellungen geben. Auf der symbolischen Ebene könnten die Schülerinnen und Schüler durch Ansätze, die wörtlich formuliert werden, Hilfestellungen bekommen. Aufgrund des begrenzten Umfangs dieser Arbeit werden die Hilfekärtchen, wie bereits erwähnt, nicht konkret ausgestaltet. Die Ergebnisse werden anschließend an der Tafel festgehalten.

Ist der Beweis vollständig besprochen, so wird im Plenum mit den gewonnenen Erkenntnissen diskutiert, welcher Schritt der Winkeldrittelung mit Papierfalten nicht mit Zirkel und Lineal durchführbar ist. Dabei sollte die Erkenntnis gewonnen werden, dass der vierte Schritt der sechsten Grundkonstruktion der Papierfaltkonstruktionen entspricht und dies nicht mit Zirkel und Lineal durchführbar ist.

Um das Thema abzurunden, wird die Präsentation zum Ende des Unterrichtsvorhabens durch eine Fortsetzung noch einmal aufgegriffen. Dies wird mithilfe des Beamers realisiert. Inhaltlich wird an dieser Stelle erklärt, dass auch die Griechen durch Variation der Werkzeuge geeignete Lösungen entwickelt haben.

Da an dieser Stelle keine konkreten Rahmenbedingungen bekannt sind, werden die Inhalte zeitlich nicht zugeordnet. Es soll offen gelassen werden, in welcher Form das Unterrichtsvorhaben in die Praxis transferiert wird. Es ist vorstellbar, das Unterrichtsvorhaben sowohl in einer Unterrichtsreihe, als auch im Rahmen eines Projektkurses umzusetzen.

3.2.4 Tabellarischer Verlauf

Unterrichtsphase und Operationen	**Sozialform**	**Medien, Material**
Einstieg und Problementwicklung: • Informationen zur Entwicklung der Geometrie • Frage nach der Lösung des Konstruktionsproblems	Einzel-/ Partnerarbeit	Computer, Präsentation (Teil 1)
Erarbeitungsphase: • Nachstellen der ersten fünf Grundkonstruktionen des Papierfaltens mit Zirkel und Lineal • Ergebnisformulierung: bisher sind alle Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal durchführbar	Gruppenarbeit	Gruppenarbeitsblätter, Hilfekärtchen
Sicherung: • Festhalten und Vorstellen der Ergebnisse der Erarbeitungsphase	Gruppenarbeit, Plenum	Plakate
Erarbeitungsphase: • Vorstellen der sechsten Grundkonstruktion der Papierfaltkonstruktionen • Erklärung, was nötig wäre, um diese mit Zirkel und Lineal nachstellen zu können • Gewinnen der Erkenntnis, dass sich diese nicht mit Zirkel und Lineal nachstellen lässt, indem dies ausprobiert wird	Plenum, Einzel-/Partnerarbeit	Arbeitsblatt Computer, Geogebra-Datei

Sicherung: • Zusammenfassung des Ergebnisses, dass das Papierfalten Konstruktionen ermöglicht, die mit Zirkel und Lineal nicht durchführbar sind	Plenum	
Erarbeitungsphase: • Selbstständiges Durchführen der Winkeldrittelung mit Origami	Einzelarbeit	Arbeitsblatt
Erarbeitungsphase: • Beweis der Korrektheit der Konstruktion	Partnerarbeit	Arbeitsblatt, Hilfekärtchen
Sicherung: • Besprechen der Erkenntnisse	Plenum	Tafel
Ausstieg: • kurze Informationen dazu, wie die Griechen mit diesem Problem umgegangen sind • Fokus auf dem Entwickeln von Werkzeugen	Plenum	Beamer, Präsentation (Teil 2)

Kapitel 4

Fazit der vorliegenden Arbeit im Gesichtspunkt der Unterrichtsplanung

In der Einleitung dieser Arbeit wurde die Frage formuliert, wie sich Ziele des Mathematikunterrichts mithilfe historischer Aspekte erreichen lassen. Ziel dieser Arbeit war, ein konkretes Unterrichtsvorhaben zu entwickeln, welches einen Mehrwert bei der Erreichung von Unterrichts- und Kernlehrplanzielen bietet.

Aufgrund des Themas war es zunächst sinnvoll, Teilaspekte der Geschichte der Geometrie genauer zu betrachten, um einen Eindruck der Thematik zu erlangen. Bei der genaueren Recherche schien das Konstruktionsproblem der Winkeldrittelung eine gute Möglichkeit zur Integration in ein Unterrichtsvorhaben zu bieten, da die Geometrie an dieser Stelle an Grenzen stieß und ein Punkt erreicht war, der erweiterte Strukturen zur Lösung des Problems forderte. Um die bis zum Auftauchen des Konstruktionsproblems aufgebaute geistige Schöpfung der Geometrie dem Leser aufzuzeigen, wurden in dieser Arbeit Teile der Geschichte der Geometrie bis zu diesem Zeitpunkt dargestellt.

Es stellte sich die Frage, was dieses Thema neben dem geschichtlichen Aspekt ausmacht. Um diese Frage zu beantworten und weitere Bestandteile dieses Themas zu erfassen, wurde die zugehörige Mathematik betrachtet. Hierbei zeigte sich die Vielfalt an Facetten, die diese Thematik ausmachen. Zunächst wurden Konstruktionen im mathematik-didaktischen Sinne betrachtet. Anschließend war es besonders wichtig, zu verstehen, warum sich Winkel mit Zirkel und Lineal nicht dritteln lassen, um zu erkennen, weshalb das Konstruktionsproblem der Winkeldrittelung aufgekommen ist. Dies gelang über einen algebraischen Zugang zu Konstruktionen. Weiterhin wurden Papierfaltkonstruktionen untersucht und mit der Winkeldrittelung verknüpft.

So ergaben sich durch verschiedene Sichtweisen auch verschiedene Integrationsmöglichkeiten in die Schulbildung. Es wurde herausgefunden, dass sich das Thema sowohl in die Sekundarstufe I als auch in die Oberstufe einordnen lässt. Die konkrete Einordnung hängt davon ab, welcher Aspekt des Konstruktionsproblems hervorgehoben werden soll. So kann die aufgeführte Papierfaltkonstruktion zum Beispiel gut in die siebte Jahrgangsstufe eingeordnet werden. Im

Gesichtspunkt der trigonometrischen Funktionen ließe sich der Beweis dafür, dass sich Winkel im Allgemeinen nicht mit Zirkel und Lineal dritteln lassen, in die Oberstufe einordnen. Da dies jedoch sehr viel Zeit in Anspruch nehmen würde, die in der Oberstufe dafür nicht eingeplant ist, würde sich hier eher die Entwicklung eines Projektkurses anbieten. Aufgrund der besseren Integrationsmöglichkeit wurde die Unterrichtsplanung im Gesichtspunkt der Papierfaltkonstruktionen ausgewählt.

Anschließend ging es darum, Unterrichtziele festzulegen, die mithilfe des Themas erreicht werden könnten. Da beim Erforschen von Teilen der Geschichte der Geometrie besonders interessant war, wie die Geometrie aufgebaut wurde und wie diese Struktur durch verschiedene Werkzeuge geprägt war, wurde als Intention des Unterrichtvorhabens das Vermitteln einer Teilstruktur der Mathematik nach der zweiten Grunderfahrung von Winter gewählt.

Um dieses Ziel zu erreichen, entstand die Idee, dass Schülerinnen und Schüler selbst den Prozess des Entdeckens neuer Werkzeuge durchlaufen sollen. Mit Hilfe des erarbeiteten Hintergrundwissens der Lehrkraft wurde das Unterrichtsvorhaben aufbauend auf diesem Grundgedanken entwickelt. Schülerinnen und Schüler sollen zunächst Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen und Papierfaltkonstruktionen miteinander vergleichen. So sollen sie erkennen, dass die griechische Geometrie mit der reinen Nutzung von Zirkel und Lineal als Werkzeug an dieser Stelle in gewisser Weise eingeschränkt wurde. Es ergab sich das Konstruktionsproblem der Winkeldrittelung. Erst dadurch, dass die Griechen die geistige Struktur der Geometrie um neue Werkzeuge erweitert haben, konnte dieses Problem gelöst werden. Auch die Schülerinnen und Schüler sollen diesen Schritt durchführen, nämlich die Geometrie um ein Werkzeug erweitern. Durch den Vergleich der Werkzeuge und die anschließende Durchführung der Winkeldrittelung mit dem Falten von Papier soll die Wahrnehmung für die Struktur der Mathematik gefördert werden.

Im Laufe der Erarbeitung des Unterrichtsvorhabens war es eine Herausforderung, sich in die Rolle eines Schülers/einer Schülerin in der siebten Klasse hineinzuversetzen. Dies war jedoch nötig, um das Unterrichtsvorhaben möglichst altersgerecht und dem Wissenstand der Schülerinnen und Schüler entsprechend zu gestalten. Auch das fehlende Wissen über Rahmenbedingungen erschwerte die Erarbeitung des Unterrichtsvorhabens. Ungeachtet dieser Herausforderungen war die Gestaltung eines konkreten Unterrichtsvorhabens eine fördernde und fordernde Aufgabe.

Insgesamt konnte festgestellt werden, dass es wichtig ist, sich als Lehrperson mit der Fachmathematik zu beschäftigen. Erst dadurch, dass die zugehörige Fachmathematik verstanden wurde, ergab sich die Möglichkeit, die verschiedenen Facetten des Themas zu erkennen. Somit konnte herausgefunden werden, dass durch verschiedene Sichtweisen auf das Thema auch verschiedene Integrationsmöglichkeiten in die Schulbildung entstehen können.

Nachdem der historische Aspekt des Konstruktionsproblems der Winkeldrittelung thematisch in die Schulmathematik eingeordnet wurde, hatte das erarbeitete Hintergrundwissen noch einen weiteren Nutzen. Durch das Verständnis der Fachmathematik war es möglich, das Thema für die Schülerinnen und Schüler zu reduzieren und so das Unterrichtsvorhaben zu entwickeln. Zum Beispiel konnte erst dadurch, dass der Unterschied zwischen den Möglichkeiten von Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen und Papierfaltkonstruktionen erkannt wurde, die Idee für eine geeignete Geogebra-Datei, die den Schülerinnen und Schülern diesen Unterschied vermitteln soll, entwickelt werden. Das fachmathematische Wissen darüber, warum sich Winkel im Allgemeinen nicht mit Zirkel und Lineal dritteln lassen, verleiht zusätzliche Sicherheit und Überzeugungskraft bei der Vermittlung der Inhalte. So kann die Lehrperson durch fundiertes Wissen flexibler auf Schülerfragen reagieren und interessante Zusammenhänge, die während des Unterrichts auftreten, situationsgerecht behandeln.

Trotz der gewissenhaften Erarbeitung des Unterrichtsvorhabens kann jedoch erst in einer praktischen Durchführung geklärt werden, ob das Unterrichtsvorhaben tatsächlich einen Mehrwert bei der Erreichung von Unterrichts- und Kernlehrplanzielen bietet. Somit wäre der nächste Schritt, dieses Unterrichtsvorhaben in die Praxis umzusetzen und zu überprüfen, welche Erkenntnisse die Schülerinnen und Schüler dadurch erlangen.

Abschließend ist zu erwähnen, dass es sicherlich viele weitere historische Aspekte gibt, die sich in den Mathematikunterricht integrieren lassen. Dabei kann es möglich sein, dass andere historische Aspekte den Fokus auf weitere Ziele des Mathematikunterrichts legen können. Dennoch konnte durch die Arbeit am Beispiel des Konstruktionsproblems der Winkeldrittelung gezeigt werden, dass die Integration historischer Aspekte ein großes Potential bezüglich der Erreichung von Unterrichtszielen bietet.

4.0.1 Reflexion des persönlichen Arbeitsprozesses

Die persönlichen Arbeitsschritte bis hin zur Gestaltung des Unterrichtsvorhabens sind in der vorliegenden Arbeit nicht eindeutig zu erkennen. So ist nicht ersichtlich, dass die Idee für das Thema aus reinem Interesse, welches den Papierfaltkonstruktionen galt, entstanden ist. Gespräche halfen dabei, die erste Idee mit im Zusammenhang stehenden Inhalten zu erweitern, um im Anschluss eine detaillierte Literaturrecherche durchführen zu können. Durch den so erlangten Überblick über die verschiedenen Facetten des Themas konnte eine erste Annäherung an Inhalte des zu planenden Unterrichtsvorhabens stattfinden.

Um die recherchierten Probleme hinterleuchten zu können, wurde anschließend die dahinter liegende Fachmathematik erarbeitet. Erst durch das Verstehen der Fachmathematik gelang es, sich den gesamten Kontext zwischen Fachmathematik und Geschichte der Geometrie zu erschließen und einen tieferen Zugang zum Thema zu erhalten.

Infolgedessen entstand die Möglichkeit, Ziele des Kernlehrplans in Einklang mit der Thematik zu bringen und so den gesamten Inhalt eines Unterrichtsvorhabens zu definieren. Durch die Definition der Inhalte konnten die zuvor erarbeiteten, fachlichen Inhalte so verdichtet und vereinfacht werden, dass sie für das Unterrichtsvorhaben verwendbar waren.

Dieses Vorgehen in der Erarbeitung des Unterrichtsvorhabens erwies sich als vorteilhaft, da durch das Erarbeiten eines detaillierten Verständnisses es erst möglich wurde, interessante Zusammenhänge zu erkennen. Zudem verringerte das detaillierte Verständnis die Abhängigkeit von Fremdmaterialien und ermöglichte eine freiere Planung und Gestaltung des Unterrichtsvorhabens.

Abbildungsverzeichnis

2.1 Konstruktion der parallelen Geraden . . . 11
2.2 Konstruktion von $a - b$: Fall $a > b$ . . . 13
2.3 Konstruktion von $a - b$: Fall $a = b$ . . . 14
2.4 Konstruktion von $a - b$: Fall $a < b$ . . . 14
2.5 Konstruktion von $a \cdot b$ . . . 15
2.6 Konstruktion von $\frac{a}{b}$ . . . 16
2.7 Konstruktion von $r \cdot a$ . . . 17
2.8 Konstruktion von $\sqrt{a}$ . . . 19
2.9 Drittelung des Winkels α . . . 26
2.10 Drittelung des rechten Winkels . . . 29
2.11 Papierfaltgrundkonstruktion (P5) . . . 30
2.12 Papierfaltgrundkonstruktion (P6) . . . 30
2.13 Winkeldrittelung durch Falten . . . 31
2.14 Korrektheit der Winkeldrittelung durch Falten . . . 32

Literaturverzeichnis

[GPS04a] Griesel, H. ; Postel, H. ; Suhr, F.: *Elemente der Mathematik 8*. Bildungshaus Schulbuchverlage, 2004

[GPS04b] Griesel, H. ; Postel, H. ; Suhr, F.: *Elemente der Mathematik 9*. Bildungshaus Schulbuchverlage, 2004

[Hen12] Henn, H.-W.: *Geometrie und Algebra im Wechselspiel*. Wiesbaden : Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien, 2012. – 2. Auflage

[HHP15] Hilgert, J. ; Hoffmann, M. ; Panse, A.: *Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag GmbH, 2015

[Hof16] Hoffmann, Max: *Winkeldrittelung mit Origami*. `http://math.uni-paderborn.de/index.php?id=63569`. Version: 2016

[LW14] Ludwig, M. ; Weigand, H.-G.: Konstruieren. In: Padberg, F. (Hrsg.): *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*. 2. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2014

[MK16] Modler, F. ; Kreh, M.: *Tutorium Algebra*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag GmbH, 2016. – 2. Auflage

[NRW07] NRW, MSW: *Mathematik - Kernlehrplan für das Gymnasium - Sekundarstufe I (G8) in Nordrhein-Westfalen*. 1. Frechen : Ritterbach-Verlag, 2007

[NRW14] NRW, MSW: *Mathematik - Kernlehrplan für die Sekundarstufe II Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein- Westfalen*. 1. Frechen : Ritterbach-Verlag, 2014

[SHH13] Schmitt-Hartmann, R. ; Herget, W.: *Moderner Unterricht: Papierfalten im Mathematikunterricht 5-12*. Stuttgart : Klett, 2013

[SP15] Schulze-Pillot, R.: *Einführung in Algebra und Zahlentheorie*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag GmbH, 2015. – 3. Auflage

[SS03] Scriba, C. J. ; Schreiber, P.: *5000 Jahre Geometrie - Geschichte, Kulturen, Menschen*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2003

[Wei16] Weich, T.: *Skript zur Vorlesung: Grundlagen der Geometrie*. 2016. – Universität Paderborn

Anhang A

Mathematische Grundlagen

Definition 21 (Abelsche Gruppen [HHP15, Beispiel 2.5]).
Sei Z eine feste nichtleere Menge. Auf Z sei eine Addition gegeben, das heißt eine Abbildung $a : Z \times Z \to Z$, für die die Notation $x + y := a(x, y)$ eingeführt wird. Man nennt Z eine *abelsche Gruppe*, wenn die drei folgenden Axiome erfüllt sind:

$$\begin{aligned} &Axiom(Kommutativit\ddot{a}t): \forall x, y \in Z: \quad x + y = y + x \\ &Axiom(Assoziativit\ddot{a}t): \quad \forall x, y, z \in Z: x + (y + z) = (x + y) + z \\ &Axiom(L\ddot{o}sbarkeit): \qquad Zu\, a, b \in Z \quad \exists\, x \in Z\, mit\, a + x = b \end{aligned}$$

Verzichtet man auf das Lösbarkeitsaxiom, so spricht man von einer kommutativen Halbgruppe.

Proposition 22 (Null in abelschen Gruppen [HHP15, Proposition 2.6]).
Sei $(Z, +)$ eine abelsche Gruppe. Dann gibt es genau ein $n \in Z$ mit

$$\forall\, x \in Z: \; x + n = x$$

Dieses Element heißt *Null* oder *neutrales Element* bezüglich +. Normalerweise wird es mit 0 bezeichnet.

Beweis: Es wird zunächst die Existenz von n gezeigt: Wähle ein $a \in Z$. Dann garantiert das Lösbarkeitsaxiom aus Definition 21 die Existenz einer Lösung der Gleichung $a + z = a$, das heißt eines Elements $n \in Z\; mit\, a + n = a$. Es wird nun gezeigt, dass mit diesem n für alle $x \in Z$ die Gleichung $x + n = x$ gilt. Wähle dazu ein $x \in Z$. Wieder mit dem Lösbarkeitsaxiom finden wird ein $y \in Z$ *mit* $a + y = x$. Dann rechnet man

$$\begin{aligned} x + n &= (a+y)+n \\ &\stackrel{Ass}{=} a + (y+n) \\ &\stackrel{Kom}{=} a + (n+y) \\ &\stackrel{Ass}{=} (a+n)+y \\ &\stackrel{Def}{=} a+y \\ &= x. \end{aligned}$$

Um die Eindeutigkeit von n zu zeigen, nimmt man an, man habe zwei Elemente n_1 und n_2, die beide Nullen sind. Es gilt dann

$$n_1 = n_1 + n_2 = n_2 + n_1 = n_2.$$

□

Definition 23 (Ring mit Eins [MK16, Definition 1.5])**.**
Sei R eine Menge mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$. Das Tripel $(R, +, \cdot)$ heißt *Ring* genau dann, wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

$$\begin{aligned} &(R1)\ (R,+) \textit{ bildet eine abelsche Gruppe}, \\ &(R2)\ \forall a,b,c \in R:\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\ (\textit{Assoziativität der Multiplikation}), \\ &(R3)\ \forall a,b,c \in R:\ (a+b) \cdot c = ac + bc \textit{ und } a \cdot (b+c) = ab + ac, \\ &(R4)\ \textit{Es gibt ein Einselement, das wir mit } 1 \textit{ bezeichnen, das heißt } a \cdot 1 = 1 \cdot a = a\ \forall a \in R. \end{aligned}$$

Der Ring heißt kommutativ/abelsch, wenn

$$a \cdot b = b \cdot a\ \forall a, b \in R.$$

Definition 24 (Körper [MK16, Definition 1.7])**.**
Ein *Körper* ist ein Tripel $(K, +, \cdot)$, für das gilt:

$$\begin{aligned} &(K1)\ (K,+) \textit{ ist eine abelsche} \\ &\qquad \textit{Gruppe}, \\ &(K2)\ \textit{Ist } 0 \textit{ das neutrale Element von } (K,+), \textit{ so bildet } (K^x, \cdot)\ (K^x := K \backslash 0) \textit{ eine} \\ &\qquad \textit{abelsche Gruppe}, \\ &(K3)\ \textit{Es gilt das Distributivgesetz}: \\ &\qquad \forall a,b,c \in K:\ a \cdot (b+c) = ab + ac. \end{aligned}$$

Definition 25 (Polynom [MK16, Definition 3.1]).
Sei R ein Ring mit Eins. Ein *Polynom* über R ist ein Ausdruck der Form $a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$, wobei $a_i \in R$ und x eine Unbestimmte ist.
Die Menge aller Polynome über R wird mit $R[x]$ bezeichnet und bildet den sogenannten Polynomring.

Ist $f \in R[x]$ ein Polynom mit $f \neq 0$, so nennt man

$$deg\, f := max\{n \in \mathbb{N} : \ a_n \neq 0\},$$

also den höchsten in f auftretenden Exponenten von x, den Grad von f. Den Grad des Nullpolynoms definiert man als $deg\, 0 := -\infty$.

Die Menge aller Polynome bildet den sogenannten Polynomring [MK16, S. 79].

Definition 26 (Polynomfunktion [MK16, Definition 3.3]).
Ist $f = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ ein Polynom über einem Ring R mit Eins und $b \in R$, so heißt das Ringelement

$$f(b) := a_0 + a_1 b + ... + a_n b^n \ \ \in R$$

der Wert von f in b. Die zugehörige Funktion $R \to R, b \mapsto f(b)$ wird eine *Polynomfunktion* genannt.
Ist $f(b) = 0 \ \in R$, so heißt b eine *Nullstelle* von f.

Anhang B

Materialien zum Unterrichtsvorhaben

Prezi zur Geschichte der Geometrie – Teil 1

Die Urgesellschaft

Schon ab 40 000 v. Chr. entdeckten Menschen geometrische Objekte in der Natur, zum Beispiel Kreise aus Baumstämmen.
Sie nutzen diese zum Schmücken von Tongefäßen.

Die ägyptische und babylonische Mathematik

Ab ca. 2000 v. Chr. diente die Mathematik der Praxis und es konnten beispielsweise Flächen berechnet werden.
So konnten Pyramiden und Häuser geplant werden.

Die griechische Geometrie

Ab ca. 600 v. Chr.
analysierten die Griechen die geometrischen Strukturen und erklärten Eigenschaften, die bisher einfach so genutzt wurden. Sie entfernten sich von der Praxis und machten daraus eine Theorie.

Wichtige Werkzeuge der griechischen Geometrie sind der Zirkel und das Lineal. Euklid war ein wichtiger, griechischer Mathematiker, der das Wissen der Griechen zusammenfasste und festhielt, welche Grundkonstruktionen, also einfache Schritte, mit Zirkel und Lineal durchführbar sind. Alle Konstruktionen bestehen aus diesen Grundkonstruktionen.

Dies sind die Grundkonstruktionen, die mit Zirkel und Lineal durchführbar sind:

- Es lässt sich eine Gerade durch zwei Punkte ziehen.
- Der Schnittpunkt von zwei Geraden kann gekennzeichnet werden.
- Man kann einen Kreis um einen Punkt durch einen anderen ziehen.
- Die Schnittpunkte zweier Kreise oder eines Kreises mit einer Geraden lassen sich konstruieren.

Hippias von Elis wollte ca. 420 v. Chr. Entfernungen im Weltall messen und musste dafür einen Winkel dritteln. Er nahm die Schriften des Euklid zur Hilfe und versuchte immer wieder, dies mit Zirkel und Lineal durchzuführen.
Allerdings war dies mit den Werkzeugen Zirkel und Lineal nicht möglich.
Wie sollte er sein Problem nun lösen?

Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen und Origami im Vergleich

Origami beschreibt das Falten von Papier, ohne das Papier zu reißen oder zu schneiden. In der Geschichte wurde Origami vor allem genutzt, um Kunstwerke zu erstellen. Allerdings kann das Falten von Papier auch genutzt werden, um mathematische Konstruktionsprobleme zu lösen. Es gibt sogenannte Grundkonstruktionsschritte, die beschreiben, welche Faltungen in einem Schritt möglich sind. Zwei dieser Schritte lauten:

1. Durch zwei gegebene Punkte lässt sich eine Faltlinie falten.

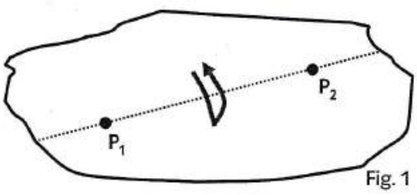


Abbildung 1: Grundkonstruktion 1 [1]

2. Zwei Faltlinien lassen sich durch eine Faltung aufeinander falten.

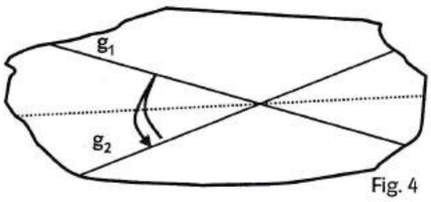


Abbildung 2: Grundkonstruktion 4[1]

Hätte Hippias von Elis diese Konstruktionsschritte auch mit Zirkel und Lineal durchführen können? Lest euch noch einmal genau die Grundkonstruktionen für die Werkzeuge Zirkel und Lineal durch und versucht, die aufgeführten Schritte des Origami mit Zirkel und Lineal durchzuführen. Haltet eure Ergebnisse auf einem Plakat fest.

[1]Schmitt-Hartmann, R. ; Herget, W.: *Moderner Unterricht: Papierfalten im Mathematikunterricht 5-12.* Stuttgart : Klett, 2013

Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen und Origami im Vergleich

Lösungen

Die Lösungen sind als Hintergrundwissen für die Lehrperson gedacht und sollen nicht die Erwartungen an die Plakate widerspiegeln. Die Schülerinnen und Schüler sollen hauptsächlich erkennen, dass die angegebenen Grundkonstruktionen durch die Grundkonstruktion (K1) bzw. die Winkelhalbierende repräsentiert werden. Die Angabe der zugehörigen Konstruktionsschritte würde dem Umfang der Gruppenarbeit vollkommen genügen. Allerdings wird an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Erwartungen an die Ausführlichkeit der Bearbeitungen von der Lerngruppe anhängig sein sollten.

1. **Durch zwei gegebene Punkte lässt sich eine Faltlinie falten.**

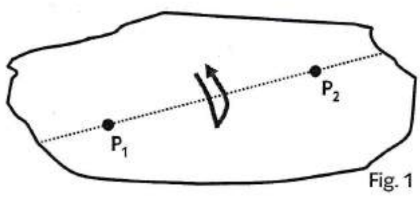


Abbildung 1: Grundkonstruktion 1 [1]

Diese Grundkonstruktion entspricht der Grundkonstruktion (K1) von Zirkel und Lineal, die das Legen einer Verbindungsgerade durch zwei verschiedene Punkte beschreibt.

2. **Zwei Faltlinien lassen sich durch eine Faltung aufeinander falten.**

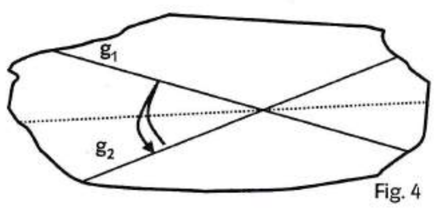


Abbildung 2: Grundkonstruktion 4[1]

Für das Nachstellen dieser Grundkonstruktion mit Zirkel und Lineal müssen zwei Fälle unterschieden werden:

1. Fall ($g_1 \nparallel g_2$):
   Diese Grundkonstruktion des Papierfaltens lässt sich mit Zirkel und Lineal nachstellen, indem eine Winkelhalbierende des Schnittwinkels der Faltlinien konstruiert wird, falls die Faltlinien nicht parallel sind. Die Faltlinien werden jeweils als Geraden der euklidischen Ebene aufgefasst. Es sind also zwei Geraden g_1 und g_2 gegeben. Die Winkelhalbierende wird mit folgenden Schritten konstruiert:

   1. Markieren des Schnittpunktes der beiden Geraden mit S;
   2. Kennzeichnen eines Punktes P, der nicht S entspricht, auf der Geraden g_2;
   3. Zeichnen eines Kreises k_1 um S durch P;

[1] Schmitt-Hartmann, R. ; Herget, W.: *Moderner Unterricht: Papierfalten im Mathematikunterricht 5-12.* Stuttgart : Klett, 2013

4. Bezeichnen eines Schnittpunktes des Kreises k_1 mit der Geraden g_1 mit Q;
5. Zeichnen eines Kreises k_2 um P durch Q;
6. Zeichnen eines Kreises k_3 um Q durch P;
6. Benennen eines Schnittpunktes der Kreise k_2 und k_3 mit W;
7. Zeichnen der Geraden w durch S und W; Dies ist die gesuchte Winkelhalbierende.

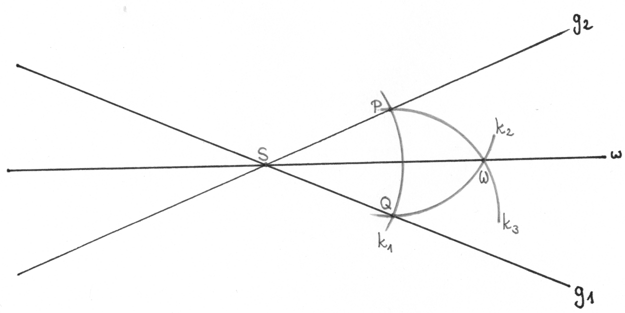


Abbildung 3: Konstruktion der Papierfaltgrundkonstruktion 4 ($g_1 \nparallel g_2$)

Durchführbarkeit:
Die ersten drei Schritte sind nach den Grundkonstruktionen (K2) und (K3) durchführbar. Da S der Schnittpunkt der Geraden g_1 und g_2 und der Mittelpunkt des Kreises k_1 ist, müssen P und Q des vierten Konstruktionsschrittes existieren. Der fünfte und sechste Schritt sind nach der Grundkonstruktion (K3) durchführbar. Die Kreise k_2 und k_3 schneiden sich, da die Mittelpunkte P und Q sind und der Radius der Kreise jeweils dem Abstand von P und Q entspricht. Der letzte Schritt ist nach (K1) durchführbar.

Korrektheit:
Da P und Q auf k_1 liegen und S der Mittelpunkt des Kreises k_1 ist, haben P und Q den gleichen Abstand von S. Das Dreieck SPQ ist somit gleichseitig. W liegt auf dem Kreis k_2 um P durch Q und somit entspricht der Abstand von W und P genau dem von P und Q. Dies ist aber auch der Abstand von W und Q, da W auch auf k_3 liegt. Somit hat W zu P und Q den gleichen Abstand und liegt auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{PQ}$. Da in einem gleichseitigen Dreieck aufgrund der Symmetrie die Mittelsenkrechte der Winkelhalbierenden entspricht, ist die Gerade durch S und W die Winkelhalbierende.

2. Fall ($g_1 \parallel g_2$):
Sind die Faltlinien parallel, so kann eine zu den zwei parallelen Geraden wiederum parallele Gerade konstruiert werden, die zu den gegebenen Geraden g_1 und g_2 den gleichen Abstand hat. Die Konstruktion wird wie folgt durchgeführt:

1. Markieren eines Punktes P der Geraden g_1;
2. Konstruieren der Senkrechten h zu g_2 durch P nach Beispiel 6 (Konstruktion von $\sqrt{a}$) [2];
3. Der Schnittpunkt von h und g_2 wird mit P' bezeichnet;
4. Konstruktion der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{PP'}$:
   4.1 Zeichnen der Strecke $\overline{PP'}$
   4.2 Zeichnen eines Kreises k_4 um P durch P';

[2] mit den Punkten Q, S_1, S_2, S_3 und den Kreisen k_1, k_2, k_3

4.3 Zeichnen eines Kreises k_5 um P' durch P;

4.4 Benennen der Schnittpunkte der Kreise k_4 und k_5 mit S_4 und S_5.

4.5 Zeichnen der Geraden $m_{PP'}$ durch S_4 und S_5; Dies ist die Mittelsenkrechte von P und P' und entspricht der gesuchten parallelen Geraden.

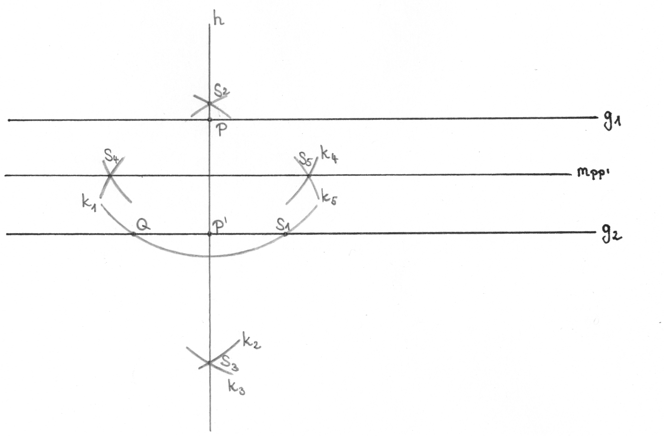


Abbildung 4: Konstruktion der Papierfaltgrundkonstruktion 4 ($g_1 \parallel g_2$)

Durchführbarkeit:
Die Durchführbarkeit der kompletten Konstruktion folgt aus den Grundkonstruktionen, Beispiel 6 (Konstruktion von $\sqrt{a}$) und dem ersten Fall dieser Lösungen.

Korrektheit:
P und P' liegen auf der zu g_2 senkrechten Geraden h. Da g_1 parallel zu g_2 ist, ist h ebenfalls senkrecht zu g_1. Da die Mittelsenkrechte $m_{PP'}$ wieder orthogonal zu der Strecke $\overline{PP'}$ und somit auch zu h liegt, muss $m_{PP'}$ parallel zu g_1 und g_2 sein. Da P auf g_1 liegt, P' auf g_2 liegt und zusätzlich P und P' auf der Senkrechten h zu g_1 und g_2 liegen, hat die Mittelsenkrechte von P und P' zu den beiden Geraden g_1 und g_2 den gleichen Abstand. $m_{PP'}$ ist somit die gesuchte Gerade.

Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen und Origami im Vergleich

Origami beschreibt das Falten von Papier, ohne das Papier zu reißen oder zu schneiden. In der Geschichte wurde Origami vor allem genutzt, um Kunstwerke zu erstellen. Allerdings kann das Falten von Papier auch genutzt werden, um mathematische Konstruktionsprobleme zu lösen. Es gibt sogenannte Grundkonstruktionsschritte, die beschreiben, welche Faltungen in einem Schritt möglich sind. Zwei dieser Schritte lauten:

1. Zu gegebenen Faltlinien lassen sich alle Schnittpunkte bestimmen.

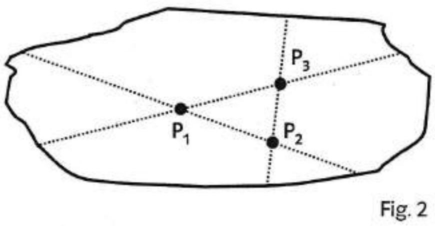


Abbildung 1: Grundkonstruktion 2 [1]

2. Zwei Punkte lassen sich durch eine Faltung aufeinander falten.

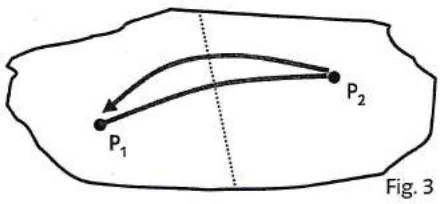


Abbildung 2: Grundkonstruktion 3[1]

Hätte Hippias von Elis diese Konstruktionsschritte auch mit Zirkel und Lineal durchführen können? Lest euch noch einmal genau die Grundkonstruktionen für die Werkzeuge Zirkel und Lineal durch und versucht, die aufgeführten Schritte des Origami mit Zirkel und Lineal durchzuführen. Haltet eure Ergebnisse auf einem Plakat fest.

[1]Schmitt-Hartmann, R. ; Herget, W.: *Moderner Unterricht: Papierfalten im Mathematikunterricht 5-12*. Stuttgart : Klett, 2013

Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen und Origami im Vergleich

Lösungen

Die Lösungen sind als Hintergrundwissen für die Lehrperson gedacht und sollen nicht die Erwartungen an die Plakate widerspiegeln. Die Schülerinnen und Schüler sollen hauptsächlich erkennen, dass die angegebenen Grundkonstruktionen durch die Grundkonstruktion (K2) bzw. die Mittelsenkrechte repräsentiert werden. Die Angabe der zugehörigen Konstruktionsschritte würde dem Umfang der Gruppenarbeit genügen. Allerdings wird an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Erwartungen an die Ausführlichkeit der Bearbeitungen von der Lerngruppe anhängig sein sollten.

1. **Zu gegebenen Faltlinien lassen sich alle Schnittpunkte bestimmen.**

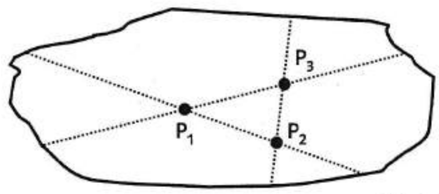


Abbildung 1: Grundkonstruktion 2 [1]

Diese Konstruktion entspricht genau der zweiten der Grundkonstruktionen von Zirkel und Lineal, die das konstruieren des Schnittpunktes zweier Geraden beschreibt.

2. **Zwei Punkte lassen sich durch eine Faltung aufeinander falten.**

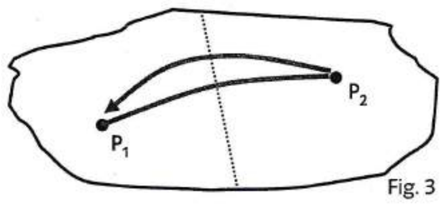


Abbildung 2: Grundkonstruktion 3[1]

Diese Papierfaltkonstruktion lässt sich mit Zirkel und Lineal durch das Konstruieren einer Mittelsenkrechten nachstellen. Dies ist bereits in den Lösungen von Gruppe 1 im zweiten Fall der Grundkonstruktion 4 beschrieben.

[1]Schmitt-Hartmann, R. ; Herget, W.: *Moderner Unterricht: Papierfalten im Mathematikunterricht 5-12*. Stuttgart : Klett, 2013

Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen und Origami im Vergleich

Origami beschreibt das Falten von Papier, ohne das Papier zu reißen oder zu schneiden. In der Geschichte wurde Origami vor allem genutzt, um Kunstwerke zu erstellen. Allerdings kann das Falten von Papier auch genutzt werden, um mathematische Konstruktionsprobleme zu lösen. Es gibt sogenannte Grundkonstruktionsschritte, die beschreiben, welche Faltungen in einem Schritt möglich sind. Einer dieser Schritte lautet:

> Ein gegebener Punkt P_1 lässt sich so auf eine gegebene Faltlinie g falten, dass die dabei entstehende Faltlinie durch einen zweiten gegebenen Punkt P_2 geht.

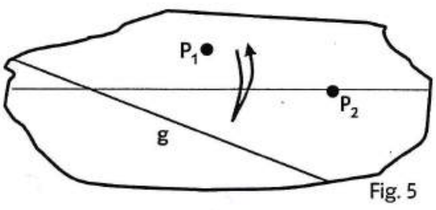


Abbildung 1: Grundkonstruktion 5 [1]

Hätte Hippias von Elis diesen Konstruktionsschritt auch mit Zirkel und Lineal durchführen können? Lest euch noch einmal genau die Grundkonstruktionen für die Werkzeuge Zirkel und Lineal durch und versucht, den aufgeführten Schritt des Origami mit Zirkel und Lineal durchzuführen. Haltet eure Ergebnisse auf einem Plakat fest.

[1] Schmitt-Hartmann, R. ; Herget, W.: *Moderner Unterricht: Papierfalten im Mathematikunterricht 5-12*. Stuttgart : Klett, 2013

Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen und Origami im Vergleich

Lösung

Diese Lösung ist als Hintergrundwissen für die Lehrperson gedacht und soll nicht die Erwartungen an die Plakate widerspiegeln. Die Schülerinnen und Schüler sollen hauptsächlich erkennen, dass die angegebene Grundkonstruktion durch den Schnitt eines Kreises und der Geraden veranschaulicht werden kann. Die Angabe der zugehörigen Konstruktionsschritte würde dem Umfang der Gruppenarbeit genügen. Allerdings wird an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Erwartungen an die Ausführlichkeit der Bearbeitungen von der Lerngruppe anhängig sein sollten.

Ein gegebener Punkt P_1 lässt sich so auf eine gegebene Faltlinie g falten, dass die dabei entstehende Faltlinie durch einen zweiten gegebenen Punkt P_2 geht.

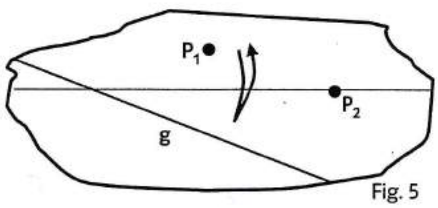


Abbildung 1: Grundkonstruktion 5 [1]

Diese Grundkonstruktion lässt sich durch den Schnitt eines Kreises und einer Geraden veranschaulichen. Dazu seien die Punkte P_1, P_2 und die Gerade g gegeben. Ziel ist es, die Faltlinie darzustellen, die durch P_2 geht und P_1 auf g faltet. Es werden folgende Konstruktionsschritte durchgeführt:

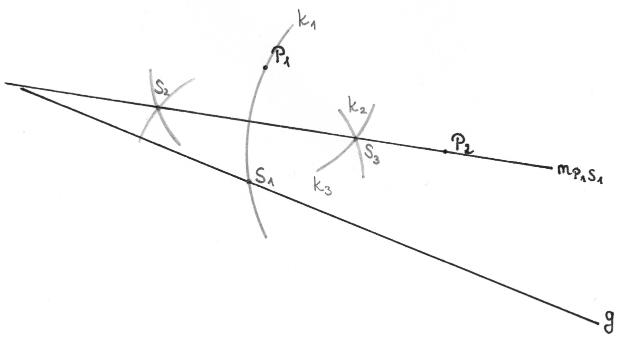


Abbildung 2: Konstruktion der Papierfaltgrundkonstruktion 5

1. Zeichnen eines Kreises k_1 um P_2 durch P_1;
2. Kennzeichnen eines Schnittpunktes von k_1 und g mit S_1;
3. Zeichnen der Strecke $\overline{P_1 S_1}$;

[1] Schmitt-Hartmann, R. ; Herget, W.: *Moderner Unterricht: Papierfalten im Mathematikunterricht 5-12*. Stuttgart : Klett, 2013

4. Konstruieren der Mittelsenkrechten $m_{P_1S_1}$ der Strecke $\overline{P_1S_1}$ wie in den Lösungen vom Arbeitsblatt der ersten Gruppe [2]; Die Mittelsenkrechte $m_{P_1S_1}$ erfüllt die Eigenschaften der gesuchten Gerade.

Durchführbarkeit:
Die Durchführbarkeit der ersten beiden Schritte ist durch die Grundkonstruktionen (K3) und (K4) gegeben. Die Durchführbarkeit der letzten Konstruktionsschritte wurde bereits in den Lösungen zum Arbeitsblatt der ersten Gruppe begründet.

Korrektheit:
Dadurch, dass der Punkt S_1 auf dem Kreis k_1 liegt, wird ein gleichseitiges Dreieck $P_1P_2S_1$ konstruiert. Da das Dreieck $P_1P_2S_1$ gleichseitig ist, liegt P_2 auf der Mittelsenkrechten $m_{P_1S_1}$ von P_1 und S_1. P_1 ist auf der Geraden g und die Mittelsenkrechte $m_{P_1S_1}$ stellt somit die Faltlinie dar, die P_1 auf g faltet und durch P_2 geht.

[2] mit den Punkten S_2, S_3 und den Kreisen k_2, k_3

Aus: Herget, Schmitt-Hartmann (2013), Papierfalten im Mathematikunterricht 5-12, Klett

1. Durch zwei gegebene Punkte lässt sich eine Faltlinie falten (Fig. 1).

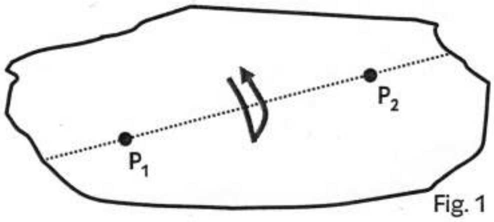


Fig. 1

2. Zu gegebenen Faltlinien lassen sich alle Schnittpunkte bestimmen (Fig. 2).

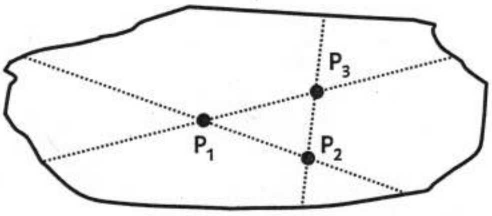


Fig. 2

3. Zwei Punkte lassen sich durch eine Faltung aufeinander falten (Fig. 3).

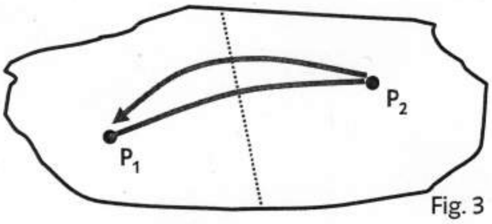


Fig. 3

4. Zwei Faltlinien lassen sich durch eine Faltung aufeinander falten (Fig. 4).

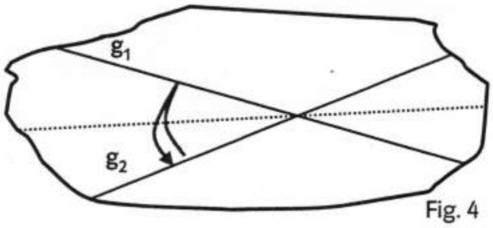


Fig. 4

5. Ein gegebener Punkt P_1 lässt sich so auf eine gegebene Faltlinie g falten, dass die dabei entstehende Faltlinie durch einen zweiten gegebenen Punkt P_2 geht (Fig. 5).

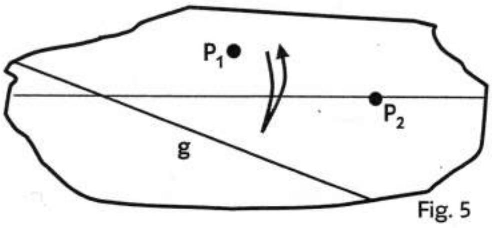


Fig. 5

6. Ein gegebener Punkt P_1 lässt sich so auf eine gegebene Faltlinie g_1 falten, dass dabei zugleich ein zweiter gegebener Punkt P_2 auf eine zweite gegebene Faltlinie g_2 gefaltet wird (Fig. 6).

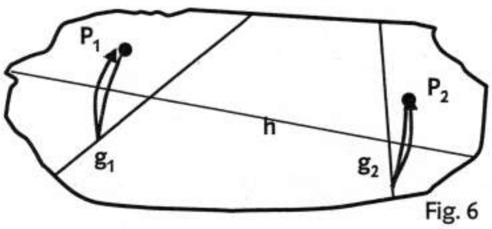
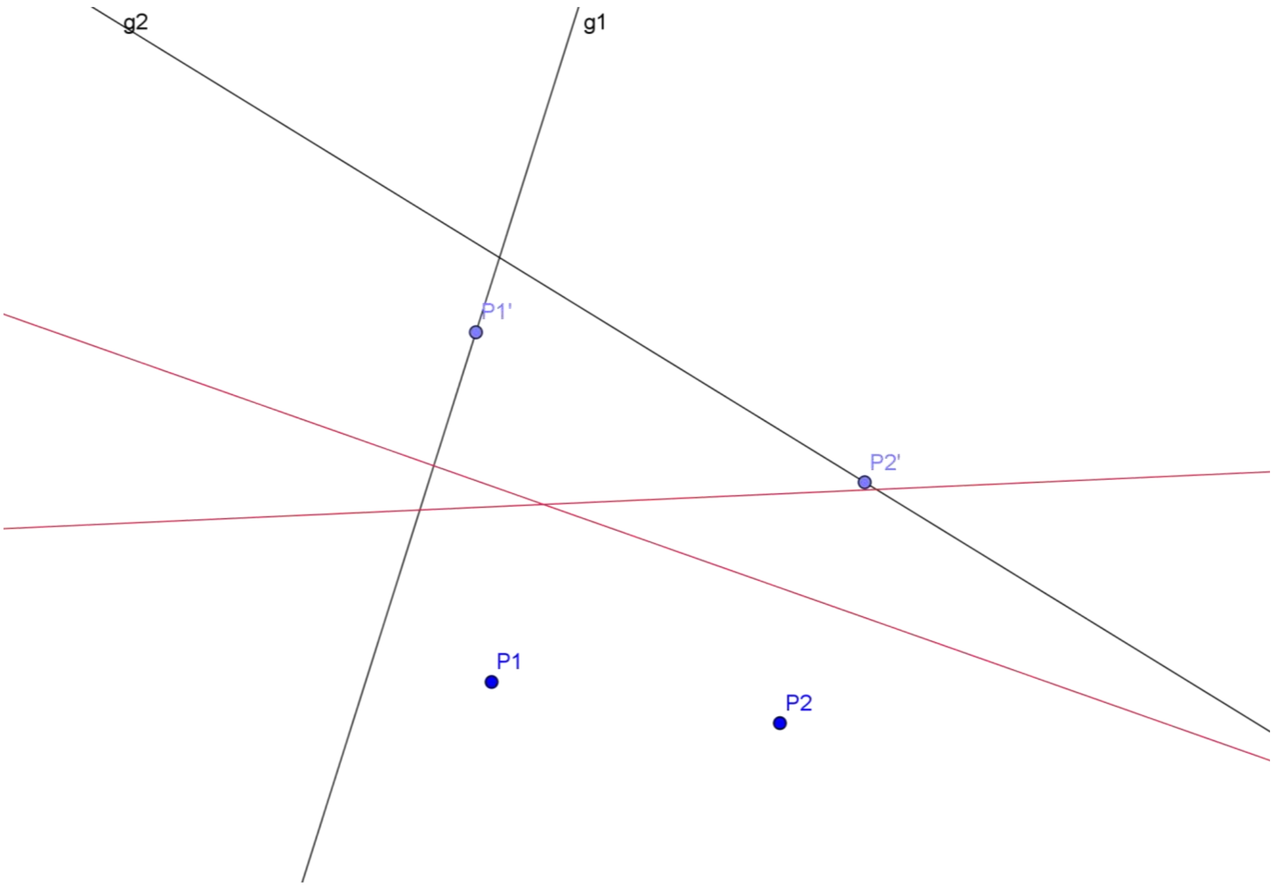


Fig. 6

Screenshot der Geogebra-Datei zur sechsten Papierfaltgrundkonstruktion

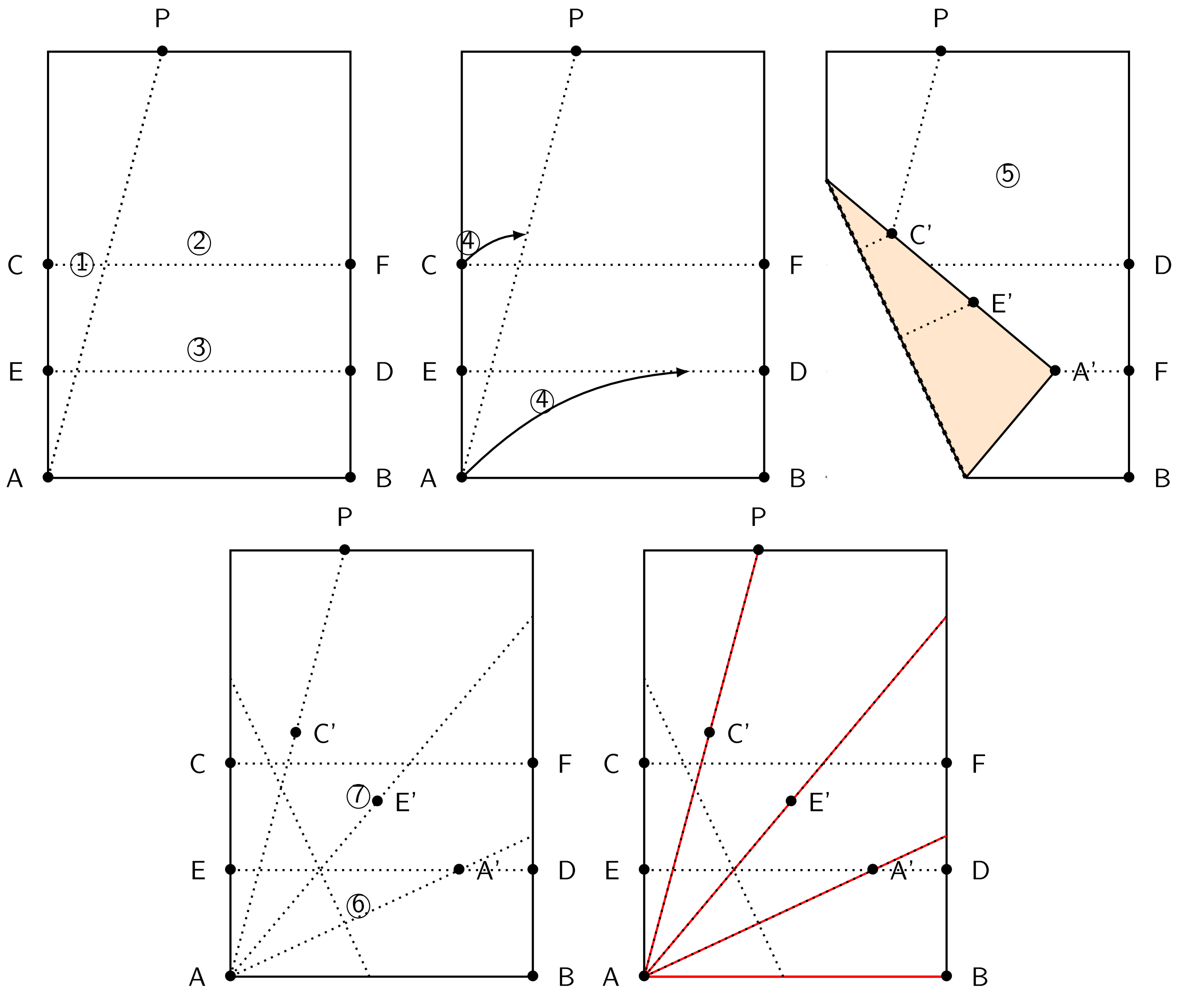


Name: ________________________

Dreiteilung eines Winkels mit Origami (Vorgehen)

Geometrische Konstruktionen und asiatisches Papierfalten

Herbst-Uni 2016
Max Hoffmann
10. Oktober 2016



① Nimm ein DIN-A4-Blatt im Hochformat und falte einen beliebigen Winkel $\angle BAP$.

② Falte eine Parallele zu AB, die das Blatt halbiert.

③ Falte eine Parallele zur Seite AB, die AC halbiert.

④ Falte das Blatt so, dass A auf ED und C auf AP landet.

⑤ Markiere die Punkte A′, E′, C′. Dies sind die Punkte, auf denen A,E und C nach der Faltung zu liegen kommen.

⑥ Falte das Blatt wieder auseinander und falte die Gerade durch A und A′.

⑦ Falte die Gerade durch A und E′.

Max Hoffmann
maxh@math.uni-paderborn.de

Name: ______________________

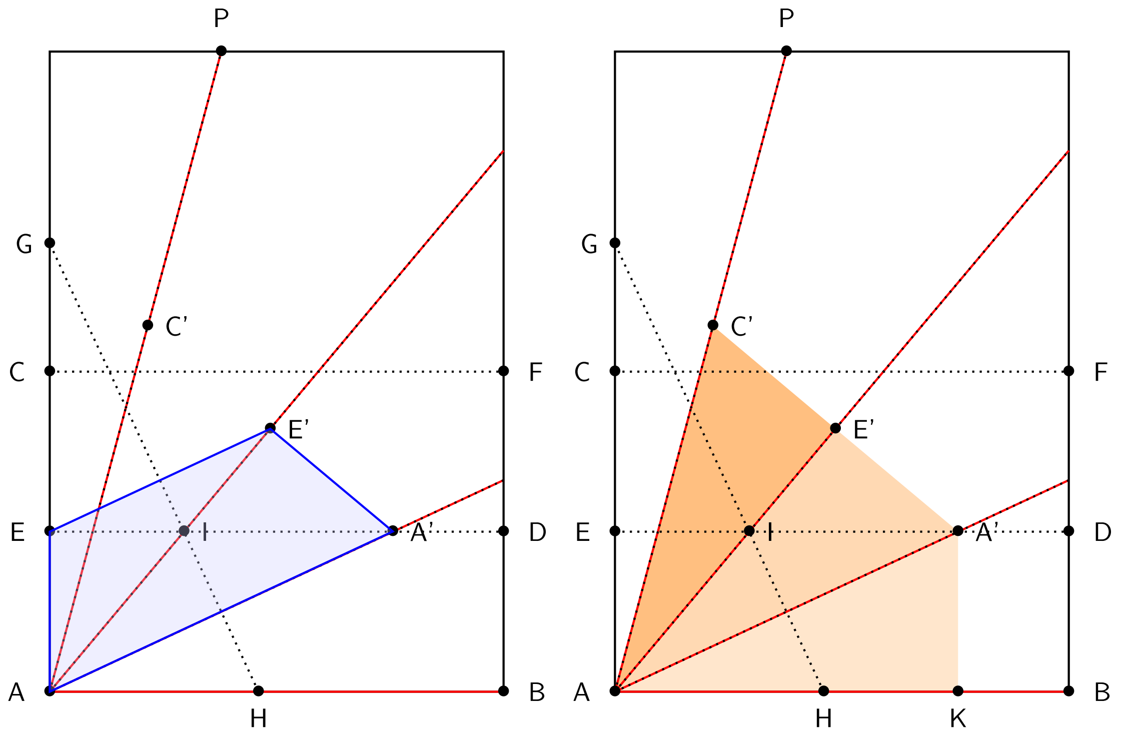
Dreiteilung eines Winkels mit Origami (Begründung)

Geometrische Konstruktionen und asiatisches Papierfalten

Herbst-Uni 2016

Max Hoffmann

10. Oktober 2016



Aufgabe 1 (Korrektheit der Winkel-Dreiteilung mit Origami)

Schaffst Du es, zu beweisen, dass der Winkel durch die Faltung tatsächlich gedrittelt wurde? Gehe dazu in mehreren Schritten vor[1]:

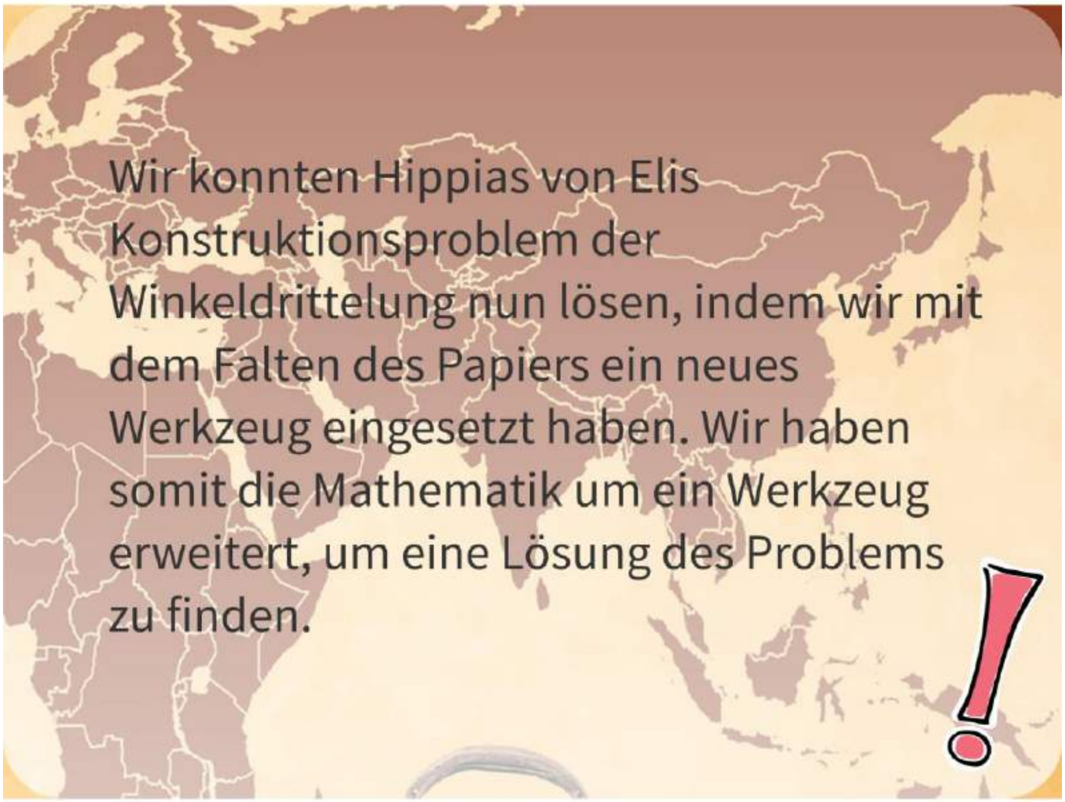
1. Begründe, dass das Viereck $AEE'A'$ ein symmetrisches Trapez ist.
2. Begründe, dass sich AE' und $A'E$ in einem Punkt I auf der Faltlinie GH schneiden.
3. Zeichne die Hilfslinie GA' ein und argumentiere, warum diese orthogonal zu AE' ist.
4. Zeichne eine Senkrechte zu AB durch A' als Hilfslinie ein.
5. Beweise, dass der Winkel tatsächlich korrekt gedrittelt wird, indem Du nachweist, dass die drei in der rechten Zeichnung eingefärbten Dreiecke kongruent sind.

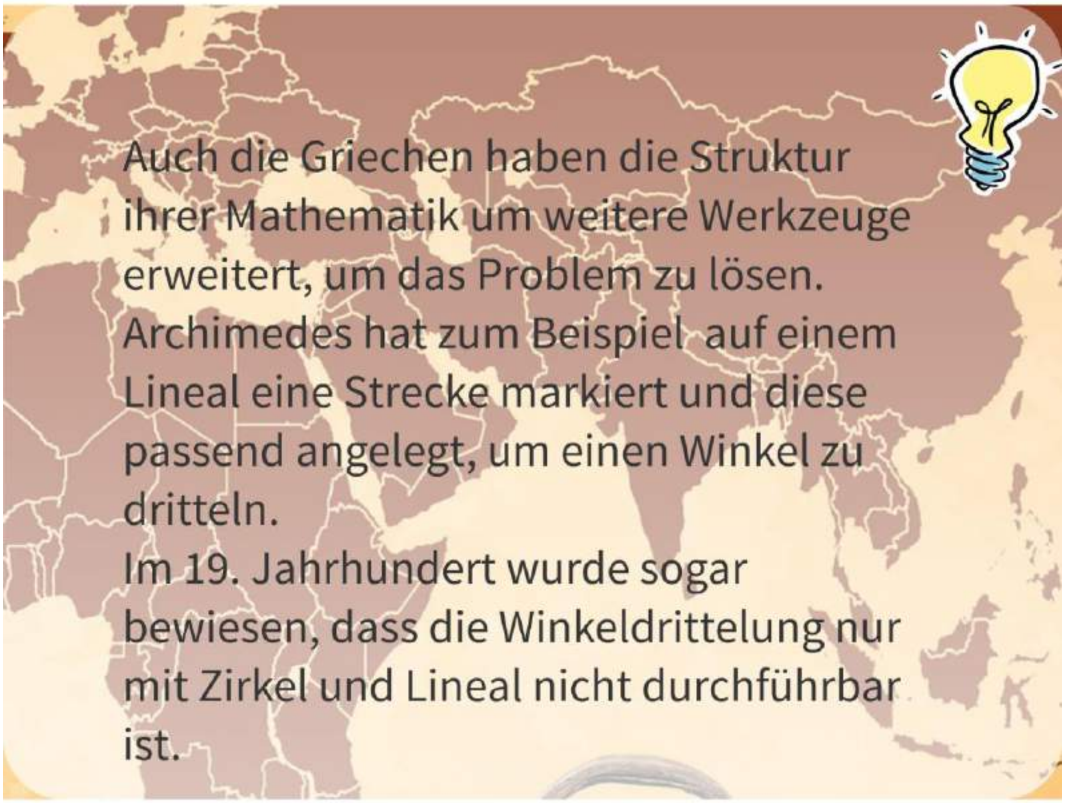
   Hinweis: Du benötigst die Kongruenzsätze SWS und SsW. Falls Du diese nicht kennst, frag gerne nach.

[1] Die Beweisidee stammt aus *Papierfalten im Mathematikunterricht 5-12, Schmitt-Hartmann und Herget, Klett 2013* und beruht auf einem Beweis des Japaners Hisashi Abe.

Max Hoffmann
maxh@math.uni-paderborn.de

Prezi zur Geschichte der Geometrie – Teil 2





Anhang C

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich, Jana Postma, Matrikelnummer 7005411, versichere, dass ich die Bachelorarbeit zum Thema

Klassische Konstruktionsprobleme als Beispiel für die Integration historischer Aspekte in den Mathematikunterricht

selbständig verfasst und keine anderen, als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Die Stellen der Arbeit, die ich anderen Werken dem Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen habe, wurden in jedem Fall unter Angabe der Quellen der Entlehnung kenntlich gemacht. Das Gleiche gilt auch für Tabellen, Skizzen, Zeichnungen, bildliche Darstellungen usw. Die Bachelorarbeit habe ich nicht, auch nicht auszugsweise, für eine andere abgeschlossene Prüfung angefertigt. Auf § 63 Abs. 5 HZG wird hingewiesen.

Paderborn, den 9. März 2017

(Jana Postma)