Universität Paderborn
Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und Mathematik
Institut für Mathematik
Warburger Straße 100
33098 Paderborn

Konzeption von fachmathematischen Schnittstellenmodulen für Lehramtsstudierende am Beispiel ausgewählter Themen der höheren Analysis

Masterarbeit

– Überarbeitete Version –

im Rahmen des Studiengangs

Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen

Master für die Fächer Mathematik und Informatik

zur Erlangung des Grades

Master of Education

von
Max Hoffmann
max.hoffmann@math.upb.de

vorgelegt bei
Prof. Dr. Joachim Hilgert
und
Prof. Dr. Rolf Biehler

Stand: 11. Dezember 2017

Vorbemerkung zur ersten überarbeiteten Version

Dies ist die erste überarbeitete Version der originalen Masterarbeit, die am 1. September 2016 eingereicht wurde. Im Vergleich zur eingereichten Version wurden folgende zwei Arten von Änderungen vorgenommen:

1) Korrektur von Rechtschreib- und Grammatikfehlern sowie leichte Formulierungsänderungen zur sprachlichen Präzisierung.

2) Änderung der Begrifflichkeit *mathematikbezogenes Schnittstellenwissen (MIK)* zu *mathematikbezogener Schnittstellenkompetenz (MSK)* und daraus resultierende inhaltliche Anpassungen. Diese Änderung ist eine sprachliche Ausschärfung des indentierten Konzepts, die sich im Rahmen von Diskussionen mit Kolleginnen und Kollegen im Anschluss an die Abgabe der Masterarbeit als sinnvoll herausgestellt hat.

Max Hoffmann
Paderborn, den 11. Dezember 2017

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die vorliegende Arbeit trägt den Titel *Konzeption von fachmathematischen Schnittstellenmodulen für Lehramtsstudierende am Beispiel ausgewählter Themen der höheren Analysis*. Es handelt sich um die Weiterführung der Thematik aus der Bachelorarbeit des Autors (Hoffmann, 2014). Dabei geht es um Innovationen in der universitären Ausbildung von Gymnasial- und Gesamtschullehrkräften für Mathematik, die zum Ziel haben, der doppelten Diskontinuität (vgl. Klein (1908)) entgegenzuwirken.

Der Grundgedanke beruht auf dem von Thomas Bauer entwickelten Konzept von *Schnittstellenaktivitäten*, die Schulmathematik, Fachmathematik und Mathematikdidaktik miteinander verbinden. Ein wesentlicher Aspekt solcher Aktivitäten ist der Einsatz von speziellen *Schnittstellenaufgaben*. Solche Aufgaben wurden an der Universität Paderborn im Rahmen der Veranstaltung „Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten" eingesetzt und in Hoffmann (2014) analysiert.

Ein logischer nächster Schritt ist die Ausrichtung aller Elemente einer Lehrveranstaltung auf den Schnittstellengedanken. Im Rahmen dieser Masterarbeit soll ein theoretisch fundierter Vorschlag für die Konzeption solcher *Schnittstellenmodule* entwickelt und beispielhaft für einen Themenbereich der höheren Analysis umgesetzt werden. Dieses Inhaltsfeld wurde bewusst gewählt, um aufzuzeigen, dass Schnittstellenmodule nicht zwingend Anwendung in Anfängerveranstaltungen finden, sondern – insbesondere im Sinne der zweiten Diskontinuität von Klein – auch in höheren Semestern sinnvoll sind. Zu einem solchen Zeitpunkt sind sie für die Lehramtsstudierenden zeitlich näher am tatsächlichen Berufsalltag.

Um diese Zielvorstellungen umzusetzen, ist es zunächst erforderlich ein umfangreiches konzeptionelles Fundament zu entwickeln (Kapitel 2). Es werden neben dem Schnittstellengedanken auch Konzeptionen zur Kompetenzorientierung und zur Beschreibung von professionellem Lehrerwissen sowie äußere Rahmenbedingungen besprochen. Auf dieser Basis wird in Kapitel 3 das Konzept von Schnittstellenmodulen entwickelt und in Kapitel 4 beispielhaft umgesetzt. Abschließend werden diese Prozesse in Kapitel 5 reflektiert und es wird aufgezeigt wie weitere Fragestellungen aussehen können.

An dieser Stelle möchte ich ganz besonders Joachim Hilgert und Rolf Biehler für die fachliche und persönliche Begleitung dieser Arbeit danken. Außerdem gilt mein Dank Lea Budde, Tobias Weich und besonders Sarah Ivenz für die gewinnbringenden Diskussionen und Anregungen. Darüber hinaus danke ich meiner Familie für ihre vielfältige und unermüdliche Unterstützung während meines gesamten Studiums.

Kapitel 2

Konzeptionelle Grundlagen

In diesem Kapitel soll das theoretische Fundament für die weitere Arbeit gelegt werden. Beschäftigt man sich mit der Konzeption universitärer Lehrveranstaltungen, so sind neben der eigentlichen inhaltlichen Ausgestaltung eine Vielzahl von Aspekten zu beachten. Für die folgenden Kapitel wird sich eine detaillierte Betrachtung von vier Themengebieten als sinnvoll erweisen[1]:

In Abschnitt 2.1 werden *gesetzliche Rahmenbedingungen der Lehramtsausbildung*, und dabei insbesondere das *Lehrerausbildungsgesetz NRW*, vorgestellt. Als ein wesentliches Element bei der Weiterentwicklung von Lehre in Schule und Hochschule wird in 2.2 der Begriff *Kompetenzorientierung* in verschiedenen Facetten und insbesondere im Kontext der Hochschullehre beleuchtet.

Im Anschluss an diese eher allgemeinen Themen werden in den weiteren Abschnitten theoretische Konzepte behandelt, die sich tiefgehender mit der universitären Ausbildung von (Mathematik-) Lehrkräften beschäftigen. Dazu werden in Abschnitt 2.3 Ansätze zur Beschreibung von *Lehrerwissen* im Allgemeinen und *Wissen von Mathematiklehrern* im Speziellen vorgestellt. Damit verknüpft sind der Begriff der *doppelten Diskontinuität* in Verbindung mit *Schnittstellenaktivitäten* (Abschnitt 2.4).

Unter Berücksichtigung der Ausrichtung und des Umfangs dieser Arbeit wird in allen Ausführungen der Schwerpunkt auf die fachmathematische Ausbildung von Mathematik-Lehramtsstudierenden für Gymnasien und Gesamtschulen in NRW gelegt[2]. Spielen Hochschulspezifika eine Rolle, so wird die Universität Paderborn betrachtet.

2.1 Rahmenbedingungen universitärer Lehramtsausbildung

In diesem Abschnitt werden Rahmenbedingungen vorgestellt, die wichtig für die Konzeption von Veranstaltungen im Lehramtsstudium sind. Dazu werden vor allem das Lehrerausbildungsgesetz (NRW, 2016a), sowie die einschlägigen Prüfungsordnungen für das Mathematiklehramt (UPB, 2011a, 2014, 2016a, 2016b) betrachtet.

[1] *Anm. des Autors:* In diesem Kapitel wird eine Vielzahl von Konzeptionen präsentiert und zusammenfassend dargestellt. In den darauf folgenden Kapiteln erfolgt dann jeweils ein Verweis auf die entsprechenden Stellen in diesem Kapitel. Zur besseren Orientierung ist zu Beginn jedes Abschnittes ein Überlick über die Literatur vorangestellt, die in selbigem präsentiert wird.

[2] Im Folgenden wird im Wesentlichen von Gymnasiallehrkräften bzw. der Gymnasiallehrerausbildung gesprochen. Dies geschieht aus Gründen der Lesbarkeit, die entsprechenden Gesamtschullehrkräfte sind immer mit eingeschlossen.

2.1.1 Allgemeine gesetzliche Rahmenbedingungen

Möchte man Innovationen in der Lehramtsausbildung planen, so ist es notwendig, zunächst die entsprechenden Rahmenbedingungen zu betrachten. Für die universitäre Lehramtsausbildung ergeben sich diese zunächst einmal aus den entsprechenden Gesetzen zur Lehrerausbildung. In dieser Arbeit wird dazu das Lehrerausbildungsgesetz für NRW (LABG, NRW, 2016a) verwendet. Dort findet man, dass das Studium im Allgemeinen der Verantwortung der Hochschulen obliegt (NRW, 2016a, §1 (2) S. 1) [3]. Zusätzlich werden drei Regelungsmechanismen des Landes für die universitäre Lehramtsausbildung genannt (NRW, 2016a, §1 (2) S. 2):

1. Zugangsbedingungen für den Vorbereitungsdienst
2. Vorgaben für die Akkreditierung von Studiengängen
3. Hochschulverträge

Punkt 2 ist für diese Arbeit nicht weiter relevant; im *Hochschulvertrag (2015-2016)* zwischen der Universität Paderborn und dem Land NRW (MIWF NRW & UPB, 2015a) findet man ebenfalls keine thematisch relevanten Informationen. In den *Sondervereinbarungen zur Lehramtsausbildung* (MIWF NRW & UPB, 2015b) lassen sich im Wesentlichen strategische und organisatorische Aspekte identifizieren. Für die Gestaltung von universitärer Mathematik-Lehramtsausbildung wichtiger ist die sogenannte *Lehramtszugangsverordnung (LZV)*, die den Zugang zum Vorbereitungsdienst in NRW regelt. In NRW (2016b, §4 (1)) wird festgelegt, dass für ein Lehramtsstudium (Gymnasien und Gesamtschulen), bei dem ein Fach Mathematik ist, 100 von 300 Leistungspunkten für „Fachwissenschaft Mathematik“ und „Fachdidaktik Mathematik“ verwendet werden. Hinzu kommt ggf. noch die Bachelor- und/oder Masterarbeit.

Relevant für die Gestaltung von Studieninhalten ist die Zielsetzung der Lehramtsausbildung. Das LABG liefert zu diesem Thema:

> „Ziel der Ausbildung ist die Befähigung, ein Lehramt an öffentlichen Schulen *selbstständig* auszuüben.“ (NRW, 2016a, §2 (1) S. 1, Hervorhebung M.H.)

Außerdem werden verschiedene Bereiche definiert, in denen es (berufliche) Kompetenzen[4] im Rahmen der Lehramtsausbildung zu entwickeln gilt. Unter anderem werden die folgenden Aspekte genannt (NRW, 2016a, §2 (2)):

- Unterricht und Erziehung
- Beurteilung
- Diagnostik
- Wissenschaftliche Anforderungen des Faches
- Erkennen, Förderung und Entwicklung der individuellen Potenziale und Fähigkeiten aller SuS [5]

[3] Bei der Zitation von Normen meint „§a b S. c“ im Folgenden immer „Paragraph a, Absatz b, Satz c“.
[4] Auf diesen Begriff wird im nächsten Abschnitt noch genauer eingegangen.
[5] Schülerinnen und Schüler

2.1.2 Rahmenbedingungen an der Universität Paderborn

Diese grundsätzlichen Vorgaben werden in den Prüfungsordnungen an den einzelnen Hochschulen (im Sinne der oben erwähnten Verantwortung) unter Beachtung der formalen Vorgaben spezifiziert. Im Folgenden werden sowohl die allgemeinen als auch die besonderen Bestimmungen für das Fach Mathematik der Lehramtsprüfungsordnungen für Bachelor und Master (GyGe) an der Universität Paderborn betrachtet.

Dazu werden die für diese Arbeit relevanten Auszüge über die zu erwerbenden Kompetenzen vollständig zitiert. Dies ist notwendig, da jedwede Art von Innovation damit abgeglichen werden muss. Somit stellen die Kompetenzdefinition einen unverzichtbaren Teil des Fundamentes dieser Arbeit dar. Im Bereich der fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Ausbildung findet man in den allgemeinen Bestimmungen zu Bachelor und Master unter anderem die folgenden zu erwerbenden Kompetenzen:

„[. . .]

(2) In den fachwissenschaftlichen Studien erwerben die Studierenden ein grundlegendes, an entsprechende Masterstudiengänge anschlussfähiges Fachwissen. Die Absolventinnen und Absolventen

- haben ein solides und strukturiertes Fachwissen (*Verfügungswissen*) zu den grundlegenden Gebieten ihrer Fächer erworben; sie können darauf zurückgreifen und dieses Fachwissen ausbauen;
- haben Einblick gewonnen in die grundlegenden Erkenntnis- und Arbeitsmethoden ihrer Fächer und können sie in zentralen Bereichen anwenden.
- sind in der Lage, diese Methoden in zentralen Bereichen ihrer Fächer anzuwenden.

[. . .]

(4) In den fachdidaktischen Studien werden die fachwissenschaftlichen und bildungswissenschaftlichen Studien auf vermittlungswissenschaftliche und pädagogische Berufsfelder bezogen. In ihnen erwerben die Studierenden Kenntnisse über Vermittlungsprozesse fachlichen Wissens. Die Absolventinnen und Absolventen

- kennen grundlegende fachdidaktische Positionen und Strukturierungsansätze;
- können Ergebnisse fachdidaktischer, lernpsychologischer und sozialwissenschaftlicher Forschung zur Gestaltung von Lehr- und Lernumgebungen anwenden.

“ (UPB, 2011a, S. 7 f.)

„

(1) In den fachwissenschaftlichen Studien erwerben die Studierenden anschlussfähiges Fachwissen für zukünftige Lehrkräfte. Die Absolventinnen und Absolventen

- haben ein solides und strukturiertes Fachwissen (*Verfügungswissen*) zu den grundlegenden Gebieten ihrer Fächer erworben; sie können darauf zurückgreifen und dieses Fachwissen ausbauen;
- verfügen aufgrund ihres Überblickswissens (*Orientierungswissen*) über den Zugang zu aktuellen grundlegenden Fragestellungen ihrer Fächer;
- können reflektiertes Wissen über die Fächer (*Metawissen*) einsetzen und auf wichtige ideengeschichtliche und wissenschaftstheoretische Konzepte zurückgreifen;

- können sich aufgrund ihres Einblicks in andere Disziplinen weiteres Fachwissen erschließen und damit fächerübergreifende Qualifikationen entwickeln;
- sind mit den Erkenntnis- und Arbeitsmethoden ihrer Fächer vertraut;
- sind in der Lage, diese Methoden in zentralen Bereichen ihrer Fächer anzuwenden.

[. . .]

(3) Den fachdidaktischen Studien kommt eine Integrationsfunktion bezogen auf die fachwissenschaftlichen und bildungswissenschaftlichen Studien zu. In ihnen erwerben die Studierenden anschlussfähiges fachdidaktisches Wissen für zukünftige Lehrkräfte. Absolventinnen und Aabsolventen

- haben ein solides und strukturiertes Wissen über fachdidaktische Positionen und Strukturierungsansätze und können fachwissenschaftliche Inhalte auf ihre Bildungswirksamkeit hin und unter didaktischen Aspekten analysieren;
- kennen und nutzen Ergebnisse fachdidaktischer, lernpsychologischer und sozialwissenschaftlicher Forschung über das Lernen in ihren Fächern;
- kennen die Grundlagen fach- und anforderungsgerechter Leistungsbeurteilung;
- haben fundierte Kenntnisse über Merkmale von Schülerinnen und Schülern, die den Lernerfolg fördern oder hemmen können (*Diagnose*) und wissen, wie daraus unterrichtliche Lernumgebungen differenziert zu gestalten sind (*Förderung*).

“ (UPB, 2014, S. 7 ff.)

Bei den besonderen Bestimmungen für den Bereich des gymnasialen Mathematiklehramts werden die Bachelor- und Masterprüfungsordnungen verwendet, die im Oktober 2016 in Kraft treten, da diese die aktuelle Grundlage für jedwede praktische Umsetzung der Innovationen darstellen:

„

(1) In den fachwissenschaftlichen Studien des Unterrichtsfaches Mathematik sollen die Studierenden folgende Kompetenzen erwerben: Sie

- verfügen über einen Zugang zu grundlegenden Fragestellungen der Mathematik und entwickeln zur Beschreibung mathematischer Sachverhalte eine angemessene Ausdrucksfähigkeit (mündlich und schriftlich),
- besitzen ein solides und strukturiertes Fachwissen in den Bereichen Lineare Algebra, Geometrie, Analysis, Stochastik sowie einem weiteren Teilgebiet der Angewandten Mathematik,
- können beim Vermuten und Beweisen mathematischer Aussagen fremde Argumente überprüfen und eigene Argumentationsketten aufbauen,
- sind mit Erkenntnis- und Arbeitsmethoden der Mathematik vertraut und in der Lage, diese Methoden in zentralen Bereichen inner- und außerhalb der Mathematik anzuwenden,
- verwenden bei Problemlösungen geeignete Medien.

(2) In den fachdidaktischen Studien des Unterrichtsfaches Mathematik sollen die Studierenden folgende Kompetenzen erwerben: Sie

- analysieren ausgewählte fachwissenschaftliche Inhalte auf ihre Bildungswirksamkeit hin und unter didaktischen Aspekten (z.B. verschiedene Zugangsweisen, Grundvorstellungen, fundamentale Ideen),
- können Ziele mathematischer Lernprozesse formulieren und begründen sowie ihr Erreichen bei der Arbeit mit heterogenen Lerngruppen fördern und bewerten,

- kennen und nutzen Konzeptionen und Prinzipien von Mathematiklernen sowie Planungs- und Gestaltungsmittel (u.a. Entdeckendes Lernen und Problemlösen; produktives und problemorientiertes Üben; Mathematik für die Umwelterschließung; Zusammenhang von Sach- und Aufgabenanalyse).

" (UPB, 2016a, S. 3)

„

(1) In den fachwissenschaftlichen Studien des Unterrichtsfaches Mathematik sollen die Studierenden folgende Kompetenzen erwerben: Sie

- verfügen über anschlussfähiges mathematisches und mathematikdidaktisches Wissen, das es ihnen ermöglicht, gezielte Vermittlungs-, Lern- und Bildungsprozesse im Unterrichtsfach Mathematik zu gestalten und neue fachliche und fächerverbindende Entwicklungen selbstständig in den Unterricht und in die Schulentwicklung einzubringen
- besitzen ein anschlussfähiges Fachwissen (Verfügungswissen) zu grundlegenden Gebieten der Mathematik und sind mit fundamentalen Erkenntnis- und Arbeitsmethoden der Mathematik vertraut,
- verfügen aufgrund ihres Überblickwissens (Orientierungswissen) über den Zugang zu grundlegenden Fragestellungen der Mathematik,
- setzen reflektiertes Wissen über die Mathematik (Metawissen) ein, um neue fachliche und fächerverbindende Entwicklungen selbstständig in den Unterricht und in die Schulentwicklung einzubringen,
- erschließen sich aufgrund ihres Einblicks in Modellieren und Anwendungen weiteres Fachwissen und arbeiten fächerverbindend.

(2) In den fachdidaktischen Studien des Unterrichtsfaches Mathematik sollen die Studierenden folgende Kompetenzen erwerben: Sie

- analysieren fachwissenschaftliche Inhalte auf ihre Bildungswirksamkeit hin und unter didaktischen Aspekten, um gezielte Vermittlungs-, Lern- und Bildungsprozesse im Unterrichtsfach Mathematik zu gestalten,
- kennen und nutzen die Ergebnisse mathematikdidaktischer und lernpsychologischer Forschung über das Mathematiklernen,
- kennen und verwenden die Grundlagen fach- und anforderungsgerechter Leistungsbeurteilung,
- kennen und berücksichtigen Merkmale von Schülerinnen und Schülern, die den Lernerfolg fördern oder hemmen können, und entwerfen differenziert Lernumgebungen.

" (UPB, 2016b, S. 3 f.)

2.2 Kompetenzorientierung in der Hochschullehre

Wie bereits im vorangegangenen Abschnitt erwähnt, hat der Begriff *Kompetenz* im LABG (NRW, 2016a, §2 (2) S. 2) eine besondere Bedeutung. In den Prüfungsordnungen der Universität Paderborn (UPB, 2011a, 2014, 2016a, 2016b) wird ebenfalls von *Kompetenzerwerb* gesprochen und in den Modulbeschreibungen (beispielsweise UPB, 2011b, S. 10) werden *Lernergebnisse*, *Kompetenzen* und *spezifische Schlüsselkompetenzen* ausgewiesen. Bestandteil dieses Abschnitts soll sein das Begriffsfeld um die Worte *Kompetenz(orientierung)* und *Lernergebnisse* genauer zu fassen und mit Inhalt zu füllen.

Dabei wird Hochschullehre allgemein betrachtet und kein spezieller Fokus auf die Lehramtsausbildung gelegt. Die Ausführungen beruhen im Wesentlichen auf dem *Fachgutachten zur Kompetenzorientierung in Studium und Lehre* von Schaper (2012). Dort finden sich auch detaillierte Ausführungen zu den im Folgenden angerissenen Punkten. Weitere wichtige Referenzen sind Weinert (1999), sowie die Taxonomie zur Beschreibung von Lernergebnissen von Anderson et al. (2005).

2.2.1 Kompetenzorientierung und Hochschulbildung

Schaper (2012, S. 10) verweist auf den *Bologna-Prozess* und dessen Zielsetzungen als ein wesentliches bildungspolitisches Ereignis, das zur stärkeren Forcierung von *Learning Outcomes* und *Kompetenzen* beigetragen hat. In der Bologna-Erklärung (HRK, 1999) wird lediglich Beschäftigungsfähigkeit als Ziel von Hochschulbildung impliziert. Die Begriffe *Lernergebnisse* und *Kompetenzen* als Merkmale zur Definition von Abschlüssen werden dann explizit im *Berlin-Kommuniqué* (HRK, 2003, S. 4) genannt.

Die Frage nach Lernergebnissen (in welcher Form auch immer) im Hochschulkontext geht zwingend einher mit der Frage nach den allgemeinen Zielsetzungen eines Hochschulstudiums. Schaper (2012, S. 8) nennt vier allgemeine Ziele von Hochschulbildung:

- wissenschaftliche Befähigung,
- Vorbereitung auf ein berufliches Tätigkeitsfeld,
- Persönlichkeitsbildung, und
- die Befähigung zur Teilhabe am gesellschaftlichen Leben.

Er stellt fest, dass dies in Verbindung mit einer kompetenzorientierten Ausrichtung von Studium und Lehre neben der Entwicklung von Kenntnissen in den vier Zieldimensionen auch die Entwicklung expliziter Handlungsbefähigungen beinhaltet. Damit soll unter anderem der Aufbau *trägen Wissens*, „d. h.. [. . .] Wissen, das zwar angeeignet, aber nicht handlungswirksam gebracht werden kann“ (Schaper, 2012, S. 9) verhindert werden.

Im Folgenden soll nun näher auf unterschiedliche Auffassungen zum Kompetenzbegriff eingegangen werden, die im Hochschulkontext interessant sind.

2.2.2 Kompetenz – Zum Begriffsverständnis

Schaper (2012, S. 12) sieht den Kompetenzbegriff als eine „breite konzeptuelle Kategorie“ mit dem wesentlichen Problem, dass „das Konstrukt durch sein breites Bedeutungsspektrum schwer zu definieren und zu operationalisieren ist und dadurch unspezifisch und inhaltsleer bleibt“. In Bezug auf Operationalisierungen stellen Klieme und Hartig (2007, S. 13) fest:

> „Kompetenz zeigt sich im je situativen Bewältigen von Anforderungen (in der 'Performanz' des Handelns), wird aber als Disposition interpretiert.“

Durch die beiden Zitate wird bereits deutlich, wie notwendig es ist, Kompetenzauffassungen im Detail zu betrachten. In seinem Fachgutachten identifiziert Schaper (2012, S. 14 ff.) drei wesentliche

Ansätze zum Kompetenz-Begriffsverständnis, die für bildungswissenschaftliche Untersuchungen bedeutsam sind. Diese werden im Folgenden kurz vorgestellt. Abschließend wird noch auf ein von Schaper definiertes akademisches bzw. wissenschaftlich orientiertes Kompetenzverständnis eingegangen.

Kompetenzverständnis in der empirischen Bildungsforschung (Schaper, 2012, S. 14 f., 28)

Aufbauend auf den Ausführungen von Weinert (1999, S. 3), in denen es heißt

> „Given the intended use of this report (to provide a conceptual basis for school-based achievement comparisons in international and national systems of reference), it is recommended that competence be considered as a learned, cognitive demand-specific performance disposition [. . .]"

werden Kompetenzen als *kontextspezifische kognitive Leistungsdispositionen* definiert, was explizit nicht-kognitive Facetten des Kompetenzbegriffs ausschließt. Dies wird mit dem Begriff *kognitiver Bias* bezeichnet.

Kompetenzen können in diesem Ansatz durch Lernen erworben werden. Explizit bedeutet dies das Sammeln von Erfahrungen in bestimmten Situation zusammen mit verbundenen Aufgaben. Das Kompetenzverständnis im Rahmen der empirischen Bildungsforschung ermöglicht eine gute Operationalisierbarkeit für die Messung von Lernergebnissen.

Kompetenzen in der Berufsbildungsforschung bzw. -pädagogik (Schaper, 2012, S. 16 ff., 28)

Grundlage ist das Konzept der *beruflichen Handlungskompetenz*. Diese wird „als Fähigkeit verstanden, aus einem begrenzten Regelsystem heraus [. . .] eine unendliche Vielzahl von situationsadäquaten Handlungen generieren zu können." Kompetenzerwerb findet in dieser Auffassung durch eine strenge Ausrichtung der Lernprozesse auf typische Handlungen des zukünftigen Berufs statt. Unabhängig von einem spezifischen Berufsfeld lassen sich vier Bereiche berufsrelevanter Handlungskompetenzen unterscheiden: Fachkompetenz, Methodenkompetenz, Sozialkompetenz und Personale- oder Selbstkompetenz. Bei diesem Ansatz geht es eher um didaktische Konzepte als um Operationalisierung im Sinne empirischer Forschung.

Konzept der Schlüsselqualifikationen bzw. -kompetenzen (Schaper, 2012, S. 18 ff., 28)

Ein Bezugspunkt dieses Ansatzes ist die durch den Bologna-Prozess geforderte *Employability*-Anforderung, woraus sich ein eher bildungspolitischer Hintergrund ergibt. Dementsprechend sind die Konzepte wenig lehr-/lerntheoretisch fundiert. *Schlüsselkompetenzen* meinen „multifunktionale und domänenübergreifende Kenntnisse, Fähigkeiten und Haltungen". Es gibt verschiedene Arten diese zu strukturieren; die gebräuchlichste Einteilung ergibt sich durch Fach-, Methoden-, Sozial- und Selbstkompetenz. Ein weiteres wichtiges Schlagwort dieses Ansatzes ist die Entfaltung des Individuums oder auch die Persönlichkeitsentwicklung. Durch diese *Citizenship*-Kompetenzen erhält der Ansatz ebenfalls eine bildungstheoretische Orientierung.

Akademisch bzw. wissenschaftlich orientiertes Kompetenzverständnis (Schaper, 2012, S. 24 ff.)

Abschließend soll nun auf ein Verständnis von Kompetenz(orientierung) eingegangen werden, das sich explizit auf den Bereich der Hochschulbildung, samt damit einhergehender Spezifika, bezieht. Als Ausgangspunkt dienen die *Dublin Descriptors* (JQI, 2004), durch die allgemeine Kompetenzkategorien definiert werden, die dann, bezüglich der Erwartungen zum Ende der verschiedenen Abschlussniveaus ausdifferenziert, Angaben über generelle Fähigkeiten von Absolventinnen und Absolventen machen. Die Kategorien sind wie folgt definiert (Schaper, 2012, S. 24), (JQI, 2004, S. 4):

- Knowledge and understanding – Wissen und Verstehen
- Applying knowledge and unterstanding – Anwendung von Wissen und Verstehen
- Making judgements – Beurteilungen abgeben
- Communication – Kommunikation
- Learning skills – Lernstrategien

Die Ausdifferenzierung findet sich im Anhang A.1. Interessant für die Thematik dieses Abschnitts ist das zu Grunde liegende Kompetenzverständnis. Dieses ist von eher allgemeiner Natur:

> „The word 'competence' is used in the descriptors in its broadest sense, allowing for gradation of abilities or skills. It is not used in the narrower sense identified solely on the basis of a 'yes/no' assessment.“ (JQI, 2004, S. 3)

Basierend auf diesen Kompetenzkategorien wurden im sogenannten *Tuning-Projekt* (2005) fachspezifische und generische Kompetenzen unterschieden und ein allgemeines Vorgehen zur Entwicklung kompetenz- und outcome-orientierter Studiengänge erstellt. Das Projekt bildete den Ausgangspunkt für die Entwicklung des deutschen Hochschulqualifikationsrahmens (HRK, MKM & BMBF, 2005). In diesem sind die drei deutschen Hochschulabschlüsse (Bachelor, Master und Promotion) im Hinblick auf fachspezifische und generische Kompetenzen sowie auf formale Aspekte differenziert. (Für eine synoptische Darstellung vgl. HRK et al. (2005, S. 7 ff.))

Offensichtlich sind diese bildungspolitisch orientierten Kompetenzdefinitionen zwar dazu geeignet, grundsätzliche Lernergebnisse von Hochschulbildung festzulegen, aber nicht hilfreich im Sinne eines Kompetenzverständnisses, das theoretisch fundierte hochschuldidaktiksche Forschung unter anderem auf Veranstaltungsebene ermöglicht.

Schaper (2012, S. 29) definiert Anforderungen für ein solches *akademisches bzw. wissenschaftlich orientiertes Kompetenzverständnis* und verwendet dabei Aspekte der drei oben vorgestellten Ansätze:

> „Ein akademisch bzw. wissenschaftlich orientiertes Kompetenzverständnis sollte m. E. folgende Bestimmungsmerkmale enthalten:
>
> - Kompetenz ist als Befähigung zu definieren, in Anforderungsbereichen, die durch hohe Komplexität, Neuartigkeit bzw. Unbestimmtheit und hohe Ansprüche an die Lösungsqualität gekennzeichnet sind, angemessen, verantwortlich und erfolgreich zu handeln.

- Befähigungen zu einem solchen Handeln beinhalten zu integrierende Bündel von komplexem Wissen, Fertigkeiten, Fähigkeiten, motivationalen Orientierungen, (Wert-)Haltungen in Bezug auf die Anforderungsbereiche.
- Bei akademischen Kompetenzen sind insbesondere Befähigungen zur
  - Anwendung wissenschaftlicher Konzepte auf komplexe Anforderungskontexte,
  - wissenschaftlichen Analyse und Reflexion,
  - Erschaffung und Gestaltung neuer bzw. innovativer Konzepte und Problemlösungen,
  - anschlussfähigen Kommunikation von wissenschaftlichen Wissensbeständen, Konzepten und Methoden sowie
  - Selbstregulation und Reflexion des eigenen problemlösungs- und erkenntnisgeleiteten Handelns zu erwerben."

Dieses Kompetenzverständnis soll der vorliegenden Arbeit zu Grunde liegen. Während Kompetenzen somit ein komplexes Konstrukt darstellen, helfen sogenannte *Learning Outcomes* detaillierte Beschreibungen von angestrebten Lernergebnisse zu geben. Dahinter steht der Wunsch, zu definieren, was ein Student beispielsweise nach einer Veranstaltung oder einem Modul können soll. Die obigen Ausführungen zum Kompetenzbegriff helfen nachzuvollziehen, für welche Bereiche und in welchem Setting *Learning Outcomes* formuliert werden können und müssen. Auf eine theoretische Konzeption zur Formulierung im Speziellen und auf die Gestaltung kompetenzorientierter Studiengänge im Allgemeinen wird im folgenden Unterabschnitt eingegangen.

2.2.3 Umsetzung von Kompetenzorientierung in der Praxis

Nach einer eher abstrakten Beschäftigung mit dem Begriff der *Kompetenzorientierung* soll es in diesem Unterabschnitt nun darum gehen, wie diese in der Praxis umgesetzt werden kann. Dazu wird zunächst eine Taxonomie vorgestellt, um *Learning Outcomes* zu beschreiben; im Anschluss werden Kriterien zur kompetenzorientierten Lehr-/Lerngestaltung vorgestellt. Diese werden sich später bei der Entwicklung eigener Innovationen als nützlich erweisen.

Taxonomische Beschreibung von *Learning Outcomes*

In dieser Arbeit beschreiben *Learning Outcomes* im Sinne von Schaper (2012, S. 46 f.) „Erwartungen bzw. Aussagen [...], die beschreiben, was ein Lernender weiß, versteht oder in der Lage ist zu tun nach Abschluss einer Lerneinheit" und sind synonym zu dem Begriff *Lernergebnisse*. Sie bilden ein wesentliches Konzept in der kompetenzorientierten Studiengangsgestaltung. In den folgenden Kapiteln werden *Learning Outcomes* verwendet, um Veranstaltungsinterventionen zu beschreiben. Schaper (2012, S. 49) bezeichnet die Formulierung von Learning Outcomes als „Dreh- und Angelpunkt einer kompetenzorientierten Curriculum- und Lehr-/Lerngestaltung" und betont die Wichtigkeit der sorgfältigen Formulierung. Als gebräuchliches theoretisches Konzept nennt er die taxonomische Matrix von Anderson und Krathwohl (Anderson et al., 2005), die auch im weiteren Verlauf der Arbeit verwendet wird.

Bei dieser Taxonomie werden Learning Outcomes unter Verwendung von zwei Dimensionen kategorisiert. Die *Knowledge Dimension* (Wissens-Dimension) unterscheidet vier Arten von Wissen: *Factual* (Faktenwissen), *Conceptual* (begriffliches Wissen), *Procedural* (verfahrensorientiertes Wissen) und *Metacognitive* (metakognitives Wissen) (vgl. Anderson et al. (2005, S. 27), Schaper (2012, S. 49)).

Die zweite Dimension, genannt *Cognitive Process Dimension* (Erkenntnisdimension) unterscheidet sechs Arten von Erkenntnis: *Remember* (Erinnern), *Understand* (Verstehen), *Apply* (Anwenden), *Analyze* (Analysieren), *Evaluate* (Bewerten) und *Create* (Schaffen) (vgl. Anderson et al. (2005, S. 29 ff.), Schaper (2012, S. 49)).

Zu jeder Kategorie werden noch Unterkategorien definiert, auf die an dieser Stelle aber nicht weiter eingegangen werden soll. Genaueres, insbesondere zur Einordnung von Lernergebnissen in die Kategorien, findet man bei Anderson et al. (2005, S. 28 ff.).

Faktoren kompetenzorientierter Lehr-/Lerngestaltung

In seinen Ausführungen nennt Schaper (2012, S. 60 ff.) zentrale Aspekte, die notwendig für eine kompetenzorientierte Lehr-/Lerngestaltung sind. Im Folgenden werden zusammenfassend solche genannt, die für den weiteren Verlauf dieser Arbeit wichtig sind. Eine Auflistung aller Punkte findet man unter der gegebenen Referenz.

Im Sinne des wohlbekannten *Primat der Didaktik*, soll sich auch kompetenzorientierte Lehr-/Lerngestaltung „konsequent an den zu erreichenden Kompetenzzielen bzw. 'Learning Outcomes' orientieren". Unter Beachtung der obigen Ausführungen können sich diese nicht nur auf reinen Wissenszuwachs, sondern insbesondere auch auf Lernergebnisse anderer Art beziehen. Die Ausgestaltung von Lehr-/Lernsituationen soll basierend auf den Ergebnissen didaktischer Forschung geschehen und die entsprechenden Lernprozesse müssen so angeleitet werden, dass sie tatsächlich im Sinne der gewünschten Learning Outcomes wirken können. Das bedeutet beispielsweise, dass praktische Fertigkeiten nur durch Übungen oder sozial-kommunikative Fähigkeiten nur durch entsprechende Sozialformen gelernt werden können. Als weiterer wesentlicher Punkt wird eine sinnvolle Theorie-Praxis Verzahnung genannt, die reflektierend begleitet werden muss. Außerdem wird gefordert, dass die Rolle des Lernenden als „aktiv und selbstbestimmt" und die des Lehrenden als „Bereitsteller und Arrangeur von Lerngelegenheiten, sowie Begleiter und Berater der Lernenden" wahrgenommen werden muss.

Schaper (2012, S. 66 f.) erwähnt außerdem kompetenzorientiertes Prüfen als notwendige Konsequenz kompetenzorientierten Lernens. Ein wesentlicher Punkt dabei ist die strikte Ausrichtung der Prüfungen an den vorher definierten Learning Outcomes.

2.2.4 Einordung in das Konzept der Arbeit

Die in diesem Abschnitt vorgestellten Theorien konkretisieren Ansätze zur sowohl bildungspolitisch als auch bildungswissenschaftlichen Forderung der *Kompetenzorientierung*. Im Anschluss wurden wesentliche Aspekte aufgezeigt, die bei der praktischen Umsetzung zu beachten sind. Ein wichtiger Punkt dabei ist die Taxonomie von Anderson und Krathwohl zur Kategorisierung intendierter Lernergebnisse.

Insgesamt bildet der Inhalt des Abschnittes ein Gerüst für die Entwicklung einer eigenen Lerneinheit im Bereich der Mathematiklehrerausbildung. Dazu wird zuerst diskutiert werden müssen, inwieweit sich die allgemeinen Prinzipien in der Praxis umsetzen lassen und inwieweit Unterschiede bzw. Konflikte zu anderen theoretischen Grundlagen existieren und wie diese aufgelöst werden können.

2.3 Beschreibung von Lehrerwissen

> "Teachers themselves have difficulty in articulating what they know and how they know it" (Shulman, 1987, S. 6)

Bei der (kompetenzorientierten) Konzeption von Lerneinheiten für Mathematiklehramtsstudierende ist es, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, nötig die Learning Outcomes festzulegen. Dahinter steht die Frage, wie eine Lerneinheit zur Entwicklung von Lehrerprofessionalität beitragen soll. Dazu benötigt man offensichtlich zunächst ein theoretisches Konzept, um Eigenschaften (im weitesten Sinne) zu beschreiben, die eine (gute) Lehrkraft hat und Lehramtsstudierende entwickeln sollen. Dementsprechende Forschungsparadigmen haben eine gewisse Tradition; im Verlauf der letzten Jahrzehnte wurden verschiedene Ansätze vorgeschlagen, verändert und weiterentwickelt. Zu Beginn dieses Abschnittes soll ein kurzer forschungshistorischer Überblick stehen, der mit der Vorstellung des aktuellen Paradigmas, dem Konzept der *Lehrerkompetenzen*, enden wird. Für dieses Konzept wird ein theoretisches Modell vorgestellt, bei dem insbesondere die Beschreibung von Lehrerwissen im Fokus steht. Zum Abschluss wird speziell auf das Wissen von Mathematiklehrkräften eingegangen. Die historisch wertvolle Grundlage bilden die Ausführungen von Shulman (1987). Ein wesentliches, anschlussfähiges Konzept bilden die Arbeiten einer amerikanischen Forschergruppe um Deborah Loewenberg Ball und Hyman Bass (University of Michigan) (Ball & Bass, 2002; Hill, Schilling & Ball, 2004; Ball, Thames & Phelps, 2008; Ball & Bass, 2009; Suzuka et al., 2009). Diese werden zusammengefasst und unter Berücksichtigung des Schwerpunktes dieser Arbeit vorgestellt. Analog verhält es sich mit dem deutschen COACTIV-Projekt (Baumert et al., 2011; Baumert & Kunter, 2011a, 2011b; Kunter & Baumert, 2011; Kunter, Kleickmann, Klusmann & Richter, 2011).

2.3.1 Forschungsparadigmen zur Beschreibung 'guter' Lehrkräfte

Dieser historische Überblick beruht auf den Ausführungen von Seidel und Reiss (2014, S. 263 ff.). Als man anfing Unterricht systematisch empirisch zu beforschen, versuchte man zunächst „Merkmale einer 'guten' Lehrerpersönlichkeit" zu defininieren und empirisch zu bestätigen. Dieses sogenannte *Lehrerperönlichkeits*-Paradigma bezog sich neben allgemeinen Persönlichkeitseigenschaften auch auf Aspekte wie Fachwissen und didaktisches Wissen. In den entsprechenden Forschungsprojekten gelang es, Mindestanforderungen aufzustellen. Es erwies sich jedoch als schwierig, Persönlichkeitsmerkmale zu identifizieren, die notwendig und hinreichend für den Lehrerberuf (und für keinen anderen Beruf) sind.

Als Nächstes entwickelte sich das *Produkt-Prozess*-Paradigma, in dem nicht mehr die Lehrperson an sich von Interesse war, sondern Verhaltensweisen (Prozesse) in Verbindung mit Wirkungen auf das Lernen der SuS (Produkte) gesetzt wurden. Es gelang auf diese Art und Weise, lernförderliche Verhaltensweisen von Lehrkräften zu identifizieren. Die Forschungsergebnisse finden sich beispielsweise in den *Merkmalen guten Unterrichts* von Helmke wieder. Trotz brauchbarer Ergebnisse im Rahmen der Beschreibung lernförderlicher Verhaltensweisen, lieferte das Forschungsparadigma keine nützlichen Implikationen für die Ausbildung von Lehrkräften.

In den 90er Jahren entwickelte sich der *Expertise-Ansatz*. Dieses Paradigma fußt auf dem Vergeich von sehr erfahrenen Lehrkräften (Experten) mit Anfängern (Studierende, Referendare) mit dem Fokus auf das Verhalten im und die Reflexion von Unterricht. Auch wenn dieser Forschungsansatz deutliche Fortschritte für das Verständnis von Lehrerwissen gebracht hat, blieb die Frage offen, auf welche Art und Weise Expertise „gelehrt“ werden kann.

Aktuell wird das Paradigma der *Lehrerkompetenzen* verwendet. Dieses beruht auf dem Kompetenzkonzept von Weinert (siehe oben) und begründet sich in der folgenden Definition:

> „Unter **Lehrerkompetenz** versteht man die bei Lehrpersonen verfügbaren oder durch sie erlernbaren kognitiven Fähigkeiten und Fertigkeiten, um professionsbezogene Probleme zu lösen. Damit verbunden sind auch die motivationalen, volitionalen und sozialen Orientierungen und Fähigkeiten, um diese Problemlösungen in unterschiedlichen Situationen erfolgreich umsetzen zu können.“ (Seidel & Reiss, 2014, S. 269)

Man stellt fest, dass sich auch hier der Kompetenzbegriff als zentral für aktuelle Forschung erweist. Tatsächlich sind erste Ansätze zur Ausdifferenzierung professioneller Lehrerkompetenzen schon Bestandteil von Forschungen aus den Achziger Jahren. Im nächsten Unterabschnitt werden einige Beispiele vorgestellt.

Vorher soll jedoch noch die obige Definition von *Lehrerkompetenz* im Kontext der auf Seite 10 ff. vorgestellten Anforderungen für ein wissenschaftlich orientiertes Kompetenzverständnis diskutiert werden. An dieser Stelle muss man berücksichtigen, dass – im Gegensatz zu vielen anderen Studiengängen – im Lehramtsstudium das Berufsziel in der Regel klar durch die spätere Tätigkeit als Lehrkraft an einer (allgemeinbildenden) Schule gegeben ist. Die im Rahmen dieser Tätigkeit auftauchenden *professionsbezogenen Probleme* können sehr unterschiedlicher Natur sein: Unterrichtsvorbereitung, Unterrichtsdurchführung, Unterrichstreflexion, Beratung von SuS, Beratung von Eltern, ... Deutlich wird die Komplexität und Neuartigkeit dieser Probleme dadurch, dass die Lehrkraft es immer wieder mit neuen Individuen zu tun hat.

Die explizite Erwähnung von nichtkogninitven Kompetenzfacetten vervollständigt die ersten zwei Aspekte der Anforderungen für ein wissenschaftlich orientiertes Kompetenzverständnis. Auch der dritte Punkt ist im Wesentlichen erfüllt. Dabei treten naturgemäß Teilpunkte, die im Bezug zu eigenem wissenschaftlichen Arbeiten stehen, in den Hintergrund. Weiterhin im Fokus steht die Anwendung wissenschaftlicher Konzepte, sowie die Fähigkeit zur (Selbst-) Reflexion und Selbstregulation.

Es wird also deutlich, dass die obige Beschreibung von Lehrerkompetenz anschlussfähig an die vorgestellten Grundlagen zur Kompetenzorientierung ist. Sie soll für den weiteren Verlauf der Arbeit als Definition dienen.

2.3.2 Beschreibung der Struktur professioneller Lehrerkompetenzen

Erste Ansätze zur Beschreibung professioneller Lehrerkompetenzen finden sich bereits in der Arbeit von Shulman (1987). Während dort vor allem versucht wird, eine Wissensbasis zu beschreiben, erweitern neuere Ansätze dieses Konzept insbesondere durch Kompetenzfacetten neben dem professionellen Wissen. Im Folgenden wird die Theorie von Shulman als Grundlage für alle aktuellen Theorien kurz vorgestellt. Im Anschluss werden moderne Konstrukte zur Beschreibung von Lehrerkompetenzen behandelt, die für diese Arbeit einen wichtigen Beitrag zum theoretischen Fundament leisten werden.

Lee Shulmans 'Knowledge Base of Teachers'

Auch unter Berücksichtigung bildungspolitischer Diskussionen in den USA schreibt Shulman (1987, S. 3 f.):

> „The claim that teaching deserves professional status, however, is based on a more fundamental premise: that the standards by which the education and performance of teachers must be judged can be raised and more clearly articulated. The advocates of professional reform base their arguments on the belief that there exists a "knowledge base for teaching" [...]"

Aufbauend auf dem grundlegenden Verständnis, dass „teaching necessarily begins with a teacher's understanding of what is to be learned and how it is to be taught" (Shulman, 1987, S. 7), definiert Shulman ein Minimalkonzept für eine Wissensbasis (*knowledge base*) für Lehrkräfte. Diese besteht aus sieben Kategorien, die von der grundlegenden Idee her den Überschriften in einem Handbuch, das Lehrerwissen beinhaltet, entsprechen könnten (Shulman, 1987, S. 8):

- content knowledge
- general pedagogical knowledge
- curriculum knowledge
- pedagogical content knowledge
- knowledge of learners and their characteristics
- knowledge of educational contexts
- knowledge of educational ends, purposes, and values and their philosophical and historical grounds

Diese Wissensbasis ist der Ausgangspunkt für etwas, dass Shulman (1987, S. 15) als *Pedagogical Reasoning* bezeichnet. Er beschreibt damit ein Modell zur Planung, Durchführung und Reflexion von Unterricht an dessen Anfang die Wissensbasis steht. Auf dieses Modell wird an dieser Stelle jedoch nicht weiter eingegangen; man findet Details direkt bei Shulman (1987, S. 12 ff.).

Die Betrachtung der Ausführungen von Shulman ist u. a. deshalb interessant – und diese werden hier in den Grundzügen dargestellt –, weil sie die Grundlage für viele bekannte weitere Arbeiten im Bereich der konzeptionellen Fassung von Lehrerkompetenzen sind. Insbesondere die Begriffe *content knowledge* und *pedagocical content knowledge* tauchen immer wieder auf. Seidel und Reiss (2014, S. 269) nennen die Theorie als eine erste Ausdifferenzierung professioneller Lehrerkompetenzen, und Shulmans Arbeit wird als zugrunde liegendes theoretisches Konzept unter anderem für den *Vorschlag zur Topologie des professionellen Lehrerwissens* von Bromme (2014, S. 96), für das *Kompetenzmodell von COACTIV* von Baumert und Kunter (2011a, S. 30) und für die *Practise-Based Theory of Mathematical Knowledge for Teaching* von Ball und Bass (2002, S. 4) referenziert. Eben diese Theorien werden im Folgenden weiter vorgestellt. Anzumerken ist die für diese Arbeit nützliche Tatsache, dass in allen Theorien über Mathematiklehrkräfte gesprochen wird.

Rainer Brommes 'Topologie des professionellen Lehrerwissens'

Von den genannten Arbeiten ist die von Bromme die älteste (1992) der drei erwähnten Konzeptionen und ist dem oben beschriebenen Expertise-Ansatz zuzuordnen. In ihr findet sich ein Vorschlag zur *Topologie des professionellen Lehrerwissens*, der Shulmans Wissensbasis weiter ausdifferenziert. Als Beispiel betrachtet er Mathematiklehrkräfte und nennt folgende, für die Gestaltung von Unterricht notwendige, Arten von Wissen (Bromme, 2014, S. 96 f.):

- Fachliches Wissen über Mathematik als Disziplin
- Schulmathematisches Wissen
- Philosophie der Schulmathematik
- Pädagogisches Wissen
- Fachspezifisch-pädagogisches Wissen

Im Vergleich zu Shulman kommt die Kategorie *Philosophie der Schulmathematik* neu hinzu. Darunter fasst er Aspekte der Nützlichkeit des Schulfaches sowie den Bezug zu „anderen Bereichen menschlichen Lebens und Wissens" und erwähnt explizit, dass in diesem Bereich auch normatives Wissen zu finden ist (Bromme, 2014, S. 97 f.). Ferner betont Bromme (2014, S. 96) die „deutliche Trennung zwischen dem Wissen der Fachdisziplin und dem Wissen des Schulfaches". Letzteres beinhaltet Kenntnisse über ein „'Eigenleben' mit einer eigenen Logik", das sich von der Fachdisziplin unterscheidet (Bromme, 2014, S. 96).

Während die beiden bisher vorgestellten Ansätze von konzeptioneller Bedeutung sind, folgen nun zwei aktuellere theoretische Konzepte, die mit empirischen Forschungsprojekten einhergehen.

Die Entwicklung einer 'practise based theory of content knowledge' von Ball und Bass

Ball und Bass beziehen sich in ihrer Forschung auf den Grundschulbereich. Dennoch ist der theoretische Rahmen so angelegt, dass er sich ohne Weiteres auch auf den Gymnasialbereich anwenden lässt. In ihren Arbeiten (Ball & Bass, 2002; Hill et al., 2004; Ball et al., 2008; Suzuka et al., 2009; Ball & Bass, 2009) beschäftigt sich die Gruppe um die Autoren explizit mit theoretischen Konzepten zum mathematikbezogenen Wissen von Lehrkräften. Dementsprechend passen sie gut zum Fokus dieser Arbeit.

Ball und Bass (2002) beschäftigen sich mit Frage, was es genau bedeutet, wenn gefordert wird, dass ein Lehrer mathematische Inhalte verstanden haben muss um gut unterrichten zu können. Die Autoren stellen fest, dass die Forderung nach einem *pedagogical content knowledge*, wie sie Shulman (1987) und Bromme (2014) aufstellen, impliziert, dass das Besitzen fachmathematischen Wissens alleine nicht zum Unterrichten ausreicht (Ball & Bass, 2002, S. 4).

Das methodische Vorgehen, um festzustellen, welches mathematische Wissen (Grundschul-)Lehrkräfte benötigen, beruht auf einer Art Berufsanalyse; die Autoren analysieren Audio- und Viedeoaufnahmen, Transkripte, Kopien von SuS-Arbeiten und Lehrernotizen, um die mathematischen Probleme zu identifizieren, die eine Lehrkraft im täglichen Unterricht lösen muss (Ball & Bass, 2002, S. 5).

Durch ihre Untersuchungen kommen Ball und Bass (2002, S. 6 f.) zu der Einsicht:

„[...] that teaching is a form of mathematical work. Teaching involves steady stream of mathematical problems that teachers must solve.“

Viele dieser Probleme sind unter anderem von der Art, dass unübliche Lösungsansätze von SuS von einer Lehrkraft in kurzer Zeit analysiert und bewertet werden müssen, dass Inhalte und auch SuS-Äußerungen auf die Bedeutsamkeit für weitere Mathematik bewertet werden müssen, oder auch, dass Probleme von SuS mit Hilfe tieferliegender mathematischer Konstrukte identifiziert, erklärt und/oder gelöst werden müssen. Unterrichten von Mathematik wird als substanzielle mathematische Arbeit betrachtet, bei der ständiges mathematisches Problemlösen erforderlich ist (Ball & Bass, 2002, S. 11 ff.). Das folgende Zitat listet die mathematischen Aktivitäten auf, die Ball und Bass (2002, S. 11) in Ihren Untersuchungen identifiziert haben:

"

- Design mathematically accurate explanations that are comprehensible and useful for students
- Use mathematically appropriate comprehensible definitions;
- Represent ideas carefully, mapping between a physical or graphical model, the symbolic notation and the operation or process;
- Interpret at make mathematical and pedagogical judgements about student's questions, solutions, problems, and insights (both predictable and unusual);
- Be able to respond to students' mathematical questions and curiosities;
- Make judgements about the mathematical quality of instructional materials and modify as necessary;
- be able to pose good mathematical questions and problems that are productive for students' learning;
- Assess students' mathematics learning and take next steps.

“

Die Autoren nennen weiterhin drei wesentliche Merkmale, die für den Besitz mathematischen Wissens für den Unterricht essentiell sind. Diese haben gemeinsam, dass sie eine Blickweise auf mathematisches Wissen beinhalten, die in der Regel für Mathematiker oder Naturwissenschaftler nicht in dem Maße wichtig ist.

Eines dieser Merkmale ist, dass mathematisches Wissen und mathematische Ideen dekomprimiert werden müssen. Dieses ist zwar typisch für Lehrkräfte, steht aber im Gegensatz zur mathematischen Forschungstradition, Dinge abstrakt und komprimiert zu betrachten, um daraus neue Erkenntnisse gewinnen zu können. (Ball & Bass, 2002, S. 11)

Als zweites Merkmal nennen die Autoren die Notwendigkeit, das mathematische Wissen sowohl in der Fachstruktur als auch im Bezug auf typische Unterrichtsinhalte in einer gewissen Alterstufe verknüpft verfügbar zu haben. Diese Verknüpfungen sind wichtig, um die SuS dabei zu unterstützen, ihr Wissen über verschiedene mathematische Teilgebiete und Schuljahre hinweg vernetzen zu können. (Ball & Bass, 2002, S. 11, ff.)

Das Wissen über die begriffliche Entwicklung von mathematischen Ideen stellt das dritte Merkmal dar. In diesem Kontext wird insbesondere der Begriff „mathematical horizon“ erwähnt, der in den weiteren Ausführungen noch eine Rolle spielen wird. Dabei wird darauf abgezielt, dass eine Lehrkraft mathematische Aussagen, die zu einem bestimmten Zeitpunkt sinnvoll erscheinen, im Rahmen der Anschlussfähigkeit an zukünftige Lerninhalte einordnen muss. Als Beispiel wird die Aussage „Man kann keine größere von einer kleineren Zahl abziehen“ im Kontext des zweiten Schuljahrs genannt. Dabei wird auch von *mathematischer Ehrlichkeit* gesprochen. Der Begriff steht im Einklang mit dem Konzept der *Intellektuellen Ehrlichkeit*, der schon von Bruner (1977, bspw. S. 13) geprägt wurde und auch in weiteren Ausführungen von Ball und Bass (2009, bspw. S. 2) eine Rolle spielt. (Ball & Bass, 2002, S. 12)

Anzumerken ist auch noch, dass sich die vorgestellten Ergebnisse im Sinne der Definition auf Seite 14 auf Fähigkeiten und Fertigkeiten zum Lösen professionsbezogener Probleme beziehen und somit tatsächlich eine Facette von Lehrerkompetenz aufzeigen, die auch im Einklang mit den vorgestellten Modellen zur Beschreibung von Lehrerwissen steht.

Für das Ziel, eine *Practise-Based Theory of Mathematical Knowledge for Teaching* zu entwickeln, schlagen die Autoren, basierend auf den oben vorgestellten Forschungsergebnissen, ein Modell zur Beschreibung von mathematischem Unterrichtswissen vor. Dieses ist explizit als Verfeinerung (und nicht als Gegenentwurf) zu Shulmans *pedagogical content knowledge*-Modell gedacht (Suzuka et al., 2009, S. 22).

Die Autoren unterteilen das sogenannte *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) in sechs Unterkategorien, die sich den beiden Wissensarten *Subject Matter Knowledge* und *Pedagogical Content Knowledge* von Shulman zuordnen lassen. Das Modell wird in Abbildung 2.1 visualisiert.

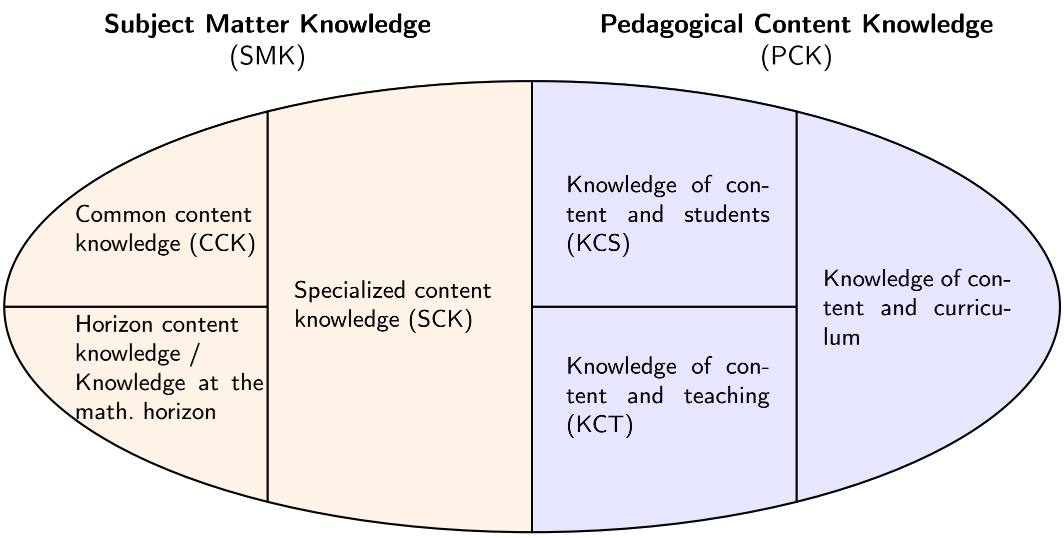


Abbildung 2.1: *Domains of Mathematical Knowledge for Teaching* (Abgezeichnet nach Ball et al. (2008, S. 403) und Ball und Bass (2009, S. 5))

Nun sollen die Unterkategorien näher beschrieben werden. Dabei wird der Bereich *Horizon content knowledge* nach hinten verschoben, da dieser forschungschronologisch erst bei Ball und Bass (2009) genauer beschrieben wurde. Eine detaillierte Auseinandersetzung mit den anderen Wissensgebieten findet man bereits bei Ball et al. (2008).

Common content knowlege (CCK) Hier ist das Fachwissen gemeint, das benötigt wird, um mathematische Aufgaben oder Probleme zu lösen. Dabei ist hier die Art von mathematischem Fachwissen gemeint, die nicht speziell für den Mathematikunterricht wichtig ist, sondern auch in andern Kontexten Anwendung findet. Die Autoren betonen, dass es nicht um mathematische Allgemeinbildung, sondern um Fachwissen in mathematikintensiven Bereichen geht (Ball & Bass, 2009, S. 5).[6] Beispiele hierfür sind neben der Mathematik selbst die Naturwissenschaften oder auch Ingenieurswissenschaften. Man kann also sagen, dass mit CCK das gemeint ist, was man allgemein als mathematisches Fachwissen bezeichnet. (Ball et al., 2008, S. 399)

Specialized content knowledge (SCK) Durch SCK wird mathematisches Wissen beschrieben, das nur für das Unterrichten von Mathematik benötigt wird. Dabei beziehen sich die Autoren auf ihre Ergebnisse von Ball und Bass (2002), die auch zu Beginn dieses Unterabschnittes beschrieben wurden. (Ball et al., 2008, S. 400 f.)

Beispiel Gestellt ist die Aufgabe $\frac{5}{6} : \frac{1}{3}$. Ein Schüler rechnet

$$\frac{5}{6} : \frac{1}{3} = \frac{10}{12} : \frac{4}{12} = 10 : 4 = 2\frac{1}{2}.$$

Der Rechenweg ist unkonventionell, das Ergebnis aber korrekt. Eine Lehrkraft muss sich nun für die Beurteilung der Schülerlösung überlegen, ob die Strategie „Hauptnenner bilden und dann die Zähler dividieren“ in diesem Beispiel zufällig funktioniert, oder ob sich dahinter ein allgemeines Prinzip verbirgt. Das Wissen, dass es braucht um sich solcher Fragestellungen bewusst zu sein, eine mathematisch korrekte Antwort zu geben und außerdem eine Erklärung zu überlegen, die mit den den SuS zu Verfügung stehenden Mitteln auskommt, ist Teil des SCK. (Suzuka et al., 2009, S. 8 f.)

Knowledge of content and students (KCS) Mit dieser Wissensart wird etwas beschrieben, das in Deutschland typischerweise in den Bereich *Mathematikdidaktik* fällt. Es handelt sich im Wesentlichen um Wissen über (typische) Vorstellungen, Fehlvorstellungen oder Denkmuster von SuS bezogen auf bestimmte curriculare Inhalte. (Ball et al., 2008, S. 401)

Knowledge of content and teaching (KCT) Auch KCT beschreibt etwas, das man typischerweise der *Mathematikdidaktik* zuordnet, nämlich das Wissen über Unterrichtseinstiege, instruktive Beispiele und Gegenbeispiele, (verschiedene) Zugänge zu Unterrichtsinhalten, Darstellungsformen von Inhalten, etc. (Ball et al., 2008, S. 401 f.)

Knowledge of content and curriculum Hier ist die bereits von Shulman definierte Kategorie gemeint. Die Zuweisung zum PCK wird als „provisorisch“ beschrieben, jedoch in weiteren Veröffentlichungen auch nicht mehr verändert. Es wird darauf verwiesen, dass auch spätere Veröffentlichungen von Mitgliedern der Shulman-Forschergruppe diese Zuweisung wählen. (Ball et al., 2008, S. 402 f.)

Horizon content knowledge

> „We define horizon knowledge as an awareness – more as an experienced and appreciative tourist than as a tour guide – of the large mathematical landscape in which the present experience and instruction is situated.“ (Ball & Bass, 2009, S. 6)

[6] Tatsächlich wird dies in den theoretischen Grundlagen des COACTIV-Projekts (Baumert & Kunter, 2011a, S. 36) nicht korrekt ausgeführt. Dort wird CCK durch „mathematisches Alltagswissen“ beschrieben.

Diese Kategorie wird bei Ball et al. (2008, S. 403) erst provisorisch hinzugefügt und bei Ball und Bass (2009) dann unter dem Begriff *Knowledge at the mathematical horizon* weiter ausgeführt. Inspiriert von der Behauptung von Bruner (1977, S. 33), dass „any subject can be taught effectively in some intellectually honest form to any child at any stage of development“ beschreiben die Autoren eine Wissenskategorie, die sich durch Kenntnisse über die „großen Ideen“ der Mathematik und ein grundlegendes Verständnis fundamentaler Zusammenhänge definiert und Felix Kleins *Schulmathematik vom höheren Standpunkte aus* (bspw. Klein, 1908) komplementär ergänzt.

Für den Unterricht verbinden Ball und Bass (2009, S. 6) die folgenden Aktivitäten mit dem *Knowledge at the mathematical horizon*:

„

- Making judgements about mathematical importance
- Hearing mathematical significance in what students are saying
- Highlighting and underscoring key points
- Anticipating and making connections
- Noticing and evaluating mathematical opportunities
- Catching mathematical distortions or possible precursors to later mathematical confusion or misrepresentation

“

Man sieht eine deutliche Verknüpfung zu dem Prinzip eines *Spiralcurriculums*, wie es auch im deutschen Schulsystem zu Grunde liegt. Dennoch geht es bei diesem Konzept nicht um Wissen, das eine Lehrkraft den SuS vermitteln soll (Ball & Bass, 2009, S. 10).

Ball und Bass (2009, S. 6) definieren vier wesentliche Bestandteile des *horizon knowledge*, die dazu dienen, die oben genannten Verantwortlichkeiten bedienen zu können:[7]

„

1) A sense of the mathematical environment surrounding the current 'location' in instruction.
2) Major disciplinary ideas and structures
3) Key mathematical practises
4) Core mathematical values and sensibilities

“

Anzumerken ist, dass dieses Wissen keinem typischen Inhalt der aktuellen universitären Lehrerausbildung entspricht.

Abschließend soll an dieser Stelle noch überblicksartig über Forschung zur empirischen Evidenz für das beschriebene Modell zur Kategorisierung von professionellem Wissen von Mathematiklehrern berichtet werden. Dabei geht es um die Frage, inwieweit sich diese Wissenskategorien tatsächlich empirisch nachweisen und voneinander unterscheiden lassen.

Hill et al. (2004) stellen Forschung vor, die es zum Ziel hat, die oben beschriebenen Wissenskategorien empirisch nachzuweisen. Dazu wurden Testitems erstellt, die sich auf die verschiedenen

[7]Da die Autoren in der vorliegenden Literatur nicht weiter auf die genannten Punkte eingehen, war es nicht möglich diese sinnerhaltend ins Deutsche zu übersetzen.

Wissenskategorien und verschiedene mathematische Oberthemen der amerikanischen Grundschulmathematik beziehen. Über die erhobenen Daten wurden verschiedene Faktorenanalysen gerechnet. Details zur methodischen Umsetzung findet man bei Hill et al. (2004, S. 14 ff.).

Die Faktorenanalyse belegt eine Mehrdimensionalität des MKT. Es konnte ein genereller Faktor nachgewiesen werden, der zwischen 72% und 77% aller Varianzen in den Antworten erklärt. Hill et al. (2004, S. 21 f.) interpretieren diesen Faktor als das CCK. Für das SKC konnte nur teilweise ein Einfluss einen solchen Faktors nachgewiesen werden.

Hill et al. (2004, S. 24 f.) stellen insgesamt fest, dass die Ergebnisse durchaus Indizien für die Existenz eines *specialized content knowledge* im oben beschriebenen Sinne liefern. Diese Wissenskategorie ist eng verbunden mit, aber nicht äquivalent zu, dem *common content knowledge*. Die Autoren stellen somit empirische Evidenz dafür fest, dass das mathematische Wissen einer Lehrkraft tatsächlich Komponenten enthält, die nicht rein fachmathematischer Natur sind.

Basierend auf den vorgestellten Überlegungen stellen Suzuka et al. (2009) Aufgaben vor, die MKT in der Lehrerausbildung fördern sollen. Auf diese wird in Abschnitt 2.4 im Rahmen der Vorstellung der Schnittstellenproblematik näher eingegangen.

Das COACTIV-Projekt zur Untersuchung professioneller Kompetenz von Lehrkräften

Das COACTIV-Projekt ist ein deutsches Forschungsprogramm mit dem Ziel, die „Genese, Struktur und Handlungsrelevanz professioneller Kompetenzen von Lehrkräften“ zu untersuchen (Baumert et al., 2011, S. 7). Schwerpunktmäßig stehen die Mathematiklehrkräfte im Fokus. Im Rahmen einer solchen Zielsetzung muss natürlich auch ein Modell zur Beschreibung und zum Erwerb professioneller Kompetenzen entwickelt werden. Dieses soll im Folgenden in seinen Grundzügen vorgestellt werden.

Professionelle Kompetenz von (Mathematik-)Lehrkräften wird im COACTIV-Projekt durch ein komplexes Modell beschrieben, welches in Abbildung 2.2 dargestellt ist.

Professionelles Handeln wird in diesem Modell als Zusammenspiel von *Professionswissen*, *Überzeugungen / Werthaltungen / Zielen*, *motivationaler Orientierung* und *selbstregulativen Fähigkeiten* gesehen. Diese bilden vier nichthierarchische sogenannte Kompetenzaspekte. Diese werden dann jeweils in Kompetenzbereiche und noch detaillierter in Kompetenzfacetten ausdifferenziert. In Abbildung 2.2 sieht man diese Ausdifferenzierung in dem Bereich des Professionswissens. (Baumert & Kunter, 2011a, S. 33)

Für die Zielsetzung dieser Arbeit interessant sind vor allem die Kompetenzbereiche *Fachwissen* und *fachdidaktisches Wissen*. Wie die Arbeiten der Arbeitsgruppe um Ball beruht auch dieses Projekt bei der Beschreibung des Wissens von Lehrkräften auf der Wissensbasis von Shulman (Baumert & Kunter, 2011a, S. 36). In der Ausdifferenzierung der Kompetenzfacetten weichen Baumert und Kunter (2011a, S. 37) jedoch explizit von deren Wissenskategorisierung (wie oben vorgestellt) ab.

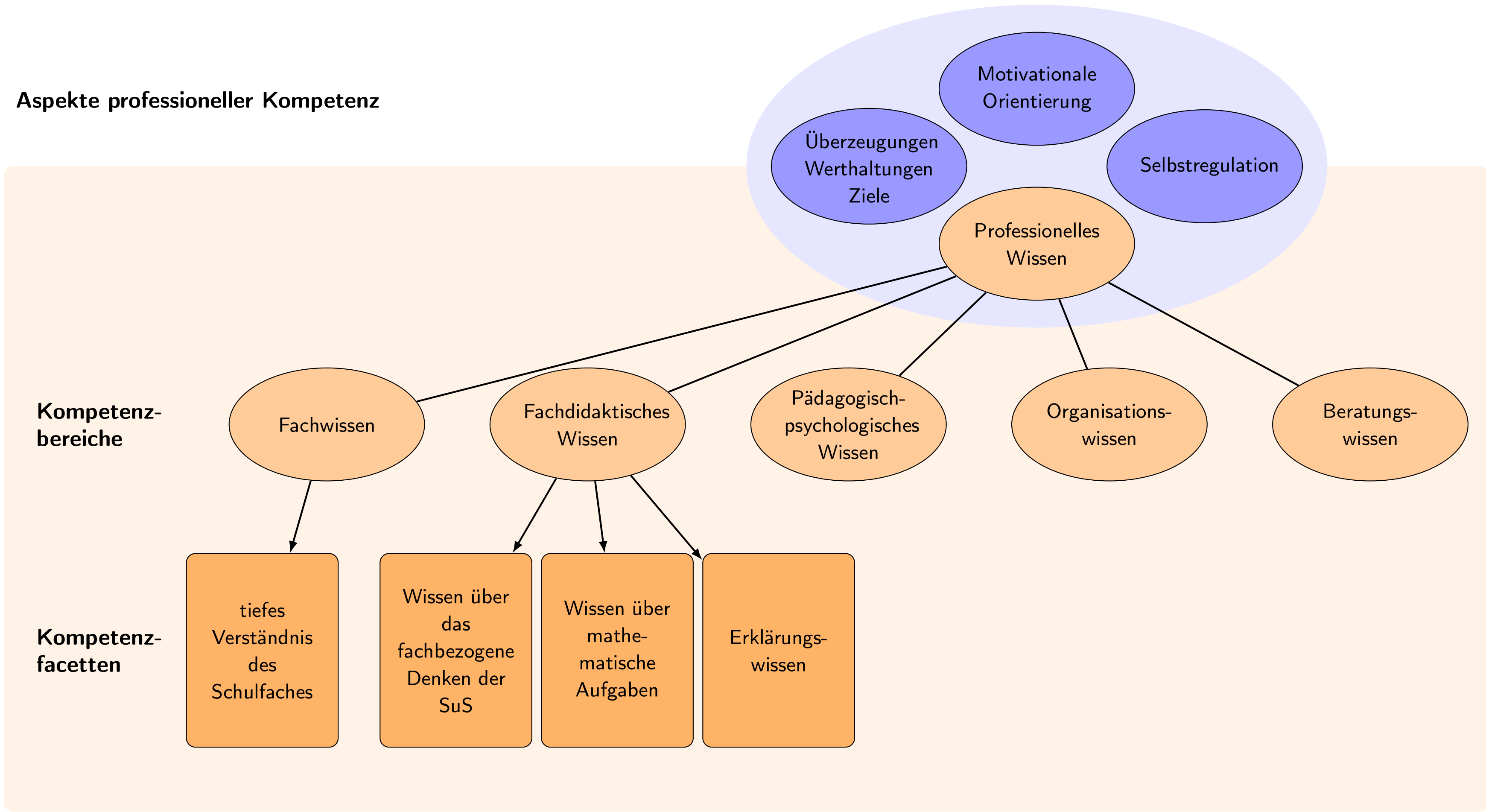


Abbildung 2.2: Das Kompetenzmodell von COACTIV mit Spezifikationen für das Professionswissen (Abgezeichnet nach Baumert und Kunter (2011a, S. 32) und Seidel und Reiss (2014, S. 270))

Das COACTIV-Projekt unterscheidet vier Arten mathematischen Wissens abhängig von der Tiefe der mathematischen Durchdringung:

„

[1.] Akademisches Forscherwissen

[2.] Profundes Verständnis der mathematischen Hintergründe der in der Schule unterrichteten Inhalte

[3.] Beherschung des Schulstoffes auf einem zum Ende der Schulzeit erreichbaren Niveau

[4.] Mathematisches Alltagswissen von Erwachsenen

"

Für das fachdidaktische Wissen werden drei Dimensionen unterschieden:

„

[1.] Wissen über das didaktische und diagnostische Potenzial, die kognitiven Anforderungen und impliziten Wissensvoraussetzungen von Aufgaben, ihren didaktischen Sequenzierungen und die langfristige curriculare Anordnung von Stoffen,

[2.] Wissen über Schülervorstellungen (Fehlkonzeptionen, typische Fehler, Strategien) und Diagnostik von Schülerwissen und Verständnisprozessen,

[3.] Wissen über multiple Repräsentations- und Erklärungsmöglichkeiten

" (Baumert & Kunter, 2011a, S. 37 f.)

Sich auf die Ergebnisse der empirischen Untersuchungen im Rahmen des Forschungsprogramms beziehend stellen Kunter und Baumert (2011, S. 347) fest, dass man (im Gegensatz zu den Ergebnissen aus (Hill et al., 2004)) eindeutig die beiden Wissensformen voneinander strukturell unterscheiden kann. Insbesondere stellen Baumert und Kunter (2011b, S. 185) auf Basis der empirischen Untersuchung fest, dass die Entwicklung fachdidaktischen Wissens deutlich durch das verfügbare Fachwissen limitiert ist und dass Mängel im Fachwissen nicht durch fachdidaktisches Wissen ausgleichbar sind. Im Bezug auf die Lehramtsausbildung heißt es

> "Es scheint, dass Ausbildungsprogramme, die Kompromisse in der fachwissenschaftlichen Ausbildung eingehen, negative Rückwirkungen auf die Entwicklung des fachdidaktischen Wissens und in der Konsequenz auf die erfolglreiche Unterrichtstätigkeit haben. Unterschiede im Fachwissen, die während der Ausbildung auftraten, bleiben über die gesamte Berufskarriere bestehen." (Baumert & Kunter, 2011b, S. 185)

In diesem Rahmen fordern die Autoren für eine bessere Berufsorientierung eine stärke Berücksichtigung der Schulmathematik, ohne dabei auf mathematische Strenge zu verzichten, und definieren das Verhältnis von Fachmathematik und Fachdidaktik in der Lehramtsausbildung als ein noch nicht vollständig bearbeitetes Themenfeld. (Baumert & Kunter, 2011b, S. 186) Die genauen Forschungsergebnisse findet man bei Baumert und Kunter (2011b); für die weitere Arbeit genügen die bis hierhin vorgestellten Grundlagen.

Abschließend soll noch ein weiterer Teilaspekt des COACTIV-Forschungsprogramms vorgestellt werden, der sich für die theoretische Konzeption von Lehrinnovationen als nützliches Modell erweisen wird. Kunter et al. (2011) stellen ein Modell vor, das sich mit dem Erwerb professioneller Kompetenzen von Lehrkräften, sowie deren Determinanten und Konsequenzen beschäftigt (siehe Abbildung 2.3).

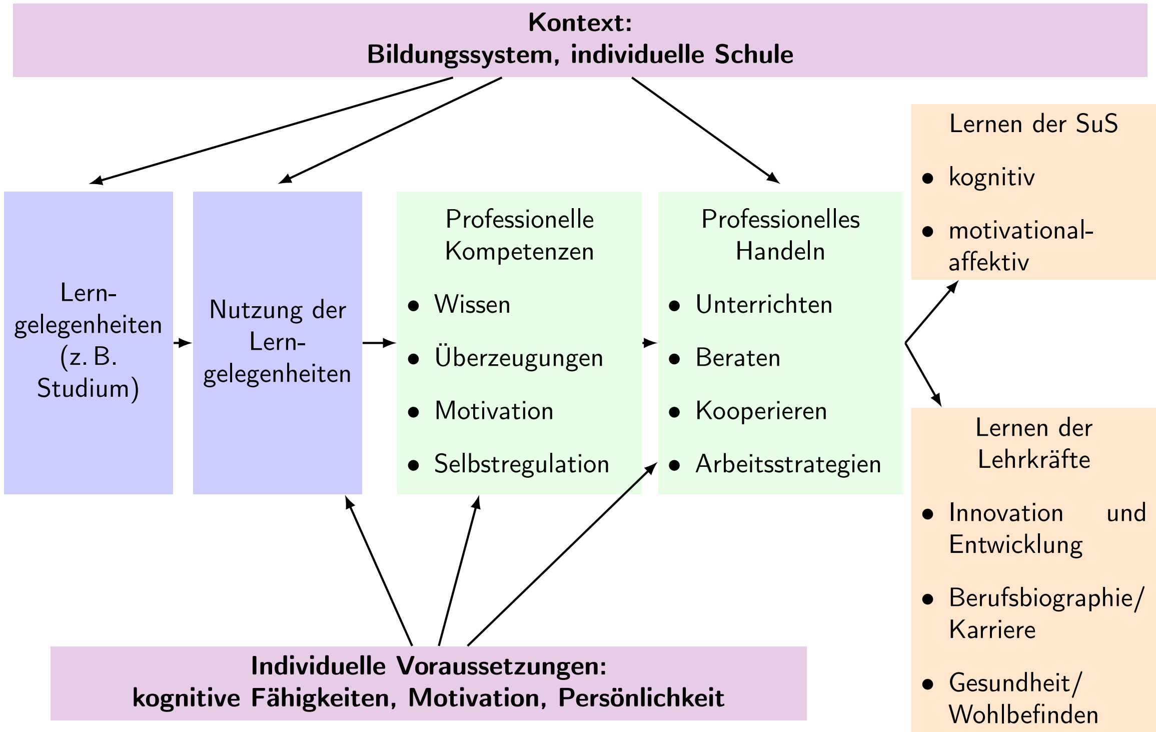


Abbildung 2.3: Modell der Determinanten und Konsequenzen der professionellen Kompetenz von Lehrkräften (Abgezeichnet nach Kunter et al. (2011, S. 59) und Seidel und Reiss (2014, S. 271))

Kompetenzerwerb wird im Rahmen eines Angebots-Nutzungs-Modells dargestellt, das insbesondere die interindividuelle Variabilität mit einbezieht und die tatsächliche Nutzung von Lerngelegenheiten als wichtiges Merkmal herausstellt. Eine nähere Beschreibung findet man bei Kunter et al. (2011) und eine Einordnung in den Kontext von Angebots-Nutzungs-Modellen aus Sicht der pädagogischen Psychologie bei Seidel und Reiss (2014, S. 255, 270 f.). Im Rahmen dieser Arbeit bietet das Modell eine Möglichkeit, um die Wirkweise entwickelter Lehrkonzepte in einen breiteren theoretischen Rahmen einbetten zu können.

2.3.3 Einordnung in das Konzept dieser Arbeit

In diesem Abschnitt wurden verschiedene Konzepte zur Beschreibung von professioneller Lehrerkompetenz insbesondere mit dem Fokus auf Wissensaspekte vorgestellt. Die Theorie von Shulman (1987) stellte dabei konzeptionell einen wichtigen Ausgangspunkt dar und steht auch begriffsgenetisch am Anfang von Forschungsarbeiten, die sich mit dem *pedagogical content knowledge* beschäftigen. Als großes Forschungsprojekt wurde das amerikanische MKT-Projekt der Forschergruppe um Deborah Loewenberg Ball und Hymann Bass vorgestellt. Dieses beschäftigt sich mit mathematischem Unterrichtswissen von Grundschullehrkräften und schlägt ein sehr detailliert unterteiltes Wissenskonzept basierend auf umfangreichen Feldstudien vor. Dabei werden insbesondere Bezüge zwischen fachmathematischem Wissen und fachdidaktischem Wissen hergestellt. Außerdem wurde das COACTIV-Projekt als großes deutsches Projekt in einigen Facetten angesprochen. Die dort gewählte Wissenseinteilung lässt sich empirisch belegen. Insbesondere werden durch dieses Forschungsprogramm umfangreiche Modelle zur professionellen Lehrerkompetenz und zur Entwicklung dieser angeboten.

Für die vorliegende Arbeit wird sich das MKT-Konzept als nützlich zur Beschreibung der Wirkungsweise von Schnittstellenprozessen erweisen. Auch die damit einhergehende Forschung zu entsprechenden Aufgabenformaten kann als Ergänzung der im nächsten Abschnitt vorgestellten Schnittstellenaufgaben einfließen. Aus dem COACTIV-Projekt sind im Rahmen dieser Arbeit vor allem die beiden erwähnten Modelle von Bedeutung. Diese bieten eine gute Möglichkeit, spätere Ergebnisse – die von Natur aus einen sehr spezialisierten Rahmen haben – angemessen in aktuelle umfangreiche Konzepte zur Lehrerausbildung einzuordnen.

2.4 Schnittstellenaktivitäten und das Problem der doppelten Diskontinuität

Nachdem die vorgestellten Inhalte aus den letzten Abschnitten nicht ausschließlich mathematikspezifisch waren, soll es in diesem Abschnitt um das für die universitäre Lehrerausbildung im Fach Mathematik zentrale Problem der *doppelten Diskontinuität* gehen. Neben einer Einführung in die Thematik wird in diesem Abschnitt insbesondere das Konzept von *Schnittstellen-Aktivitäten* vorgestellt. Dabei wird Rückbezug auf das bereits beschriebene Forschungsprogramm von Ball, Bass und Co. genommen.[8] Die wichtigen vorgestellten Konzeptionen ergeben sich aus den Arbeiten von Bauer[9] (Bauer & Partheil, 2009; Bauer, 2012, 2013; Bauer, Gromes & Partheil, 2016). Außerdem wird noch eine zu den Schnittstellenaufgaben ähnliche Konzeption von Suzuka et al. (2009) beschrieben.

2.4.1 Die doppelte Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung

Felix Klein schreibt in der Einleitung des ersten Teils seiner „Elementargeometrie vom höheren Standpunkte aus“ die folgenden Zeilen:

> „In den letzten Jahren hat sich unter den Universitätslehrern der mathematischen und naturwissenschaftlichen Fächer ein weitgehendes Interesse an einer zweckmäßigen, allen Bedürfnissen gerecht werdenden Ausbildung der Kandidaten des höheren Lehramts entwickelt. Diese Erscheinung ist erst recht neuen Datums; in einer ganzen langen Zeitperiode trieb man an den Universitäten ausschließlich hohe Wissenschaft ohne Rücksicht auf das, was der Schule not tat, und ohne sich überhaupt um die Herstellung einer Verbindung mit der Schulmathematik zu sorgen. Doch was ist die Folge einer solchen Praxis? Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, an denen ihn nichts mehr an das erinnert, womit er sich bisher beschäftigt hat, und natürlich vergisst er daher alle diese Dinge rasch und gründlich. Tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so muss er eben diese herkömmliche Elementarmathematik

[8] *Anm. des Autors:* Es wird angemerkt, dass die Ausführungen zum Problem der doppelten Diskontinuität und dem Schnittstellenkonzept von Thomas Bauer bereits Bestandteil der Bachelorarbeit von Hoffmann (2014, S. 10 ff.) waren. Aus Gründen der Vollständigkeit des theoretischen Hintergrunds sind diese Themen auch Bestandteil der vorliegenden Arbeit. Teilweise wurden Abschnitte wörtlich übernommen.

[9] *Anm. des Autors:* Teilweise hat Bauer mit anderen Forschern zusammengearbeitet. Wenn also von der 'Theorie von Bauer' die Rede ist, sind die jeweiligen Kollegen selbstverständlich mit gemeint.

> schulmäßig unterrichten, und da er diese Aufgabe kaum selbstständig mit der Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so nimmt er bald die althergebrachte Unterrichtstradition auf, und das Hochschulstudium bleibt ihm nur eine mehr oder minder angenehme Erinnerung, die auf seinen Unterricht keinen Einfluss hat.
>
> Diese doppelte Diskontinuität, die gewiss weder der Schule, noch der Universität jemals Vorteil brachte, bemüht man sich nun neuerdings endlich aus der Welt zu schaffen [...]" (Klein, 1908, S. 1 f.) (Hervorhebung im Originaltext)

Das hier vorkommende Schlagwort der *doppelten Diskontinuität* thematisiert eine Problematik, die auch heute, 108 Jahre später, immer noch aktuell ist. Diese Einschätzung findet sich in vielen einschlägigen Texten; unter anderem Hefendehl-Hebeker (2013, S. 1 f.), Danckwerts (2013, S. 78) und Bauer und Partheil (2009, S. 86) beginnen ihre Aufsätze mit einer Unterstreichung der Relevanz der doppelten Diskontinuität in der deutschen Lehrerausbildung. Danckwerts (2013, S. 78) kennzeichnet die universitäre Ausbildung der angehenden Gymnasiallehrkräfte als einen „anerkannt kritische[n] Punkt" und fordert eine Weiterentwicklung von „Kleins Grundgedanken einer 'Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus'".

Danckwerts zeigt hierfür zwei Wege auf: Auf der einen Seite steht der Weg von Klein, mit dem Ziel die Schulmathematik nachträglich nach „umfassende[n] hochschulmathematische[n] Erfahrungen" mit den gerlernten Fachinhalten zu verknüpfen. Der alternative Weg ist, schon früh im Studium Aspekte der Schulmathematik als Anknüpfungspunkte auf verschiedenen Ebenen für die Betrachtung von Hochschulmathematik zu verwenden und diese auszuschärfen. Dieser zweite Weg wird von Danckwerts präferiert. (Danckwerts, 2013, S. 78)

Bauer und Partheil (2009, S. 86 f.) verfeinern den Begriff der doppelten Diskontinuität und differenzieren die Kluft zwischen Schul- und Universitätsmathematik in die folgenden drei Ebenen. Auf der *Inhaltsebene* werden in Schule und Universität sehr unterschiedliche Schwerpunkte gesetzt. Die Autoren geben als Beispiel den Bereich der Geometrie an und ordnen der Schule die Themen Elementargeometrie und Analytische Geometrie zu; im Gegensatz dazu spielen an den Universitäten die Gebiete Algebraische Geometrie und Differentialgeometrie eine deutlich größere Rolle.

Auf der *Ebene der Ziele* besteht die Kluft darin, dass selbst identische Inhalte mit „im jeweiligen Kontext sehr berechtigten", jedoch komplett unterschiedlichen Zielen behandelt werden. Als dritter Punkt wird die *Argumentationsebene* benannt. Hier stehen dem axiomatisch-deduktiven Aufbau der Hochschulmathematik eine Vielzahl von unterschiedlichen, in der Schule parallel verwendeten, Exaktheitsstufen entgegen. (Bauer & Partheil, 2009, S. 86 f.)

Die Autoren leiten hieraus, als mögliche Folge für die Ausbildung, eine Sicht auf Fachmathematik und Fachdidaktik als „scharf getrennte Studienanteile" mit unterschiedlichen Zielsetzungen ab (Bauer & Partheil, 2009, S. 87 f.). Auch Hefendehl-Hebeker (2013, S. 4 f.) stellt Ähnliches fest.

Als eine Möglichkeit den Diskontinuitäten auf den verschiedenen Ebenen entgegen wirken zu können, beschreiben Bauer und Partheil die Konzeption von Schnittstellenmodulen, in denen fachdidaktische und fachwissenschaftliche Inhalte gleichzeitig behandelt werden, und präzisieren dies am Beispiel einer Analysis I - Veranstaltung. Ein Teil dieser Veranstaltung sind spezielle Schnittstellenaufgaben für Studierende des gymnasialen Lehramts. (Bauer & Partheil, 2009, S. 88 ff.)

2.4.2 Schnittstellenaktivitäten

Bauer (2013, S. 40) stellt fest, dass „sich die gewünschten Bezüge [zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik] bei der Mehrzahl der Studierenden nicht automatisch einstellen.“ Es sei notwendig „sie durch gezielte *Schnittstellenaktivitäten* herzustellen“. Ein wesentlicher Aspekt dieser sind sogenannte Schnittstellenaufgaben. Diese seien zwar nicht die einzige Möglichkeit, ließen sich aber gut mit den „'Bordmitteln' eines üblichen Mathematikfachbereiches [. . .] realisieren.“ (Bauer, 2013, S. 40) Als Schnittstellenaktivitäten auf einer höheren Ebene stellen Bauer und Partheil (2009) ein sogenanntes *Schnittstellenmodul* vor. Diese Konzepte werden im Folgenden angesprochen.

Schnittstellenaufgaben nach Bauer

In Bauer (2013) werden zur Erstellung von Schnittstellenaufgaben notwendige Überlegungen theoretischer Art vorgestellt.

Schnittstellenaufgaben können auf der einen Seite schulmathematisches Wissen als Ausgangspunkt nehmen, um einen Zugang zu fachmathematischen Inhalten zu bekommen. Auf der anderen Seite kann aber auch die universitäre Mathematik dazu dienen, schulmathematische Themen, die ein Lehramtsstudierender später unterrichten wird, fachmathematisch zu untermauern. Somit kann das tiefe Verständnis, das für eine didaktische Reduktion eines Themas notwendig ist, erworben werden. Bauer definiert hieraus zwei *Wirkrichtungen* von Schnittstellenaufgaben. Diese Wirkrichtungen spiegeln genau die von Klein definierten zwei Diskontinuitäten (S. 26) wieder.

1. Wirkrichtung: Schulmathematik $\Rightarrow$ universitäre Mathematik

2. Wirkrichtung: universitäre Mathematik $\Rightarrow$ Schulmathematik

Ziel soll es sein, dass Schulmathematik und Hochschulmathematik als „*füreinander nützlich* und *aufeinander bezogen* erlebt werden“ (Bauer, 2013, S. 41, Hervorhebung im Originaltext).

Um die Bezüge zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik einordnen und konkretisieren zu können, werden ferner vier *Kategorien* für Schnittstellenaufgaben eingeführt, die jedoch keineswegs disjunkt sind. (vgl. Bauer, 2013, S. 41)

(A) Grundvorstellungen aufbauen und festigen

(B) Unterschiedliche Zugänge verstehen und analysieren

(C) Mit hochschulmathematischen Werkzeugen Fragestellungen der Schulmathematik vertieft verstehen

(D) Mathematische Arbeitsweisen üben und reflektieren

Eine genauere Erläuterung der Kategorien findet man bei Hoffmann (2014, S. 12 f.). Ein entsprechender Auszug befindet sich auch im Anhang A.2.

Auf Basis erster praktischer Erfahrungen vermutet Bauer (2012, S 12 ff.) folgende positive Wirkungen von Schnittstellenaufgaben:

- Überwindung der „Kluft“ zwischen Schul- und Hochschulmathematik

- Nutzbarmachung von Bezügen zwischen Schul- und Hochschulmathematik
- Unterstützung beim Erwerb der fachmathematischen Inhalte an der Hochschule
- Anregung, „Bezüge zur Schulmathematik gezielt zu bearbeiten"

Schnittstellenaufgaben in der Praxis

In seinem Buch *Analysis – Arbeitsbuch* (Bauer, 2012) stellt Bauer verschiedene Schnittstellenaufgaben aus dem Bereich der Analyis vor, die nach dem obigen Konzept entwickelt wurden. Dabei wird zu Beginn jeder Aufgabe definiert, was zum Bearbeiten der Aufgaben bekannt sein sollte und was durch die entsprechende Aufgabe gelernt werden kann. Nach einem kommentierten Lösungsvorschlag finden sich zum Ende einer Aufgabe immer Vorschläge für Anknüpfungspunkte an diese. (vgl. Bauer, 2012, S. 4 f.)

Bauer und Partheil beschreiben als Erfahrung aus dem Sommersemester 2006, dass das Konzept von Schnittstellenmodulen bei ca. Zweidrittel der Studierenden sehr positiv aufgenommen wurde; „der Rest fühlte sich bei einem Teil der Aufgaben überfordert" (Bauer & Partheil, 2009, S.99). Die Überforderung führen die Autoren zum Teil auf eine „[n]och fehlende fachliche Souveränität", sowie eine „[n]och nicht erfolgte Loslösung von der Schülerrolle" zurück. (ebd.)

Ferner wird festgestellt, dass die langfristigen Wirkungen[10] empirisch schwer untersuchbar seien, subjektiv jedoch ein „deutlich positiver Effekt" zu bemerken ist. (vgl (Bauer & Partheil, 2009, S.100))

Auch an der Universität Paderborn wurden bereits Schnittstellenaufgaben in einer Lehramtsanfängerveranstaltung angewandt (Hilgert, Hoffmann & Panse, 2015b, 2015a) und teilweise unter Verwendung der Theorie Bauers von Hoffmann (2014) näher analysiert.

Schnittstellenmodule nach Bauer

Bauer und Partheil (2009) beschreiben, wie eine Änderung des hessischen Lehrerausbildungsgesetzes die institutionellen Rahmenbedingungen für die Einführung sogenannter *Schnittstellenmodule* schaffen konnte. An der Philipps-Universität Marburg wurde damit in der Lehramtsprüfungsordnung die folgende inhaltliche Zielsetzung verbunden:

> „Pflicht- und Wahlpflichtmodule können als Schnittstellenmodule zwischen den Studienanteilen der universitären Ausbildung [. . .] durchgeführt werden, insbesondere mit dem Ziel der Verknüpfung fachlicher und berufspraktischer Kompetenzen" zitiert nach Bauer und Partheil (2009, S. 90)

So ein *Schnittstellenmodul* wurde dann im Rahmen der Analysis-Ausbildung der Lehramtsstudierenden explizit umgesetzt. Im Folgenden werden die wesentlichen Merkmale vorgestellt. Die Details findet man bei Bauer und Partheil (2009).

In den Ausführungen von Bauer und Partheil (2009, S. 90 f.) lassen sich die folgenden Ziele des Schnittstellenmoduls identifizieren. Diese sind in der Referenz auf den fachmathematischen Schwerpung „Analysis" formuliert, werden aber an dieser Stelle zu thematisch unabhängigen Zielen abstrahiert:

[10]Teile der oben aufgeführten vermuteten positiven Wirkungen sind jedoch langfristig.

- Verbindung zwischen Schulmathematik und Hochschulmathematik herstellen
- Verbindung zwischen fachdidaktischen Fragestellungen werden im Kontext eines fachlichen Hintergrunds betrachtet

Die Wirkungsweise wird wie folgt beschrieben:

- Schulbezug als Anlass zur Reflexion
- Schulbezug als Ausgangspunkt zur Vertiefung
- Motivationsförderung durch Schulbezug
- „günstige Wechselwirkung“ zwischen Fachinhalten und didaktischer Reflexion

Außerdem wurde durch verschiedene organisatorische Maßnahmen dafür Sorge getragen, dass die Lehramststudierenden tatsächlich einen fachdidaktischen Anteil von 50% in dem Modul hatten (Bauer & Partheil, 2009, S. 92).

Schnittstellenaktivitäten für universitär extracurriculare Inhalte

Eine weitere Art von Schnittstellenaktivität stellen Bauer et al. (2016) für Inhalte der Schulmathematik vor, die im Lehramtsstudium typischerweise gar nicht behandelt werden, da sie thematisch in Veranstaltungen liegen, die für dieses Studium nicht vorgesehen sind. Als Beispiel nennen die Autoren den Krümmungsbegriff. Dieser taucht natürlicherweise in der zumeist optionalen Differentialgeometrie zum ersten Mal auf. (Bauer et al., 2016, S. 484 f.)

Die Autoren stellen unterschiedliche Zugänge vor, die alle zum Ziel haben, auf unterschiedlichen Ebenen adäquate Grundvorstellungen zum Krümmungsbegriff zu erzeugen. Dabei berufen Sie sich auf die bereits oben erwähnte These von Bruner (1977) bezüglich der Zugänglichkeit auf jedem Niveau. Solche Zugänge stellen ebenfalls Schnittstellenaktivitäten dar. (Bauer et al., 2016, S. 485)

2.4.3 Aufgaben für den Erwerb mathematischen Unterrichtswissens

Unabhängig von den Arbeiten von Bauer hat sich auch die Forschgergruppe um Ball und Bass mit der Frage beschäftigt, wie eine speziell für angehende Mathematiklehrkräfte angepasste Instruktion an der Universität aussehen kann. Dazu werden im Folgenden Aufgaben vorgestellt, die auf dem bereits auf den Seiten 16 ff. vorgestellen Konzept des *Mathematical knowledge for teaching* (MKT) fußen. Anschließend werden diese in Bezug zu den vorher vorgestellen Schnittstellenaufgaben von Bauer gesetzt.

MKT-Tasks

Im letzten Abschnitt wurde das Modell des MKT näher beschrieben. Durch die Identifizierung und Beschreibung von Kategorien mathematischen Unterrichtswissens beantwortet sich aber noch nicht die Frage, auf welche Art und Weise dieses gezielt erworben werden kann. Suzuka et al. (2009, S. 10) stellen spezielle Aufgaben – sogenannte *MKT-Tasks* vor, die eine Erkundung und Erarbeitung von

MKT erleichtern. Beispiele für MKT-Tasks findet man bei Suzuka et al. (2009, S. 11). Die Autoren definieren außerdem spezielle Eigenschaften, die diese Art von Aufgaben auszeichnen:

„

[1.] Creates opportunites to unpack, make explicit, and develop a flexible understanding of mathematical ideas that are central to the school curriculum

[2.] Provokes a stumble due to a superficial „understanding" of an idea

[3.] Opens opportunities to build connections among mathematical ideas

[4.] Lends itself to alternative/multiple representations and solution methods

[5.] Provides opportunities to engage in mathematical practices central to teaching (e. g., explainig, representing, using mathematical language, analyzing equivalences, proving, analyzing proofs, posing questions)

(Suzuka et al., 2009, S. 12 f.) "

Man erkennt deutlich die Bezüge zu dem oben vorgestellten Konzept des *specialized content knowledge*. Es wird direkt auf die Art mathematischer Probleme abgezielt, die eine Lehrkraft während des Mathematik-Unterrichtens benötigt. Suzuka et al. (2009, S. 17 f.) beschreiben insbesondere die Verdeutlichung des Zusammenhangs einer Aufgabe zum Mathematikunterricht als essentiellen Bestandteil des Einsatzes von MKT-Tasks und nennen die stetige Fokussierung auf mathematisches Unterrichtswissen (im Gegensatz zu einem Abschweifen zu rein mathematischen oder rein didaktischen Diskussionen) für einen wichtigen Faktor für die Wirksamkeit der Aufgabenformate.

Verbindung zu dem Konzept der Schnittstellenaufgaben von Bauer

Offensichtlich ähnelt der Ansatz dem oben vorgestellten Konzept von Bauer. Tatsächlich lassen sich die Kategorien von Bauer (vgl. S. 27) in den beschriebenen Eigenschaften 1. bis 5. wiederfinden: Der Kerngedanke von Kategorie (A) (Grundvorstellungen aufbauen und festigen) lässt sich in 1., 2. und 3. identifizieren. (B) (Unterschiedliche Zugänge verstehen und analysieren) ist Bestandteil von 3. und 4. Die Nutzung hochschulmathematischer Werkzeuge, um Fragen der Schulmathematik vertieft verstehen zu können (C), kann man 1. und 5. zuordnen und das Üben und Reflektieren mathematischer Arbeitsweisen (D) ist ebenfalls mit Punkt 5. verbunden.

Ein Unterschied besteht im konzeptionellen Ausgangspunkt der Ansätze. Während Suzuka et al. (2009) explizit den Erwerb von MKT in den Fokus setzen, legt das von Bauer und Partheil (2009) beschriebene Konzept der beiden Wirkrichtungen zwischen Hochschul- und Schulmathematik weniger den Fokus auf professionelles Agieren im Mathematikunterricht. Dafür kommt jedoch der Nützlichkeit von schulmathematischem Vorwissen für den Erwerb hochschulmathematischer Fähigkeiten eine größere Bedeutung zu. Dabei muss beachtet werden, dass sich das amerikanische Forschungsprojekt explizit auf Grundschullehrkäfte bezieht. Dadurch ist die Komplexität der fachmathematischen Ausbildung im Vergleich zur deutschen Sekundarstufen-II-Ausbildung vermutlich geringer.

2.4.4 Einordnung in das Konzept dieser Arbeit

In diesem Abschnitt wurden die Schnittstellenproblematik und ausgewählte damit verbundene Lösungsansätze vorgestellt. Natürlich gibt es, neben den hier vorgestellten Theorien, viele weitere

Projekte, die sich explizit mit der doppelten Diskontinuität und daraus resultierenden bzw. damit verbundenen Fragestellungen beschäftigten. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird jedoch deutlich werden, dass gerade die hier vorgestellten Ansätze äußerest gewinnbringend für die theoretische Konzeption von Schnittstellenmodulen sind. Aufbauend auf dem Konzept der Schnittstellenaktivitäten wird eine eigene Art von Schnittstellenaktivität beschrieben werden. Diese unterscheidet sich in einigen Punkten von der Zielsetzung der vorgestellten Schnittstellenmodule. Die durch die Schnittstellenaufgaben und MKT-Tasks bereitgestellten Wirkkategorien werden sich als nützlicher Ausgangspunkt für die Beschreibung der Wirksamkeit der betrachteten Innovationen erweisen.

2.5 Zusammenfassendes

Im Rahmen dieses Kapitels wurde ein breites theoretisches Fundament gelegt, auf dem im nächsten Kapitel eine eigene theoretische Konzeption aufgebaut wird. Wie bereits erwähnt, wird es dabei um Innovationen im Bereich der fachmathematischen Ausbildung von Lehramtsstudierenden gehen. Die vorgestellte Theorie wird sich als grundlegend für die Begründung der Notwendigkeit einer solchen Innovation, die Festlegung einer begrifflichen Basis und insbesondere für den Aufbau auf anschlussfähige, bereits existierende Theorien erweisen. Dementsprechende Ansätze wurden am Ende der Unterabschnitte jeweils schon thematisiert.

Anzumerken ist, dass hier nicht auf die „Einstellung“ von Lehrkräften zur Fachmathematik eingegangen wird. Dies ist unzweifelhaft ein wichtiges und aktuelles Thema, wenn man sich mit der Ausbildung von Mathematiklehrkräften beschäftigt, es würde jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Nichtsdestotrotz wird an entsprechenden Punkten der Arbeit auf Anknüpfungspunkte zu dieser Thematik verwiesen. Dabei werden auch Vorschläge aufgezeigt, wie man einstellungsbezogene Aspekte im Rahmen einer größeren theoretischen Fundierung miteinbeziehen könnte. Die Entscheidung, genau diesen Bereich im Rahmen dieser Arbeit auszulassen, geht konform mit der Maxime Schnittstellenaktivitäten zunächst von einer inhaltlichen Seite zu betrachten.

Kapitel 3

Fachmathematische Schnittstellenmodule

In diesem Kapitel soll nun, basierend auf dem theoretischen Fundament aus Kapitel 2, ein Konzept für sogenannte *Fachmathematische Schnittstellenmodule* (MIU[1]) entwickelt werden. Dazu wird in Abschnitt 3.1.1 zunächst aus der Beschreibung eines Problems in der universitären Lehramtsausbildung auf die Notwendigkeit der Konzeption von MIUs geschlossen. Ein dementsprechendes Konzept wird anschließend im restlichen Teil des Kapitels im Detail vorgestellt.

3.1 Forschungsgrundlagen

3.1.1 Problemaufwurf

Wie bereits in Unterabschnitt 2.1.1 erwähnt, definiert das LABG die *selbstständige Ausübung* des Lehramtes als Ziel der Lehramtsausbildung. Wie Ball und Bass (2002) für den amerikanischen Grundschulbereich empirisch belegt haben, bedeutet dies im Fall des Faches Mathematik insbesondere ein ständiges mathematisches Problemlösen in verschiedenen Unterrichtssituationen. Damit verbunden ist das Vorhandensein von *specialized content knowledge* (SCK) und *horizon content knowledge* (HCK). Diese unterscheiden sich sowohl von typischer Fachmathematik als auch von typisch fachdidaktischen Inhalten. Die im COACTIV-Projekt empirisch fundierte Unterteilung in genau diese beiden Kategorien steht hierzu nicht im Widerspruch, da dort die Ideen hinter SCK und HCK ebenfalls vorkommen, jedoch unter dem fachdidaktischen Wissen eingeordnet werden. Anzumerken ist noch, dass es keinen Grund gibt, der gegen eine Verallgemeinerung der Wissenskonzepte auf Gymnasiallehrkräfte spricht: Das dort notwendige Fachwissen ist naturgemäß eher größer.

Da SCK und HCK deutliche fachmathematische Bezugspunkte aufweisen, muss es als sinnvoll angesehen werden, entsprechende Lerngelegenheiten (unter anderem) im universitären Teil der Lehramtsausbildung anzusiedeln. Betrachtet man nun die einschlägigen Prüfungsordnungen der Universität Paderborn (vgl. 2.1.2), so findet man dort in den allgemeinen Bestimmungen, dass der Fachdidaktik eine „Integrationsfunktion“ für die fachwissenschaftlichen Inhalte zugeordnet wird.

[1]eng.: *mathematical interface unit*

In den besonderen Bestimmungen (insbesondere für den Master) wird explizit die Anschlussfähigkeit des fachmathematischen Wissens für die Ausübung des Lehramtes sowie eine dementsprechende Analyse fachwissenschaftlicher Inhalte gefordert. Es wird deutlich, dass zwar grundsätzlich die Verknüpfung von fachmathematischem Wissen mit mathematikdidaktischem Wissen erwähnt, jedoch nicht im Sinne des obigen SCK expliziert wird. Die Idee des HCK erkennt man in den Konzepten des Orientierungswissens und des Metawissens.

Analysiert man weitergehend die Modulbeschreibungen in den Prüfungsordnungen – in diesen manifestiert sich schließlich der Kompetenzerwerb –, so wird im Bereich der fachmathematischen Module an keiner Stelle ein Schulbezug (in welcher Form auch immer) erwähnt.

In den fachdidaktischen Veranstaltungen wird die kritische Analyse von Fachinhalten explizit als Schlüsselkompetenz ausgewiesen. Dabei wird jedoch nicht deutlich, ob sich die Fachinhalte auf den Bereich der Schulmathematik oder den Bereich der Hochschulmathematik beziehen. In den fachlichen Kompetenzen findet man in Bezug auf mathematische Inhalte vor allem die Forderung nach Kenntnissen über wesentliche Begriffe und deren Genese in den jeweiligen Teilgebieten. Die anderen fachlichen Kompetenzen beschäftigen sich weitestgehend mit dem, was die Gruppe um Ball im Bereich des PCK klassifizieren. Die mathematischen Inhalte definieren sich im Wesentlichen durch die schulischen Curricula.

Man kann und muss konstatieren, dass an keiner Stelle in den Modulhandbüchern der Universität Paderborn auf den Nutzen von hochschulmathematischen Inhalten für die spätere Unterrichtstätigkeit explizit eingegangen wird. Dieses kann auch nicht allein durch die erwähnten Punkte in den fachdidaktischen Veranstaltungen gewährleistet werden, da in diesen vor allen Dingen *knowledge of content, students and teaching* erworben werden soll und muss.

Zusammengefasst gibt es im Bereich der mathematikbezogenen Gymnasiallehrerausbildung der Universität Paderborn zwei Arten von Modulen (und damit effektiv auch von Veranstaltungen), die im Wesentlichen unverbunden voneinander existieren und auch in den Prüfungsordnungen unterschieden werden: *Fachmathematische Module* und *Mathematikdidaktische Module*. Verbindet man diese mit den Wissenskategorien der Gruppe um Ball und Bass (vgl. S. 16 f.), so findet man in der ersten Art das mathematische Fachwissen (CCK) und etwas HCK und in der zweiten Art – wie bereits beschrieben – *knowledge of content, students and teaching* (KCS, KCT). Dies ist in Abbildung 3.1 visualisiert, in der beiden Typen von Modulen jeweils die Art der mathematischen Inhalte (siehe die Unterscheidung von Bauer (vgl. S 27)) sowie die vorrangig geförderten Wissenskategorien zugeordnet werden.

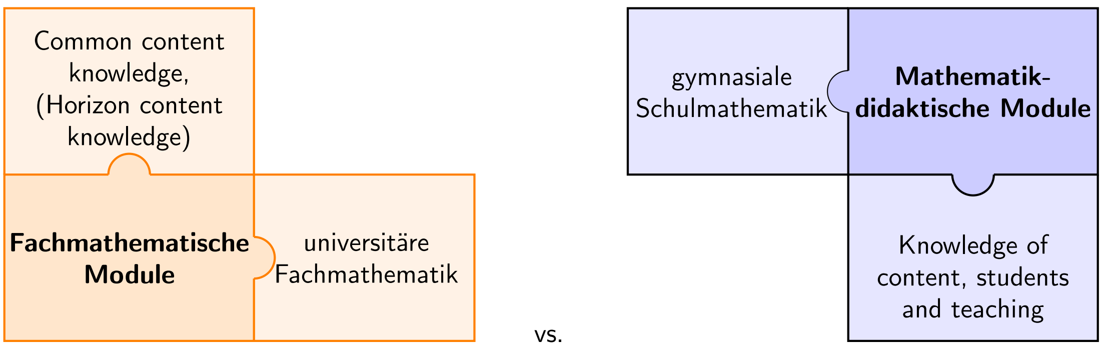


Abbildung 3.1: Kategorien von Modulen in der mathematikbezogenen Gymnasiallehrerausbildung an der Universität Paderborn

Durch die obige Analyse wird deutlich, dass Lehramtsstudierende Gefahr laufen, erworbenes fachmathematisches Wissen nicht handlungswirksam für die späteren Unterrichtstätigkeiten einsetzen zu können. In diesem Fall liegt dann *träges Wissen* im Sinne von 2.2.1 vor. Diese Problematik entspricht ebenfalls einer der zwei von Klein beschriebenen Diskontinuitäten (vgl. S. 26). Geht man von der plausiblen Annahme aus, dass das fachmathematische Wissen positiven Einfluss auf den späteren Unterricht hat, so muss man im Sinne einer kompetenzorientieren Lehr-/Lerngestaltung (vgl. S. 12) Lehr-/Lernsituationen schaffen, die ebendiesen Transfer als intendiertes Lernergebnis in den Fokus nehmen. Daraus ergibt sich die folgende grundlegende Fragestellung:

(A) Forschungsfrage
Wie können Lehr-/Lernsituationen im Rahmen des gymnasialen Mathematiklehramtsstudiums so gestaltet werden, dass sie den Erwerb anschlussfähiger fachmathematischer Inhalte unterstützen? „Anschlussfähig“ heißt in diesem Fall die gewinnbringende Nutzbarkeit für den Erwerb weiterer professionsbezogener Kompetenzen sowie für den späteren Berufsalltag.

3.1.2 Forschungsdesign

Mit dem Ziel der Beantwortung der oben definierten Forschungsfrage sollen im Folgenden vier Schritte unternommen werden:

(1) Zunächst wird, basierend auf dem theoretischen Fundament aus Kapitel 2, das Konzept von sogenannten *fachmathematischen Schnittstellenmodulen* (MIU) entwickelt. Die Vermutung ist, dass diese Module Lehr-/Lerngelegenheiten im Sinne der Forschungsfrage sind.

(2) Für die Überprüfung der in (1) aufgestellten Vermutung werden in Kapitel 4 Teile eines fachmathematischen Schnittstellenmoduls am Beispiel ausgewählter Inhalte der höheren Analysis im Sinne des Konzeptes aus (1) entwickelt.

(3) In Kapitel 5 wird der Entwicklungsprozess kritisch reflektiert und ein Fazit sowohl auf das Konzept fachmathematischer Schnittstellenmodule im Speziellen als auch auf die Forschungsfrage im Allgemeinen gezogen.

(4) Abschließend wird ein Ausblick auf sich anschließende Fragestellungen gegeben.

Dabei wird Kapitel 2 in all diesen Schritten die zentrale theoretische Grundlage und damit Hauptreferenz für wesentliche Argumentationen sein.

3.2 Theoriegeleitete Entwicklung des Konzepts fachmathematischer Schnittstellenmodule

In diesem Abschnitt soll nun ein Lehr-/Lernkonzept vorgestellt werden, das den Anspruch hat, den Erwerb anschlussfähigen mathematischen Fachwissens in der universitären Gymnasiallehrerausbildung zu unterstützen. Dazu soll zunächst ein Modell für die Beschreibung professionellen fachbezogenen Wissens von Mathematiklehrkräften vorgestellt werden, das explizit die Verknüpfung unterschiedlicher Wissensbereiche als eigene Komponente von Lehrerkompetenz betrachtet.

3.2.1 Schnittstellen in der universitären Mathematiklehramtsausbildung

Das Schnittstellen-Tetraeder

Nutzt man die Kategorien mathematischen Unterrichtswissens (vgl. S. 16 ff.) und setzt sie in Verbindung mit dem Schnittstellenkonzept von Bauer (vgl. 2.4.2), so erhält man ein Modell der Schnittstellen in der universitären Mathematiklehramtsausbildung, mit dessen Hilfe der Bezug von Schnittstellen zu den angesprochenen Wissenskategorien beschreibar und somit kategorisierbar ist. Dieses wird im Folgenden als das *Schnittstellen-Tetraeder* bezeichnet (siehe Abbildung 3.2).

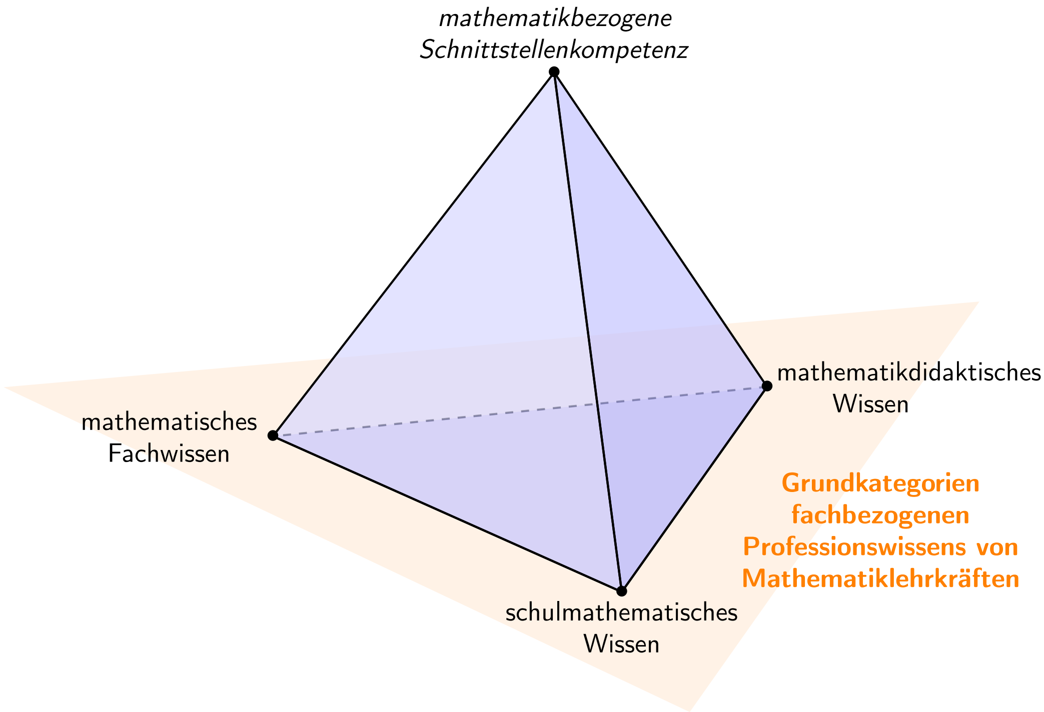


Abbildung 3.2: Das Schnittstellen-Tetraeder

Im Schnittstellentetraeder werden die folgenden drei *Grundkategorien* fachbezogenen Professionswissens von Mathematiklehrkräften unterschieden: *mathematisches Fachwissen*, *schulmathematisches Wissen* und *mathematikdidaktisches Wissen*. Die drei Grundkategorien werden durch die *mathematikbezogene Schnittstellenkompetenz* miteinander verbunden und vernetzt.

Die Kategorien sind konzeptionell als *Kompetenzbereiche* des *professionellen Wissens* im Sinne des Kompetenzmodells von COACTIV (vgl. Abbildung 2.2) zu sehen und umfassen jeweils Fähigkeiten und Fertigkeiten.

In der Darstellung meint *mathematisches Fachwissen* mathematische Inhalte und Methoden im Sinne des CCK. Dieses wird im Studium in fachwissenschaftlichen Vorlesungen und Seminaren erworben. Unter das *mathematikdidaktische Wissen* fallen die Theorien, Modelle und andere Konzeptionen aus den Bereichen KCS, KCT (und dem *knowledge of content and curriculum*), wie sie typischerweise in mathematikdidaktischen Veranstaltungen (wie oben beschrieben) unterrichtet werden.

Es gibt keine allgemein anerkannte Definition, was genau unter *schulmathematischem Wissen* zu verstehen ist. An dieser Stelle soll dieser Aspekt nach dem Grundsatz *Schulmathematik ist das, was der Lehrplan vorgibt*, definiert werden. Es geht also um die inhaltlichen und prozessbezogenen Kompetenzfacetten, die zu einem bestimmten Zeitpunkt in den Kernlehrplänen festgelegt sind. Für die Lehramtsausbildung müssen dabei drei unterschiedliche Zeitpunkte betrachtet werden:

(1) Die eigene Schulzeit eines Lehramtsstudierenden legt das Verständnis von Schulmathematik zu Beginn des Studiums fest. Im Folgenden wird dieses als die *individuelle* Komponente schulmathematischen Wissens bezeichnet.

(2) Der während des Studiums gültige Lehrplan legt die *aktuelle* Komponente schulmathematischen Wissens fest.

(3) Die *zukünftige* Komponente schulmathematischen Wissens beschreibt die Schulmathematik, die während des späteren Lehrerberufs aktuell sein wird.

Die drei bis hierher vorgestellten Kategorien stellen in einem gewissen Sinne die klassischen mathematikbezogenen professionellen Wissensbereiche dar, wie sie sich auch in der Organisationsstruktur der Ausbildung von Mathematiklehrkräften widerspiegeln: Das schulmathematische Wissen (zumindest die individuelle Komponente) haben die Studierenden während ihrer Schulzeit erworben, für das mathematische Fachwissen und das mathematikdidaktische Wissen gibt es, wie bereits vorgestellt, entsprechende universitäre Module.

Mit *mathematikbezogener Schnittstellenkompetenz* (MSK[2]) sind nun Fähigkeiten und Fertigkeiten gemeint, die die drei Grundkategorien zur Lösung professionsbezogener Probleme gewinnbringend miteinander verknüpfen. Dabei kann die Art der Verknüpfung unterschiedlich sein.

Ein Teil von MSK ist das SCK. Dort wird Fachmathematik auf eine bestimmte Art und Weise verwendet, um Phänomene im Bereich der Schulmathematik zu reflektieren. Ein anderer Teilaspekt ist das HCK, da dort schulmathematische Inhalte mit Ausblicken in das mathematische Fachwissen verknüpft werden. Auch der Bereich der *Schulmathematik vom höheren Standpunkt* im Sinne von Felix Klein fällt in den Bereich des MSK. Diese Beispiele zeigen, dass das MSK ein notwendiger Bestandteil professioneller Lehrerkompetenz ist, der nicht automatisch durch die Grundkategorien abgedeckt wird. Es wird deutlich, dass MSK nicht als Gegenvorschlag zu etablierten lehramtsspezifischen Wissenskonzepten, sondern vielmehr als Oberkategorie zu sehen ist, die unterstreicht, dass alle diese Konzepte das grundlegende Ziel haben, die Verbindung zwischen den drei Grundkategorien fachbezogenen Professionswissens zu fassen.

Das hier beschriebene Modell fußt auf der Forschung von sowohl der Gruppe um Ball und Bass als auch des COACTIV-Projekts in dem Sinne, dass es die etablierten Grundkategorien beider Modelle aufnimmt und dann zwar der Idee eines berufspezifischen SCK folgt, dies aber nicht als disjunkt zu den anderen Kategorien und auch nicht als Teil der Fachdidaktik, sondern als verbindendes Element sieht. Dies entspricht den empirischen Ergebnissen beider Projekte insofern, als es keine eindeutige Abgrenzung gibt und die unterschiedlichen Grundkategorien einander bedingen.

Die definierten Kategorien fachbezogenen Professionswissens sind eine Umstrukturierung der vorgestellten etablierten Wissenskategorien aus 2.3.2 und repräsentieren somit ebenfalls „erlernbare kogninitive Fähigkeiten und Fertigkeiten zur Lösung professionsbezogener Probleme“, sind also tatsächlich Facetten von *Lehrerkompetenz* (vgl. S. 14).

An dieser Stelle muss erwähnt werden, dass im vorliegenden Modell nur der Wissensaspekt professioneller Kompetenz abgebildet wird. Da aber im Sinne einer ernsthaften Umsetzung der Kompe-

[2]engl.: *mathematical interface competence*

tenzorientierung auch die anderen Aspekte eine Rolle spielen müssen, wird auf die Förderung dieser später ebenfalls eingegangen. Die Lehr-/Lerneinheit wird von den Kategorien des Schnittstellen-Tetraeders her erstellt, aber unter dem Fokus der Förderung von Lehrerkompetenz (auch über Wissen hinaus) hin analysiert.

Diskussion zur Unterscheidung von *mathematischem Fachwissen* und *Schulmathematik*

An dieser Stelle ist es nötig auf die Unterscheidung zwischen den beiden Grundkategorien *mathematisches Fachwissen* und *Schulmathematik* einzugehen. Es gibt gute Gründe dafür Schulmathematik als eine (echte) Teilmenge von universitärer Fachmathematik zu sehen, da jeder Inhalt der Schulmathematik auch einen Platz in der Fachmathematik einnimmt. Im Rahmen des *Schnittstellen-Tetraeders* werden diese Kategorien jedoch als unterschiedlich gesehen. Dies hängt mit der Zielsetzung des Modells zusammen, nämlich der Beschreibung von Bereichen von Lehrerkompetenz. Der Stellenwert, den die Problematik der doppelten Diskontinuität aktuell in der Hochschuldidaktik-Mathematik einnimmt, macht deutlich, dass im Allgemeinen die Verknüpfung dieser beiden Kategorien mathematischen Wissens nicht automatisch zu gelingen scheint. Da die Konzeption von Lehr-/Lerneinheiten im Sinne der Forschungsfrage ((A), S. 35) genau diese Verknüpfung in den Fokus nimmt, ist es sinnvoll, die beiden Bereiche zu unterscheiden und die Verknüpfung als eigenen Bereich anzusehen. Diese Trennung ergibt sich genuin durch die Unterscheidung der Erwerbskontexte (Schule, Hochschule); so wurde das Schnittstellen-Tetraeder auch oben beschrieben.

Diese Unterscheidung geht außerdem konform mit den Beobachtungen von Bauer et al. (2016) die auf S. 29 beschrieben wurden: Es gibt Inhalte in der Schulmathematik (in dem Fall der Krümmungsbegriff), die in der fachmathematischen Lehramtsausbildung nicht vorkommen. Die von Bauer et al. (2016) beschriebenen Schnittstellenaktivitäten fördern für diesen Inhalt der Schulmathematik die mathematikbezogene Schnittstellenkompetenz.

Zur Wirkungsweise von *mathematikbezogener Schnittstellenkompetenz*

Wie aus den obigen Ausführungen deutlich wird, versucht das MSK-Konzept verschiedene andere Konzepte, wie die Arbeiten von Bauer, die Arbeiten der Gruppe um Ball und Bass und das COACTIV-Projekt, miteinander zu verbinden. Aus diesen Überlegungen ergibt sich eine (unvollständige) Liste von Teilaspekten die zum Aufbau von MSK gehören:

- Verknüpfung von Schulmathematik und Hochschulmathematik im Sinne der Kategorien (A)-(D) von Bauer (2013, S. 41) (vgl. S. 27). Die dort beschriebenen Wirkungsweisen von Schnittstellenaufgaben können auch auf andere Lehr-/Lernsituationen übertragen werden.
- Aufbau eines *specialized content knowledge* im Sinne von Ball und Bass (2002) (vgl. S. 16 ff.).
- Aufbau eines *horizon content knowledge* im Sinne von Ball et al. (2008) (vg. S. 18 ff.).

Hinzu kommen noch die offensichtliche Verbindung von Schulmathematik und Mathematikdidaktik. Selbst in dieser ersten unvollständigen Auflistung lassen sich zwei Arten von Wirkungen unterscheiden:

1. Verknüpfung der Grundkategorien untereinander. Eine Kategorie wird verwendet, um den Kompetenzerwerb in einer anderen Grundkategorie zu unterstützen.

Beispiel 1. Der Begriff der Äquivalenzrelation und der Wohldefiniertheit von Verknüpfungen auf Äquivalenzklassen (Fachmathematik) wird auf das Beispiel *Bruchrechnung* (Schulmathematik) angewandt.

Beispiel 2. Die Grundvorstellung „Ableiten als lineare Approximation" (Mathematikdidaktik), angewandt auf die normale Differenzierbarkeitsdefinition aus der Schule (Schulmathematik), wird explizit als Ausgangspunkt für die Entwicklung einer Definition zur mehrdimensionalen Differenzierbarkeit in Vektorräumen (Fachmathematik) verwendet.

2. Verknüpfung der Grundkategorien mit einer plausiblen Lehr-/Lernsituation im zukünftigen Berufsfeld. Dazu gehört insbesondere der Aufbau von SCK und HCK.

Beispiel 1. Das Wissen über die Darstellung von Hyperebenen und Halbräumen mit Hilfe eines Skalarprodukts (Fachmathematik) zusammen mit dem Wissen über die geometrische Interpretation des euklidischen Skalarprodukts in der Schule (Schulmathematik, Mathematikdidaktik) ermöglicht es, die Bedeutung des Skalarprodukts bei der Unterscheidung von zwei Seiten einer Ebene im $\mathbb{R}^3$ zu sehen. Dies stellt keine typische schulische Anwendung des Skalarproduktes dar, ist aber mit den Mitteln der SuS verstehbar und kann dabei helfen, die Vorstellung einer Ebene als „alle Ortsvektoren, die dieselbe orthogonale Projektion auf einen Vektor haben" (Mathematikdidaktik) zu festigen.

Beispiel 2. Grundlegendes Wissen über Galois-Theorie und den Zusammenhang zu geometrischen Konstruktionen (Fachmathematik) liefert HCK im Bezug auf die Frage nach der im Schulunterricht genuin auftauchenden Frage der Winkeldrittelung (im Themenbereich Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen).

Diese hier vorgestellte Kategorisierung der Wirkungsweisen von MSK ist als erster Arbeitsentwurf zu sehen, der auf den vorgestellten Forschungskonzepten beruht. Sie liefert einen ersten begründeten Anhaltspunkt und muss auf Dauer noch weiter ausdifferenziert werden.

Beschreibung der Schnittstellenproblematik mit Hilfe des *Schnittstellen-Tetraeders*

Das *Schnittstellen-Tetraeder* liefert nun die Möglichkeit, die die doppelte Diskontinuität betreffenden Schwierigkeiten (vgl. 2.4) unter Verwendung eines theoretisch fundierten Modells für das professionelle Lehrerwissen zu beschreiben. Daraus lassen sich strukturiert Implikationen für das Design von Lehr-/Lernkonzepten im Sinne der Forschungsfrage ((A), S. 35) aufstellen.

Transferiert man die in 3.1.1 durchgeführte Analyse der Modulhandbücher der Universität Paderborn auf das Schnittstellen-Tetraeder, so erhält man im Wesentlichen die in Abbildung 3.3 dargestellte Situation.

Das mathematikdidaktische Wissen wird (naturgemäß) unter Verwendung von schulmathematischem Wissen erworben. Implizit wird mathematisches Fachwissen in mathematikdidaktischen Veranstaltungen verwendet. Diese Verknüpfung wird jedoch nicht explizit als Lernergebnis definiert. Ebenso finden sich in den fachmathematischen Modulen keine intendierten Lernergebnisse, die explizit auf Bezüge zur Schulmathematik oder Didaktik der Mathematik zielen. Natürlich besteht naturgemäß ein inhaltlicher Zusammenhang zwischen Teilen der Schulmathematik und Teilen mathematischen Fachwissens und außerdem können im Rahmen der fachmathematischen Module schulmathematische Beispiele implizit als didaktisches Mittel eingesetzt werden. Dies obliegt dann aber der jeweiligen Lehrperson.

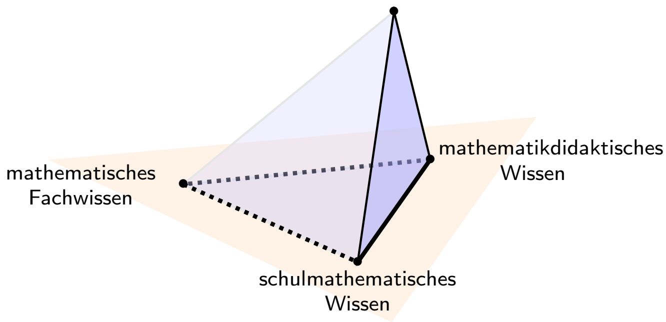


Abbildung 3.3: Momentane Situation im gymnasialen Mathematiklehramtsstudium an der Universität Paderborn

Die daraus entstehende Wissensstruktur beschränkt sich dann im extremsten Fall auf das blau eingefärbte Dreieck und den einzelnen Punkt des mathematischen Fachwissens. Schnittstellenkompetenz existiert im Grunde nur für die Verbindung von schulmathematischen und mathematikdidaktischem Wissen. Die Bereiche des SCK, HCK sowie der Schulmathematik vom höheren Standpunkt sind nicht existent. In Abbildung 3.3 wird dies dadurch dargestellt, das im Vergleich zu Abbildung 3.2 die obere Tetraederspitze (mathematikbezogene Schnittstellenkompetenz) zur Spitze des blauen Dreiecks verschoben wurde.[3] Damit wurde genau das Problem der doppelten Diskontinuität beschrieben.

Schnittstellenmodule: Definition

Das oben entwickelte Modell des *Schnittstellen-Tetraeders* und dessen Verwendung für die Beschreibung der der Forschungsfrage zu Grunde liegenden Problematik war die wesentliche Vorarbeit zur Definition der bereits erwähnten Schnittstellenmodule.

Betrachtet man die umstrukturierte Analysis-Vorlesung, wie sie Bauer und Partheil (2009) beschreiben (vgl. S. 28), so erkennt man eine Lehrveranstaltung, die versucht, alle drei Grundkategorien miteinander zu verbinden und damit MSK zu fördern. Somit ist es konsistent, die dort gewählte Bezeichnung weiter zu verwenden und folgendermaßen zu erweitern:

> Ein *Schnittstellenmodul* (engl. *interface unit*) wird definiert als eine Lehr-/Lerngelegenheit, die den Erwerb professioneller Lehrerkompetenz mit besonderem Fokus auf *mathematikbezogene Schnittstellenkompetenz* (MSK) fördert. Das bedeutet, dass bei der Entwicklung und Durchführung eines solchen Schnittstellenmoduls explizit dementsprechende intendierte Lernergebnisse beim Wissenserwerb und bei der Wissensüberprüfung in den Mittelpunkt gestellt werden.
>
> Bezieht sich die grundlegende Ausrichtung der Lehr-/Lerngelegenheit auf den Erwerb fachmathematischen Wissens, so wird sie als *fachmathematisches Schnittstellenmodul* (engl. *mathematical interface unit* (MIU)) bezeichnet.

[3] *Anm. der Autors:* Natürlich sieht die Situation in der Praxis nicht so schwarz aus, wie sie hier beschrieben steht. Das liegt dann aber an dem Engagement einzelner Lehrender. Im Sinne der Kompetenzorientierung sollte aber das, was später für die erfolgreiche Ausübung des Berufes benötigt wird, vorher auch explizit Teil der intendierten Lernergebnisse sein.

Anzumerken ist, dass an dieser Stelle der Begriff 'Modul' in einem weiteren Sinne verwendet wird als nur als Bezeichnung für eine universitäre Organisationseinheit im Studium. Ein *Schnittstellenmodul* im obigen Sinne kann z. B. auch Teil einer Vorlesung sein.

Analog kann man sich auch Schnittstellenmodule vorstellen, die an Lehr-/Lerngelegenheiten gekoppelt sind, die eine fachdidaktische oder schulmathematische Grundstruktur haben. Die Anknüpfung an fachmathematische bzw. fachdidaktische Veranstaltungen ist von einem praktischen Standpunkt her sinnvoll, da dies typische, bereits vorhandene, Veranstaltungsformate an der Universität sind.

3.2.2 Zur Konzeption fachmathematischer Schnittstellenmodule

Die restlichen Abschnitte dieser Arbeit werden sich – auf Grund der Forschungsfrage, in der es um den Erwerb anschlussfähigen fachmathematischen Wissens geht ((A), S. 35) – mit der praktischen Umsetzung von *fachmathematischen Schnittstellenmodulen* beschäftigen. Ziel des aktuellen Abschnitts soll es sein, Aspekte zu diskutieren, die es beim Entwurf solcher Module zu beachten gilt.

Kompetenzorientierte Gestaltung

Unter Brücksichtigung aktueller wissenschaftlicher und bildungspolitischer Strömungen (vgl. bspw. 2.2.1) soll die Gestaltung fachmathematischer Schnittstellenmodule (MIUs) Prinzipien der Kompetenzorientierung (wie in 2.2 beschrieben) umsetzen. Im Rahmen der hier vorliegenden Arbeit kann und soll nicht die detaillierte kompetenzorientierte Lehr-/Lerngestaltung im Fokus stehen. Zumindest aber werden entsprechende Gestaltungsgrundsätze, wie sie auf Seite 12 im Überblick, sowie weiterführend von Schaper (2012, S. 60 ff.), beschrieben werden, berücksichtigt. Vier dieser Zielvorstellungen sollen an dieser Stelle hervorgehoben werden

1. Gestaltung konsequent nach den zu erreichenden *Learning Outcomes*
2. Ausgestaltung von Lehr-/Lernsituationen basierend auf den Ergebnissen didaktischer Forschung
3. Rolle der Lernenden: aktiv und selbstbestimmt; Lehrende als Bereitsteller und Arrangeure von Lerngelegenheiten, sowie Begleiter und Berater der Lernenden
4. Kompetenzorientiertes Prüfen basierend auf den zu erreichenden *Learning Outcomes*

Als Grundvoraussetzung für die Umsetzung von 1. und 4. ist es nötig, die intendierten Lernergebnisse zu formulieren. Eine Möglichkeit hierfür ist die Verwendung einer Taxonomie, wie sie auf Seite 11 beschrieben ist. Die vorgegebene Struktur unterstützt die Kategorisierung von Lernzielen und bildet somit einen sinnvollen Ausgangspunkt für die Gestaltung von MIUs. Die so formulierten Lernziele können dann auch an die Studierenden weiter gegeben werden. Dies fördert die Transparenz der Prüfungsanforderungen.

Die Umsetzung von 2. erweist sich in der Praxis als schwieriger. Dazu bräuchte es deutlich mehr fachdidaktische Forschungsergebnisse zur Vermittlung einzelner Inhalte an der Universität, analog zu existierenden Theorien für die Schulmathematik. Dazu gehört beispielsweise die Identifizierung von Grundvorstellungen und Zugängen zu einzelnen fachmathematischen Inhalten.

Auch 3. liefert eine Forderung, zu der man vermutlich mehrere weitere Arbeiten schreiben könnte. An dieser Stelle konkurriert der streng deduktive Aufbau der Mathematik mit dem selbstbestimmten Lernen der Studierenden. Auch diese Problematik soll an dieser Stelle nur genannt und nicht allgemein ausdiskutiert werden. Trotzdem soll bei dem Entwurf von MIUs dieser Aspekt mitgedacht werden: Im Sinne einer stetigen Reflexion der Gestaltung von Lehr-/Lernprozessen sollen alle didaktischen Entscheidungen dahingehend hinterfragt werden, ob die intendierten Lernergebnisse auf sinnvolle Art und Weise auch mit mehr aktivem und selbstbestimmten Handeln von den Studierenden erreicht werden können. Wie diese Analyse in der Praxis aussieht ist von Fall zu Fall unterschiedlich. Ein wesentlicher Faktor ist an dieser Stelle die Expertise des Lehrenden.

Wichtig ist noch, dass die kompetenzorientierte Gestaltung kein Merkmal speziell von Schnittstellenmodulen ist, aber auch Schnittstellenmodule sollten kompetenzorientiert gestaltet werden. Trotzdem ergibt sich, wie oben beschrieben, die Notwendigkeit von Schnittstellenmodulen aus der Einnahme einer kompetenzorientierten Sichtweise auf den Erwerb von Lehrerprofessionalität.

Das Verhältnis von Fachmathematik, Schulmathematik und Mathematikdidaktik

Im Rahmen eines *fachmathematischen Schnittstellenmoduls* geht es nach Definition um die Förderung von *mathematikbezogener Schnittstellenkompetenz* im Rahmen einer Lehr-/Lerngelegenheit, die grundsätzlich auf den Erwerb fachmathematischen Wissens abzielt. Damit nimmt das *mathematische Fachwissen* unter den drei *Grundkategorien fachbezogenen Professionswissens* eine besondere Rolle ein, da es einen inhaltlichen Rahmen vorgibt. Mit diesem fachmathematischen Themenfeld verknüpft sind schulmathematische und mathematikdidaktische Themenfelder.

> *Beispiel 1.* Fachmathematisch werden Sigma-Algebren und Maße als Vorbereitung für die Lebesque-Integration in mehreren Variablen eingeführt. Ein damit zusammenhängendes Themenfeld ist die Wahrscheinlichkeitstheorie in der Schulmathematik: Die grundlegenden Ideen lassen sich bei der Arbeit mit Ereignisräumen wieder finden.

> *Beispiel 2.* Fachmathematisch geht es um Metriken, Normen und Skalarprodukte. Am Beispiel des euklidischen Abstandsbegriffs (Pythagoras, Betrag eines Vektors) lassen sich die Zusammenhänge zwischen diesen Begriffen erkennen.

Auf Seite 38 f. wurden zwei grundlegende Wirkungsweisen von MSK aufgezeigt. Diese können zu einer ersten Analyse der Verknüpfung benutzt werden. Dazu muss untersucht werden, ob und wie die identifizierten Verknüpfungen den beiden Wirkungsweisen zugeordnet werden können.

An dieser Stelle muss angemerkt werden, dass diese Analysen, damit sie sinnvoll sind, fundierte Kenntnisse in allen drei Grundkategorien erfordern. Ein weiterer wesentlicher Aspekt ist, dass bei fachmathematischen Schnittstellenmodulen die explizite Verknüpfung von Fachdidaktik und Schulmathematik in den Hintergrund tritt. Dies ist aber, wie oben beschrieben, unproblematisch, da diese Verknüpfung in der Regel bereits durch klassische mathematikdidaktische Veranstaltungen gefördert wird.

Die Rolle von Schnittstellenaufgaben

Eine besondere Bedeutung für die Konzeption fachmathematischer Schnittstellenmodule fällt Aufgabenformaten zu, die explizit auf den Erwerb mathematikbezogenen Schnittstellenkompetenz abzielen. Dazu gehören beispielsweise die Schnittstellenaufgaben nach Bauer (vgl. S. 27) oder die MKT-Tasks, wie sie in 2.4.3 beschrieben wurden.

Solche Aufgabenformate sind deshalb so besonders, weil sie den Bestandteil einer Lehr-/Lerneinheit darstellen, in dem die Studierenden aktiv und eigenständig arbeiten können. Somit stellen sie für den Kompetenzzuwachs einen entscheidenen Faktor dar. Wichtig ist, dass bei dem MIU-Entwurf diese Art Aufgaben nicht für sich stehen, sondern eng mit den anderen Bereichen der Lehr-/Lerneinheit verknüpft sind. Auch bei den später vorgestellten Beispielen für Schnittstellenmodule werden Schnittstellenaufgaben eine entscheidende Rolle spielen.

Ein Vorschlag für ein Vorgehen bei dem Entwurf fachmathematischer Schnittstellenmodule

Basierend auf den bisherigen Überlegungen soll nun ein erster Vorschlag für ein praktisches Vorgehen für den Entwurf einer MIU vorgestellt werden. Dies kann eine komplette Veranstaltung sein oder auch ein Teil einer mathematischen Veranstaltung (eine Vorlesungswoche, eine Vorlesung, ein Übungsblatt, eine Übung,...).

(B) Vorgehen für den MIU-Entwurf

Schritt 1: Festlegen des fachmathematischen Rahmens

Schritt 2: Analyse der fachmathematischen Inhalte auf Bezüge zur Schulmathematik und Didaktik der Mathematik

Schritt 3: Analyse der gefundenen Bezüge

Schritt 4: Auswahl der Bezüge (und damit eventuell auch schulmathematischer und mathematikdidaktischer Inhalte) und der fachmathematischen Inhalte

Schritt 5: Definition von intendierten Lernergebnissen zur Förderung professioneller Lehrerkompetenz (mit Hilfe einer Taxonomie)

Schritt 6: Planung der Lehr-/Lerneinheit (kompetenzorientiert)

Schritt 7: Planung der Überprüfung der Lehr-/Lerneinheit (kompetenzorientiert)

Schritt 8: Durchführung

Schritt 9: Evaluation und Reflexion

Die logische Konsequenz dieses Vorgehens und insbesondere von Schritt 4 ist, dass im Vergleich zu einer klassischen fachmathematischen Einheit, fachmathematische Inhalte zu Gunsten der Förderung von MSK wegfallen. Dabei gilt es sich sehr genau zu überlegen, was genau weggelassen wird, und was dafür hinzu kommt. Dies ist Bestandteil der Schritte 5 und 6.

Insgesamt kann man das Vorgehen für einen beliebigen mathematischen Rahmen in vier Phasen unterteilen, wie sie in Abbildung 3.4 dargestellt sind.

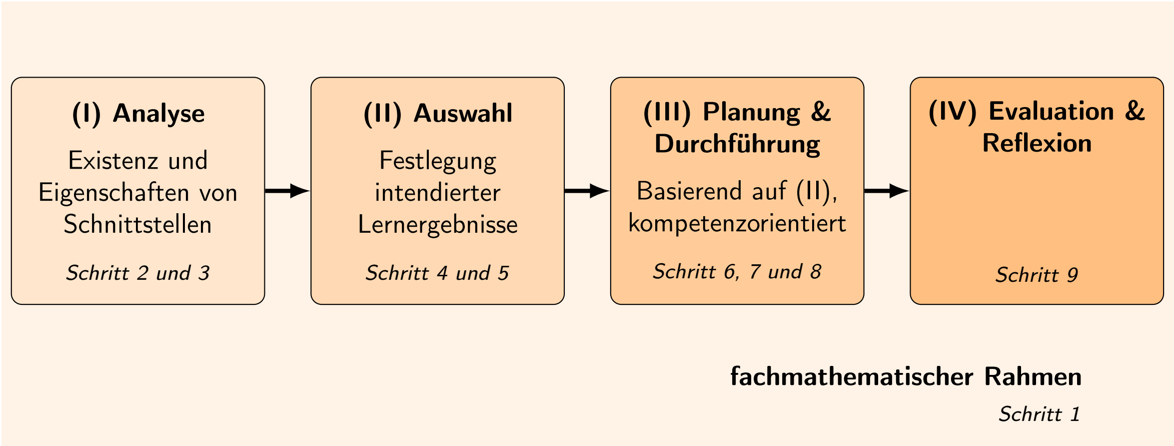


Abbildung 3.4: Vier-Phasen-Modell für die Verwendung fachmathematischer Schnittstellenmodule

Während die Phasen (I) bis (III) bereits oben näher beschrieben wurden, wurde das Vorgehen in Phase (IV) noch nicht näher vorgestellt. Dies wird im übernächsten Unterabschnitt nachgeholt. Zunächst werden fachmathematische Schnittstellenmodule in den übergeordneten Kontext *Entwicklung von Lehrerprofessionalität* eingeordnet.

Die Bedeutung von fachmathematischen Schnittstellenmodulen für die Entwicklung von Lehrerprofessionalität

An dieser Stelle soll das Konzept von *fachmathematischen Schnittstellenmodulen* in das Angebots-Nutzungs-Modell zur Beschreibung von *Determinanten und Konsequenzen der professionellen Kompetenz von Lehrkräften* aus dem COACTIV-Projekt (siehe Abbildung 2.3, S. 24) eingeordnet werden. Damit werden die obigen Überlegungen in ein etabliertes Modell eingebettet, welches eine Struktur liefert, um die Wirkungsweise von MIUs auf den Erwerb von Lehrerprofessionalität zu beschreiben.

Eine MIU stellt eine universitäre *Lerngelegenheit* dar, die Lehramtsstudierende nutzen können. Diese Nutzung hängt von den *individuellen Voraussetzungen* (kognitive Fähigkeiten, Motivation, Persönlichkeit) ab, die auch den resultierenden Erwerb *professioneller Kompetenzen* bedingen. Bei diesen werden die vier Kompetenzaspekte *Wissen*, *Überzeugungen*, *Motivation* und *Selbstregulation* unterschieden (siehe auch Abbildung 2.2).

Bei fachmathematischen Schnittstellenmodulen steht bezogen auf den Kompetenzaspekt *Wissen* neben dem fachmathematischen Wissen insbesondere der Erwerb *mathematikbezogener Schnittstellenkompetenz* im Vordergrund. Hierauf wurde bei den konzeptionellen Beschreibungen bereits eingegangen. Es ergibt sich die folgende Hypothese:

(C) Hypothese
Fachmathematische Schnittstellenmodule (entwickelt nach dem Vorgehen aus (B), S. 43) bilden eine Möglichkeit, Lehr-/Lernsituationen zum Erwerb anschlussfähiger fachmathematischer Inhalte (im Sinne der Forschungsfrage ((A), S. 35)) zu gestalten.

Während der Erwerb von MSK im Fokus der Gestaltung von MIUs steht und der Kompetenzaspekt *Wissen* somit explizit mitgedacht wurde, wurde auf die anderen Kompetenzaspekte noch nicht näher eingegangen. Das Modell aus Abbildung 2.3 unterstützt die intuitive Annahme, dass MIUs auch Einfluss auf Überzeugungen, Motivation und Selbstregulation der Lehramtsstudierenden haben. Es ist nötig, diese Einflüsse ebenfalls zu untersuchen. Dazu ist es zuerst erforderlich, auch in diesen Bereichen ein konzeptionelles Fundament basierend auf etablierten Forschungsergebnissen zu erstellen. Ein hier wesentlicher Aspekt, der bereits in 2.5 erwähnt wurde, ist die „Einstellung" von Lehrkräften zur Fachmathematik. Ausgangspunkte können die umfangreiche Faktorenanalyse von Grigutsch, Raatz und Törner (1998) sowie die neueren Arbeiten von Becher (2014) und Becher und Biehler (2015) sein. Diese Thematiken werden in der vorliegenden Arbeit nicht weiter vertieft. Zumindest wird jedoch eine, unter Berücksichtigung der Studierendenzitate aus Becher (2014) plausible, Nebenhypothese in Bezug auf den Einfluss von MIUs auf die anderen Kompetenzaspekte aufgestellt. Diese ist auch konsistent mit den auf den Seiten 27 ff. vorgestellten vermuteten positiven Wirkungen von Schnittstellenaufgaben.

(D) Nebenhypothese
Fachmathematische Schnittstellenmodule (entwickelt unter Beachtung der vorgestellten Aspekte) wirken motivierend auf Lehramtsstudierende und erhöhen die Wahrscheinlichkeit, dass die Lehramststudierenden fachmathematische Inhalte als gewinnbringend in Bezug auf die spätere Unterrichtstätigkeit einschätzen.

Das Modell aus dem COACTIV-Projekt sagt, dass die *professionellen Kompetenzen* zusammen mit den *individuellen Voraussetzungen* (s.o.) das *professionelles Handeln* bedingen. In der vorgestellten Konzeption wird dieser Aspekt beispielsweise durch die Tatsache deutlich, dass die Förderung mathematikbezogener Schnittstellenkompetenz mit der Förderung von SCK bzw. HCK einhergeht. Die Anwendbarkeit dieser Wissenskonzepte für die Unterrichtstätigkeit war Teil der auf Seite 16 ff. beschriebenen Theorie der Gruppe um Ball und Bass.

Abschließend hat *professionelles Handeln* Einfluss auf das Lernen von SuS und Lehrkräften. Somit liefert das Modell ein Konzept, wie mathematikbezogene Schnittstellenkompetenz, so es denn tatsächlich in MIUs gefördert wird (vgl. Hypothese (C), S. 44), Einfluss auf das spätere Lernen von SuS hat.

Evaluation und Reflexion von fachmathematischen Schnittstellenmodulen

Abschließend soll noch ausgeführt werden, welche grundsätzlichen Aspekte bei der *Evaluation* von fachmathematischen Schnittstellenmodulen zu berücksichtigen sind (vgl. Phase (IV) in Abbildung 3.4). Die Ergebnisse einer solchen Evaluation müssen dann unter Berücksichtigung der Phasen (I) bis (III) reflektiert werden. Diese Reflexion bildet die Grundlage für die nachfolgende Entwicklung und Durchführung eines Schnittstellenmoduls.

Die Evaluation bezieht sich auf Zielsetzung von MIUs (S. 40) sowie auf die Hypothese (C), S. 44 und die Nebenhypothese (D), S. 45 . Es ergeben sich drei zentrale Fragestellungen, die im Rahmen der Evaluation zu beantworten sind.

(1) Inwieweit wurden die intendierten Lernergebnisse erreicht?

(2) Gibt es Evidenz für oder gegen die vorher aufgestellte(n) Hypothese(n)?

(3) Welche neuen Hypothesen ergeben sich?

Dabei bilden die obige Nebenhypothese und besonders die obige Hypothese den Ausgangspunkt für die erste Durchführung.

Da der fachmathematische Rahmen fest bleibt, liefern alle Iterationen immer nur Aussagen über MIUs mit eben diesem Rahmen. Betrachtet man langfristig MIUs für verschiedene fachmathematische Rahmen, so besteht die Möglichkeit, Aussagen über fachmathematische Schnittstellenmodule im Allgemeinen zu treffen. Auf die präzise methodische Umsetzung des Evaluationsprozesses wird an dieser Stelle nicht weiter eingegangen. Sie muss eng verknüpft mit der realen Einsatzsituation von Schnittstellenmodulen sein und ist somit ein Thema zukünftiger Abeiten, die sich mit der praktischen Durchführung von Schnittstellenmodulen beschäftigen.

3.3 Zusammenfassendes

In diesem Kapitel wurde, basierend auf einer beispielhaften Betrachtung der Modulhandbücher für das gymnasiale Lehramtsstudium an der Universität Paderborn, festgestellt, dass die Anschlussfähigkeit fachmathematischen Wissens in den Modulhandbüchern nicht explizit durch entsprechend formulierte Learning Outcomes in den Fokus genommen wird.

Mit dem Ziel, entsprechende Lern-/Lerneinheiten zu konzipieren, wurde mit dem *Schnittstellen-Tetraeder* ein Modell zur Beschreibung fachbezogenen Professionswissens von Mathematiklehrkräften vorgestellt, das *mathematikbezogene Schnittstellenkompetenz* als eigene Kategorie ausweist. Das Modell wird durch die in Kapitel 2 vorgestellen Konzepte theoretisch fundiert.

Anschließend wurden *fachmathematische Schnittstellenmodule* als Lehr-/Lerneinheiten definiert, die den Erwerb mathematikbezogener Schnittstellenkompetenz explizit im Fokus haben. Diese Definition wurde mit Inhalt gefüllt, indem theoriebasiert ein Vier-Phasen-Modell konzipiert wurde, das als Entwurfs- und Durchführungsgrundlage dient. Außerdem wurden fachmathematische Schnittstellenmodule in ein Modell zur Beschreibung der Entwicklung von Lehrerprofessionalität eingeordnet.

Den Abschluss dieses Kapitels bildet die konzeptionelle Beschreibung eines Evaluationsprozesses, der in der Praxis methodisch ausgestaltet werden muss.

Kapitel 4

Umsetzung fachmathematischer Schnittstellenmodule in der Praxis

In diesem Kapitel soll nun an Beispielen aufgezeigt werden, wie Elemente eines fachmathematischen Schnittstellenmoduls in der Praxis aussehen können. Hierzu werden Themen aus dem Bereich der höheren Analysis, genauer gesagt der mehrdimensionalen Integrationstheorie behandelt.[1]

Diese Themenwahl ist konform mit den Lehramtsprüfungsordnungen der Universität Paderborn. In den *besonderen Bestimmungen* für den gymnasialen Masterstudiengang ist die Vorlesung *Reelle Analysis* als eine Möglichkeit angegeben, um ein fachwissenschaftliches Modul abzudecken (UPB, 2016b). In dieser Vorlesung wird typischerweise eine Einführung in Differentialgleichungen und mehrdimensionale Integrationstheorie gegeben.

Dass eine solche Vorlesung am Ende des Studiums liegt, hat für den Entwurf einer MIU zwei entscheidende Vorteile: Zum einen kann auf ein breites Repertoire von fachmathematischem und insbesondere auch fachdidaktischem Wissen zurückgegriffen werden. Zum anderen liegt die MIU zeitlich nah am Übergang in das Referendariat und kann somit insbesondere zur Überwindung der zweiten von Felix Klein beschriebenen Diskontinuität (S. 26 f.) beitragen.

Für das Vorgehen bei der Entwicklung von Teilen einer MIU zur mehrdimensionalen Integrationstheorie bilden das im letzen Kapitel beschriebene Vorgehen (B), S. 43 , bzw. das darauf aufbauende *Vier-Phasen-Modell* (S. 44) die Grundlage.

Im Rahmen dieser Arbeit kann kein vollständiges Schnittstellenmodul in allen Facetten erstellt werden, daher wird im Folgenden exemplarisch gearbeitet. Die fachmathematische Grundlage bildet ein vom Autor erstelltes Skript (siehe Anhang B). Diese Ausarbeitung ist als rigorose fachliche Darstellung für die bei der Ausarbeitung von Schnittstellenaktivitäten relevanten mathematischen Inhalte zu sehen und erhebt nicht den Anspruch, alle fachmathematischen Aspekte zu behandeln, die man in einer entsprechenden fachmathematischen Vorlesung behandeln sollte. Bereiche, die für die Schnittstellen nicht relevant sind, wurden weggelassen.

[1] *Anm. des Autors:* An dieser Stelle wurde bewusst ein Thema gewählt, dass typischerweise nicht im ersten Studienjahr angesiedelt ist. Damit wird unterstrichen, dass das MIU-Konzept zwar auch, aber nicht ausschließlich für den Bereich der Anfängervorlesungen anwendbar ist.

4.1 Analyse

4.1.1 Festlegung und Beschreibung des fachmathematischen Rahmens

Wie oben beschrieben, soll sich das zu entwickelnde fachmathematische Schnittstellenmodul mit dem Bereich *mehrdimensionale Integrationstheorie* auseinandersetzen. Zur Ausgestaltung dieser Thematik bieten sich zwei Zugänge an: *Riemann-Integrale* oder *Lebesgue-Integrale*. Jeder der beiden Zugänge impliziert ein unterschiedliches Vorgehen. Darauf soll im Folgenden überblicksartig eingegangen werden.

Möglicher Aufbau eines Zugangs zum Lebesgue-Integral

Um das *Lebesgue-Integral* einzuführen, benötigt man zunächst den Begriff der *σ-Algebra* und damit verbunden den Begriff der *messbaren Menge* als Elemente von *Messräumen*. Darauf aufbauend kann man *messbare Funktionen* als Funktionen zwischen Messräumen definieren, sodass Urbilder messbarer Mengen wieder messbar sind. Diese Funktionen sind essentiell für das spätere Integrierbarkeitskonzept.

Anschließend kann man messbaren Mengen ein so genanntes *Maß* zuordnen; der Messraum wird dann zu einem *Maßraum*. Als bedeutsame Maße erweisen sich das *Zählmaß*, mit dessen Hilfe man später Eigenschaften von Integralen auf Reihen überführen kann, sowie das *Lebesgue-Borel-Maß*, das jedem halboffenen Quader sein natürliches Volumen zuordnet.

Unter Verwendung von *Stufenfunktionen* kann man nun das Integral für messbare Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ – wobei X ein Maßraum ist – bezüglich des durch den Maßraum gegebenen Maßes definieren.

Als wichtige Sätze für die Arbeit mit Integralen erweisen sich der *Satz von Fubini*, der das Zurückführen mehrdimensionaler Integrale auf den eindimensionalen Fall erlaubt, sowie die Transformationsformel, die die Integration über alternative Koordinatendarstellungen beschreibt.

Ein entsprechender Zugang findet sich beispielsweise im Skript zur Reellen Analysis von Glöckner (2008).

Möglicher Aufbau eines Zugangs zum Riemann-Integral

Bei der Definition des (mehrdimensionalen) Riemann-Integrals kann man in vielen Punkten wie im eindimensionalen Fall vorgehen. Zunächst erweitert man das Konzept (abgeschlossener) Intervalle auf mehrdimensionale *Quader*. Diese stellen die Bereiche dar, über die eine Funktion integriert werden soll. Mit Hilfe dieser Quader kann man nun (analog zum eindimensionalen Fall) *Ober-* und *Untersummen* bzw. *Zwischensummen* definieren, deren Grenzwerte später den Wert des Integrals definieren. Dazu muss zunächst das Konzept der *Zerlegung* von Quadern in Teilquader eingeführt werden.

Man kann zeigen, dass die Zugänge über Ober- und Untersummen bzw. über Zwischensummen äquivalent sind. Somit stehen beide damit verbundenen Darstellungsformen für die Beweise weiterer Eigenschaften zur Verfügung. Auch für mehrdimensionale Riemann-Integrale kann man eine abgeschwächte Form des *Satzes von Fubini* beweisen.

Unter Verwendung des *Jordan-Inhaltes*, der auf der Idee beruht, komplizierte Mengen von außen und von innen durch Quader anzunäheren, lässt sich dann Integration über kompliziertere Mengen beschreiben. Dabei muss das Konzept der *Jordanschen Nullmengen* eingeführt werden. Mit diesem Konzept kann man dann weitere Aussagen über *Jordan-Messbarkeit* und über Riemann-integrierbare Funktionen, die nicht überall stetig sind, machen. Auch die Transformationsformel lässt sich beweisen.

Entsprechende Zugänge finden sich bei A'Campo-Neuen (2011); Duistermaat und Kolk (2004); Roch (2013); Sauvigny (2014).

Vergleich der beiden Integrations-Begriffe

Der Grundgedanke beider Zugänge ist die Idee des Messens des Volumens, das eine Funktion „einschließt". Es wird deutlich, dass die Einführung des Lebesgue-Integrals einen deutlich größeren Vorlauf (die Maßtheorie) braucht, dafür aber einen vielseitigeren Integrationsbegriff liefert, der viele Anwendungen abseits der Volumenmessung ermöglicht. Ein wichtiges Beispiel hierfür ist die Wahrscheinlichkeitstheorie (diskret und kontinuierlich). Ein weiteres Beispiel besteht in der Möglichkeit, Reihen als Integrale (mit dem Zählmaß) anzusehen. In der Tat stellt das Lebesgue-Integral den Integrationszugang dar, der bedeutsam und nötig für den Eintritt in aktuelle mathematische Forschung ist.

Die Einführung des Riemann-Integrals benötigt einen geringeren Vorlauf und verallgemeinert im Wesentlichen den typischen eindimensionalen Zugang. Der Integrationsbegriff eignet sich gut für nicht zu komplizierte Beispiele, ist jedoch bei komplizierteren Beispiel deutlich weniger nützlich als das Lebesgue-Integral. Tatsächlich kann man ein Maß wählen, sodass die Riemann-Integrierbarkeit im Prinzip ein Spezialfall der Lebesgue-Integrierbarkeit ist.

4.1.2 Potenzielle Schnittstellen

Es gilt nun Bereiche der Mathematikdidaktik und der Schulmathematik zu identifizieren, deren Bezug zum fachmathematischen Rahmen den Erwerb mathematikbezogener Schnittstellenkompetenz fördert. Für den Bereich der mehrdimensionalen Integrationstheorie bieten sich – schulmathematisch geordnet – drei Oberthemen an: Geometrie, Integralrechnung und Stochastik. Eine Auswahl (ohne Anspruch auf Vollständigkeit) entsprechender Teilthemen wird im Folgenden vorgestellt.

Messen von Flächeninhalten und Volumina im Allgemeinen

Der Aspekt des Messens, insbesondere von Flächeninhalten und Volumina, ist expliziter Bestandteil der Kernlehrpläne (MSW NRW, 2007, 2013). Als zwei wesentliche Aspekte der Grundidee *Messen* nennen Weigand et al. (2014, S. 160 f.) das *Auslegen* einer zu messenden Größe („Messen-durch-Auslegen-und-Zählen-Aspekt“) und das *Ausrechnen* von Inhalten („Messen-als-Berechnen-Aspekt“). Die Charakterisierung von Messen als „Auslegen bzw. Ausfüllen“ (mit kongruenten Flächen- bzw. Volumenstücken) beschreiben Weigand et al. (2014, S.171 f.) als eine logische Folgerung eines auf David Hilbert zurückgehenden (vgl. Volkert, 2015) axiomatischen Flächeninhaltsbegriffs.

Der Bezug zu fachmathematischen Inhalten ist in beiden Zugängen zur mehrdimensionalen Integration deutlich. Sowohl die Zerlegung von Quadern, die Approximierung n-dimensionaler Volumina durch Ober-, Unter- oder Zwischensummen und das Konzept des Jordan-Inhaltes als auch die Theorie messbarer Mengen und Maßräume bieten viele Ansatzpunkte zur Verknüpfung von Wissen. Desweiteren liefern beide Integralbegriffe eine Möglichkeit, kompliziertere n-dimensionale Volumina explizit auszurechnen. Ein weiterer, damit verbundener Aspekt des Messens ist die Approximation von Raum- und Flächeninhalten (Weigand et al., 2014, S. 179, ff.).

Das Prinzip von Cavalieri im Speziellen

Ein weiterer Aspekt des Messens von Flächeninhalten und Volumina ist die *Flächen- und Körperverwandlung*. Ein Beispiel hiefür ist das *Prinzip des Cavalieri*. In der Schulmathematik spielt es meist für den Volumenvergleich von Körpern mit gleicher Grundfläche und Höhe eine Rolle (inbsb. bei der Herleitung der Kegelvolumenformel aus der Pyramidenvolumenformel). Es lässt sich jedoch ohne Weiteres auch für den Vergleich von Flächeninhalten verwenden. In beiden Zugängen zur mehrdimensionalen Integrationstheorie lässt sich das Prinzip von Cavalieri fachmathematisch als Spezialfall des *Satzes von Fubini* formulieren. Die Schulversion ist wiederum ein Spezialfall dieser Formulierung. Somit ist auch hier ein Bezug vorhanden, der für den Aufbau mathematikbezogener Schnittstellenkompetenz benutzt werden kann. (Weigand et al., 2014, S. 177 ff.)

Grundvorstellungen zum Integralbegriff

Die (eindimensionale) Integration an sich stellt ebenfalls einen Bestandteil des Kernlehrplans NRW für Mathematik dar (MSW NRW, 2013, S. 17). Aus fachlicher Sicht unterscheiden Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm und Weigand (2016, S. 238) den *Maßaspekt*, den *Produktsummenaspekt* und den *Stammfunktionsaspekt* des Integralbegriffs. Aus didaktischer Sicht werden als Grundvorstellungen die *(Re-)Konstruktionsvorstellung*, die *Flächeninhaltsvorstellung*, die *Mittelwertsvorstellung* und die *Kumulationsvorstellung* unterschieden. Genauere Ausführungen zu diesen Aspekten und Vorstellungen findet man bei Greefrath et al. (2016, S. 239 ff.).

Für den Erwerb mathematikbezogener Schnittstellenkompetenz lässt sich bei beiden Zugängen zur mehrdimensionalen Integration diskutieren, welche Aspekte bei den jeweiligen Integralen auch im mehrdimensionalen Fall vorhanden sind und welche Grundvorstellungen sich fortsetzen lassen. Bei beiden Zugängen kann man außerdem den eindimensionalen Fall mit der Integration in der Schule vergleichen. Dabei ist insbesondere die Betrachtung von Defnitionsbereichen, die keine Intervalle sind, interessant.

Insbesondere beim mehrdimensionalen Riemann-Integral bietet es sich an, die mehrdimensionale Konstruktion mit dem eindimensionalen Vorgehen (insbesondere auch in der Schule) zu vergleichen.

Ereignisräume und Wahrscheinlichkeitsmaße

Eine wichtige Anwendung der Maßtheorie (auch aus fachmathematischer Sicht) ist die Wahrscheinlichkeitstheorie. σ-Algebren stellen die Grundstruktur für die Beschreibung von Ereignissen (messbaren Mengen) auf Stichprobenmengen dar. Die Abbildung, die einem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zuordnet, ist ein Maß mit Gesamtvolumen 1. Dies lässt sich auch auf die diskreten Fälle anwenden, wie sie typischerweise in der Schulmathematik behandelt werden. Somit ist ein offensichtlicher Schulbezug vorhanden, der Grundlage für den Aufbau mathematikbezogener Schnittstellenkompetenz sein kann. Insbesondere der Aufbau von MHK kann dadurch unterstützt werden, dass aufgezeigt wird, wie sich Begriffe der diskreten Wahrscheinlichkeitstheorie (z. B. Erwartungswert) im kontinuierlichen Fall fortsetzen lassen und welche Rolle das Integral als „überabzählbare Verallgemeinerung“ abzählbarer Summation dabei spielt.

Das Gaußsche Fehlerintegral

Einen weiteren, zwar sehr speziellen, aber auch wichtigen Bezug zwischen Wahrscheinlichkeitstheorie und mehrdimensionaler Integrationstheorie bildet das *Gaußsche Fehlerintegral*. Die Gaußsche Glockenkurve ist explizit im Kernlehrplan erwähnt (MSW NRW, 2013, S. 34) und kann auch in der Schule als Beispiel einer nicht elementar integrierbaren Funktion gesehen werden. Um nun nachzurechnen, dass der Wert des Integrals tatsächlich gleich eins ist, bietet ein zweidimensionaler Integrationszugang in der Tat eine interessante Möglichkeit, den Wert des Integrals exakt zu bestimmen. Dieses funktioniert für beide Integral-Zugänge. [2]

Abschließendes zum Potenzial für den Aufbau von MSK

Durch die obigen Ausführungen ist deutlich geworden, dass es eine Vielzahl von Bezügen zwischen Schulmathematik, Mathematikdidaktik und der mehrdimensionalen Integrationstheorie gibt, die sinnvoll für den Aufbau mathematikbezogener Schnittstellenkompetenz genutzt werden können. Dabei erhebt die obige Aufstellung keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Offensichtlich bietet also der Bereich der mehrdimensionalen Integrationstheorie einen guten Ausgangspunkt für den Entwurf eines fachmathematischen Schnittstellenmoduls.

4.2 Inhaltliche Auswahl für das Schnittstellenmodul

Im letzten Abschnitt wurde entsprechend der ersten Phase des *Vier-Phasen-Modells* (S. 44) der grobe fachmathematische Rahmen festgelegt und auf verwendbare Bezüge zur Mathematikdidaktik und zur Schulmathematik hin analysiert. Basierend auf dieser Analyse muss in Phase (II) nun eine inhaltliche Auswahl getroffen werden. Hierzu muss zunächst entschieden werden, welcher fachmathematische Zugang zur mehrdimensionalen Integration gewählt werden soll.

Wie in der obigen Analyse sichtbar geworden ist, liefern beide Zugänge Möglichkeiten zum Aufbau fachmathematischer Schnittstellenkompetenz. Bei der Einführung des Lebesgue-Integrals wird

[2] Die im folgenden Modul verwendete Mathematik führt für den Beweis nicht weit genug. Einen auf dem vorgestellten Zugang basierenden Nachweis findet man bspw. bei Duistermaat und Kolk (2004, S. 465 f).

der Bezug zur Wahrscheinlichkeitstheorie deutlicher, während bei der Einführung des mehrdimensionalen Riemann-Integrals ein expliziterer Vergleich mit der Integration in der Schule vollzogen werden kann.

Da es auf inhaltlicher Ebene Argumente für beide Zugänge gibt, wird als ein weiteres Argument für die Auswahl der organisatorische Rahmen des fachmathematischen Schnittstellenmoduls fungieren. Möchte man das Schnittstellenmodul in eine Vorlesung einbetten, in der auch Bachelor-Mathematik-Studierende sitzen, so ist unbedingt das Lebesue-Integral als das Integral zu wählen, das anschlussfähig für die weitere mathematische Ausbildung eben dieser Studierenden ist. Für das Schnittstellenmodul kann dann der Kurs bspw. zeitweise getrennt werden und / oder es spezielle Übungsaufgaben und / oder Übungsgruppen für die Lehramtsstudierenden geben.

Handelt es sich allerdings um eine Veranstaltung speziell für Lehramtsstudierende, so kann man zwar auch das Lebesgue-Integral einführen, die Nähe zum Integralbegriff der Schulmathematik liefert aber auch ein gutes Argument für die Behandlung des mehrdimensionalen Riemann-Integrals. Im Folgenden soll genau dieser Weg gegangen werden. Es soll explizit angemerkt werden, dass es sich nicht um eine Entscheidung *gegen* das Lebesgue-Integral, sondern um eine Entscheidung *für* das Riemann-Integral handelt. Die Konzeption einer MIU basierend auf dem Lebesgue-Integral ist ebenso auf vernünftige Art und Weise möglich. Als fachliche Grundlage soll – wie bereits in der Einleitung besprochen – ein vom Autor erstelltes Skript dienen (vgl. Anhang B), das speziell für die mathematische Fundierung der oben vorgestellten Schnittstellenaspekte ausgelegt ist. Es soll angenommen werden, dass die Veranstaltungsform eine typische Vorlesung mit Übungsbetrieb ist.

Geht man nach dem *Vier-Phasen-Modell* vor, so besteht der nächste Schritt in der Festlegung der intendierten Lernergebnisse. Dies für den gesamten Bereich der mehrdimensionalen Integrationstheorie durchzuführen, würde jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Stattdessen werden im nächsten Abschnitt drei ausgewählte Schnittstellenaktivitäten vorgestellt und dabei die intendierten Lernziele zu den jeweiligen Teilbereichen ausgeführt. Die Schnittstellen sind Teil der oben vorgestellten Übersicht und beziehen sich auf den Jordaninhalt als Flächenmaß, auf das Prinzip des Cavalieri und auf eine mathematikdidaktische Analyse des Integralzugangs. Für die ersten beiden Themen wird eine komplette Lerneinheit vorgestellt, für den Integralzugang eine Schnittstellenaufgabe.

4.3 Darstellung ausgewählter Teile des Schnittstellenmoduls

Entsprechend der obigen Ausführungen soll in diesem Abschnitt nun explizit eine Auswahl von Lehr-/Lernbausteinen zur Förderung mathematikbezogener Schnittstellenkompetenz in einem fachmathematischen Rahmen vorgestellt werden. Dies entspricht Teilen von Schritt 6 des oben entwickelten Vorgehensmodells (B), S. 43 . Dabei werden im Sinne der Kompetenzorientierung immer auch entsprechende intendierte Lernergebnisse aufgeschrieben. Ziel des Abschnitts ist aufzuzeigen, wie der explizite Entwurf fachmathematischer Schnittstellenmodule funktionieren kann.

Dabei kann es nicht um die Beschreibung didaktischer Einzelentscheidungen (im Sinne eines Verlaufsplans) gehen, da diese abhängig von verschiedenen Rahmenbedingungen (u.a. der Lerngruppe) sind. Stattdessen wird ein Manuskript angegeben, das so aufgebaut sein soll, dass ein Hochschullehrender es ohne Weiteres in der Praxis umsetzen kann. Dazu gehören neben einem Fundus an Aufgaben unter anderem die Auflistung ausgewählter intendierter Lernziele. Die Auswahl bezieht sich dabei auf Lernziele, die sich speziell auf den eng verknüpften Erwerb mathematischen Fachwissens und mathematikbezogener Schnittstellenkompetenz beziehen. Die Lernziele werden dabei unter Verwendung der auf Seite 11 dargestellten Taxonomie vorgestellt.

4.3.1 Schnittstelle: Nutzbarmachung des Jordaninhalts für das Messen von Flächeninhalten in der Schulmathematik

Ein wichtiger Schritt zur Beschreibung komplizierterer Mengen, auf denen eine Funktion Riemann-integrierbar sein kann, ist die Definition des *Jordan-Inhalts* (siehe B.6.3). In diesem Unterabschnitt soll beschrieben werden, wie der Spezialfall $n = 2$ genutzt werden kann, um eine Verknüpfung zum Messen und Approximieren von Flächeninhalten in der Mittelstufe herzustellen. Dabei werden aus mathematikdidaktischer Sicht der Auslege- und der Approximations-Aspekt des Messens in den Fokus genommen. Zuerst ist es dazu nötig, die – eher abstrakte – Definition über die Existenz des Integrals in eine anschaulichere Vorstellung zu überführen. Dabei werden verschiedene Aussagen über mehrdimensionale Ober- und Untersummen wiederholt. Zunächst soll noch einmal die Definition des Jordan-Inhalts angegeben werden.

Definition 4.3.1 (Jordan-Messbarkeit, Jordan-Inhalt)
Eine nichtleere beschränkte Menge $J \subset \mathbb{R}^n$ heißt Jordan-messbar, wenn $\mathbb{1}_f$ auf einem Quader $Q \supset J$ Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall heißt

$$\text{J-vol}_n(J) := \int_Q \mathbb{1}_J(x)\, dx = \int_J 1\, dx$$

der *(n-dimensionale) Jordan-Inhalt* von J.

Ausgewählte intendierte Lernergebnisse

Die Studierenden

(LE 1) verwenden die Definition des mehrdimensionalen Riemann-Integrals und des Jordan-Inhalts zur expliziten Berechnung von Jordan-Inhalten bei einfachen geometrischen Flächen (Anwenden, verfahrensorientiertes Wissen)

(LE 2) stellen das Konzept des elementargeometrischen Quaderinhalts als Spezialfall des Jordaninhalts heraus (Analysieren, begriffliches Wissen)

(LE 3) interpretieren den Jordan-Inhalt als gemeinsamen Grenzwert von Außen- und Inneninhalten (Verstehen, Faktenwissen bzw. begriffliches Wissen)

(LE 4) stellen die Idee der Flächeninhaltsmessung durch Zylindervolumenmessung heraus (Analysieren, begriffliches Wissen)

(LE 5) wenden die Idee der Flächeninhaltsmessung durch Zylindervolumenmessung im Kontext schulischer Lerneinheiten an (Anwenden, begriffliches Wissen)

(LE 6) planen aufbauend auf der Idee der Flächeninhaltsmessung durch Zylindervolumenmessung eine Lerneinheit (Schaffen, begriffliches Wissen)

(LE 7) analysieren und bewerten die schulische Gittermethode unter Verwendung des fachmathematischen Konzepts des Jordan-Inhalts (Analysieren und Bewerten, begriffliches Wissen, Faktenwissen

(LE 8) nutzen die Theoreme und Ideen der Einführung des mehrdimensionalen Riemann-Integrals zur Argumentation (Anwenden, Faktenwissen und begriffliches Wissen)

(LE 9) nutzen die Kontexte und Aspekte der Grundidee des Messens zur Analyse verschiedener Messsituationen (Analysieren, Bewerten, begriffliches Wissen, Faktenwissen)

Aufbau der Lehr-/Lerneinheit

Die *Voraussetzungen* für die folgende Einheit wurden bereits in den Abschnitten B.1 bis B.5 besprochen. Thematisch bedeutet das, dass das Riemann-Integral auf mehrdimensionalen Quadern unter Verwendung von Ober- und Untersummen eingeführt wurde und gezeigt wurde, dass dieser Ansatz äquivalent zur Verwendung Riemannscher Zwischensummen ist.

Beschreibung des Vorgehens Offensichtlich gibt der n-dimensionale Jordan-Inhalt ein Volumen für eine n-dimensionale Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ an. Für den Fall $n = 2$ wird durch den Jordan-Inhalt somit ein Flächeninhaltsbegriff definiert. Die erste Frage ist, wie sich dieser zu der üblichen Flächenmessung, die auf dem euklidischen Abstandbegriff beruht, verhält. Dies entspricht für einen Quader dem in B.1.2 definierten elementargeometrischen Inhalt. Um dies nachzuweisen, bietet sich Aufgabe 1 an. Diese Aufgabe eignet sich auf Grund ihrer Kürze dafür, sie während einer Vorlesung für eine *Studierendenarbeitsphase* zu verwenden.

Aufgabe 1 (Jordan-Volumen eines Rechtecks)
Sei $R \subset \mathbb{R}^2$ ein nichttriviales Rechteck (also ein zweidimensionaler Quader). Zeigen Sie, dass R Jordan-messbar ist und der Jordan-Inhalt tatsächlich dem üblichen Flächeninhalt entspricht..

Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 1 Sei $\mathcal{Z}$ eine beliebige Zerlegung von R. Dann gilt für jedes $R_i \in \mathcal{Z}$ und $x \in R_i$ bereits $\mathbb{1}_R(x) = 1$. Wir erhalten $s(\mathbb{1}_R, \mathcal{Z}) = S(\mathbb{1}_R, \mathcal{Z}) = \mathrm{vol}_2(R)$. Da $\mathcal{Z}$ beliebig war, folgen Existenz und Volumengleichheit sofort aus:

$$\text{J-vol}_2(R) = \int_R dx = \int_R \mathbb{1}_R \, dx = \mathrm{vol}_2(R).$$

Als Nächstes kann man nun die Art der Flächeninhaltsbestimmung visuell deuten. Dazu skizziert man zunächst den Definitionsbereich, über den das Integral ausgerechnet, wird und zeichnet dann den Funktionsgraphen von $\mathbb{1}_R$ ein (vgl. Abbildung 4.1).

Die Studierenden können nun darüber diskutieren, an welchen Stellen in den beiden Skizzen der Jordan-Inhalt auftaucht. In der Tat ergeben sich zwei Interpretationen. Der Jordaninhalt ist definiert

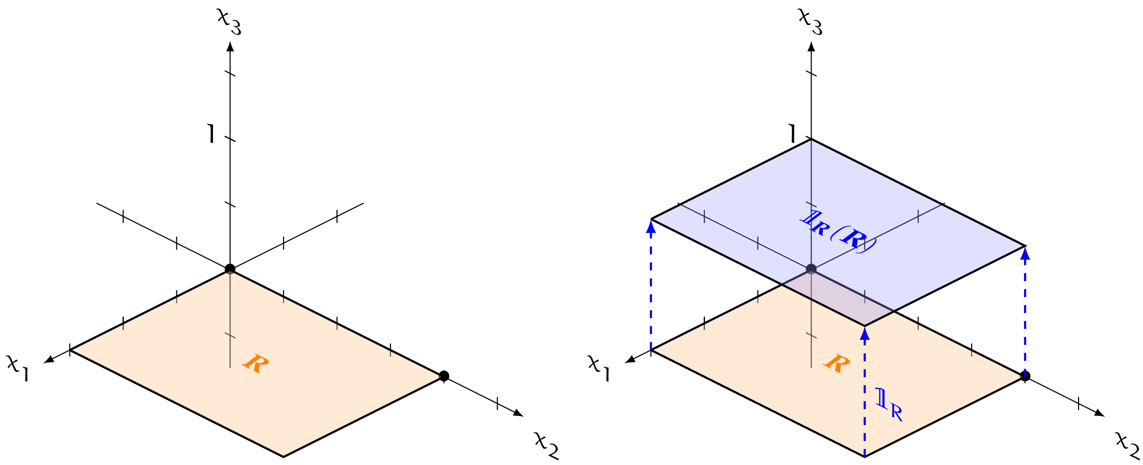


Abbildung 4.1: Veranschaulichung der Berechnung des Jordan-Inhalts eines Rechtecks

durch $\int_R 1\, dx$ und entspricht somit der Maßzahl des Volumens des entstandenen Quaders. Außerdem gibt der Jordaninhalt aber auch die Maßzahl des Flächeninhaltes von R an. Somit ergibt sich folgende Vermutung:

> Die gewählte Definition des Jordan-Inhalts beruht im zweidimensionalen Fall auf der Idee, Flächeninhalte durch geeignete, mit dem Riemann-Integral berechenbare, Volumina auszudrücken.

Kritische Studierende würden an dieser Stelle eventuell fragen, in welchen Situationen man denn ein Volumen gegeben hat und die Grundfläche gesucht ist. Jedoch ist vom Standpunkt des praktischen Messens die Volumenmessung ein einfacheres Problem als die Flächeninhaltsmessung: Man kann beispielsweise Wasser in das zu bestimmende Volumen einfüllen. Mit Hilfe einer Waage und einer Dichtetabelle ist das Volumen schnell mit einer guten Genauigkeit bestimmt. Diese Idee aufgreifend bildet Aufgabe 2 eine potenzielle Hausaufgabe, die die Idee „Flächenmessung durch Volumenmessung" mathematikdidaktisch aufarbeitet.

Die Frage ist nun, was geeignete Volumina für den Fall sind, dass die zu messende Fläche keine so einfache Form wie ein Rechteck hat.

Ein Blick in die Definition verrät, dass über eine Funktion integriert wird, die in jedem Punkt der zu messenden Menge den Wert *eins* annimmt. In unserem Fall ($n = 2$) bedeutet dies also, dass wir als Maßzahl für den Flächeninhalt einer Menge immer das Volumen eines Zylinders der Höhe eins berechnen, der als Grundfläche die zu messende Menge hat (siehe Abbildung 4.2).

Diese Dinge kann man im Gespäch mit den Studierenden erarbeiten und die obige Vermutung wie folgt verbessern:

> Die gewählte Defintion des Jordan-Inhalts beruht im zweidimensionalen Fall auf der Idee, Flächeninhalte durch Volumina von Zyindern der Höhe eins auszudrücken, deren Grundfläche die zu messende Fläche ist.

An dieser Stelle bietet es sich an, Bezug auf die aus der Schule bekannte Formel $V = G \cdot h$ zur Berechnung des Volumens V eines Zylinders mit Grundfläche G und Höhe h zu nehmen. Durch Umformung erhält man $G = \frac{V}{h}$ und für $h = 1$ tatsächlich $G = V$. [3]

[3] An dieser Stelle muss man natürlich Acht auf die Einheiten geben.

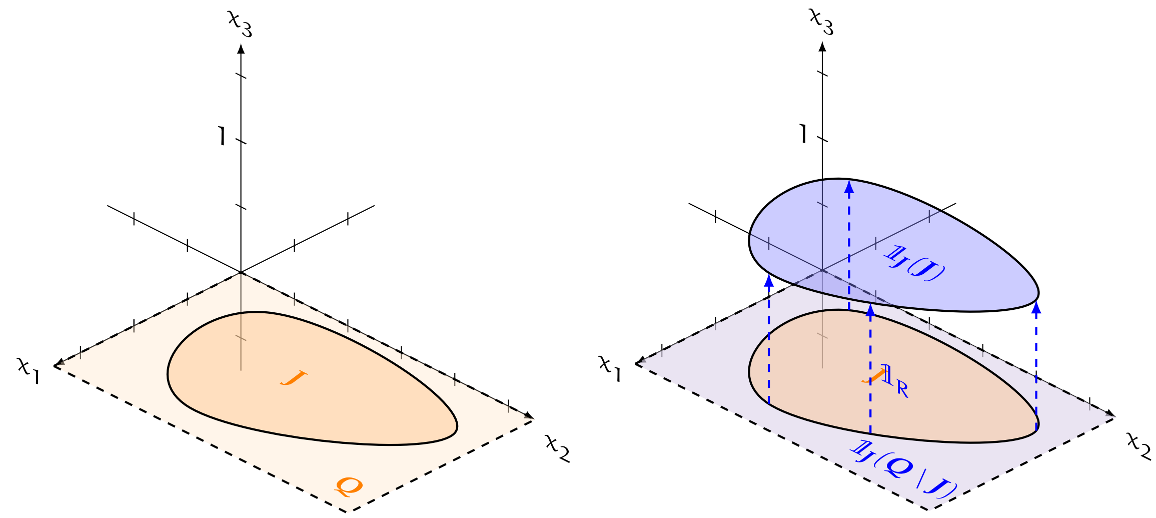


Abbildung 4.2: Jordan-Inhalt einer komplizierteren Fläche

Aufgabe 2 (Flächeninhalte aus Volumina berechnen)

In der Vorlesung haben Sie gelernt, wie die Bestimmung des Jordan-Inhalts einer Fläche auf eine Volumenbestimmung zurückgeführt wird. Für das Messen von Flächeninhalten in der Praxis kann die Volumenmessung tatsächlich leichter als die Flächeninhaltsmessung sein.

Betrachten Sie dazu die folgende problemorientierte Aufgabe:

> Nehmt einen zylinderförmigen Gegenstand (Tasse, Glas, Mülleimer, ...) und bestimmt den Flächeninhalt der Innenquerschnittsfläche durch Messen. Zur Verfügung stehen Euch Wasser, eine Waage und ein Lineal. Stellt Euer Vorgehen und Eure Ergebnisse auf einem Plakat dar.

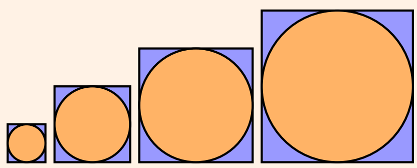
a) Bearbeiten Sie die Aufgabe und skizzieren Sie Ihren Lösungsweg.

b) Analysieren Sie, welche Aspekte und Kontexte des *Messens* bei der Lösung dieser Aufgabe vorkommen.

   Hinweis: Nutzen Sie ggf. Weigand et al. (2014, S. 158 ff.).

c) Entwickeln Sie eine Lehr-/Lerneinheit zur experimentellen Bestimmung der Kreiszahl π, die auf der obigen Idee der Kreisflächenmessung beruht.

   Hinweis Fasst man Kreise in möglichst kleine Quadrate ein, so stellt man schnell fest, dass man den Kreisdurchmesser als Seitenlänge nehmen muss. Zeichnet man sich dies für verschiedene Radien auf, so folgt aus der Ähnlichkeit der entstehenden Konfigurationen die Vermutung, dass der Anteil, den die Kreisfläche an der Quadratfläche hat, immer der gleiche ist.



   Es scheint also plausibel, die Existenz einer Zahl k anzunehmen, sodass gilt $A_{\bigcirc} = k \cdot A_{\square} = k \cdot d^2$.

Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 2 Aufgabe b) ist eine typische Analyse einer Schulaufgabe, aus einem bestimmten didaktischen Blickwinkel. Bei Aufgabe c) besteht eine mögliche Lösung darin, dass die SuS in Paaren Kreisinhalte messen wie in a) beschrieben wurde. Außerdem müssen noch die jeweiligen Durchmesser bestimmt werden. Hierfür gibt es verschiedene Möglichkeiten. Man erhält eine Näherung für π durch Mittelwertbildung.

Nun soll sich weiter mit der Frage beschäftigt werden, wie man den Begriff des Jordan-Inhalts anschaulicher charakterisieren kann. Dazu wird sich ein Rückblick auf den Zugang zum mehrdimensionalen Riemann-Integral über Unter- und Obersummen als nützlich erweisen. Wir betrachten also eine Jordan-messbare Menge $J \subset \mathbb{R}^2$ (wie bspw. in Abbildung 4.2) und einen Quader (Rechteck!) Q mit $J \subset Q$. Diesen Quader können wir zerlegen und für diese Zerlegung die Ober- und Untersumme bezüglich $\mathbb{1}_J$ betrachten. Wir erinnern uns an Definition B.2.1:

Definition 4.3.2 (Ober- und Untersumme)
Sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung mit Indexmenge $\mathcal{I}$ von Q. Wir definieren die *Obersumme* $S(f, \mathcal{Z})$ und die *Untersumme* $s(f, \mathcal{Z})$ durch

$$S(f, \mathcal{Z}) := \sum_{i \in \mathcal{I}} \sup_{x \in Q_i} f(x) \cdot \mathrm{vol}_n(Q_i) \quad \text{und} \quad s(f, \mathcal{Z}) := \sum_{i \in \mathcal{I}} \inf_{x \in Q_i} f(x) \cdot \mathrm{vol}_n(Q_i).$$

Da für $x \in Q$ auf jeden Fall $\mathbb{1}_J(x) \in \{0, 1\}$ ist, können die „Säulen" der Ober- und Untersummen nur die Höhen 1 oder 0 haben. Es ergibt sich eine Situation wie in Abbildung 4.3 dargestellt ist.

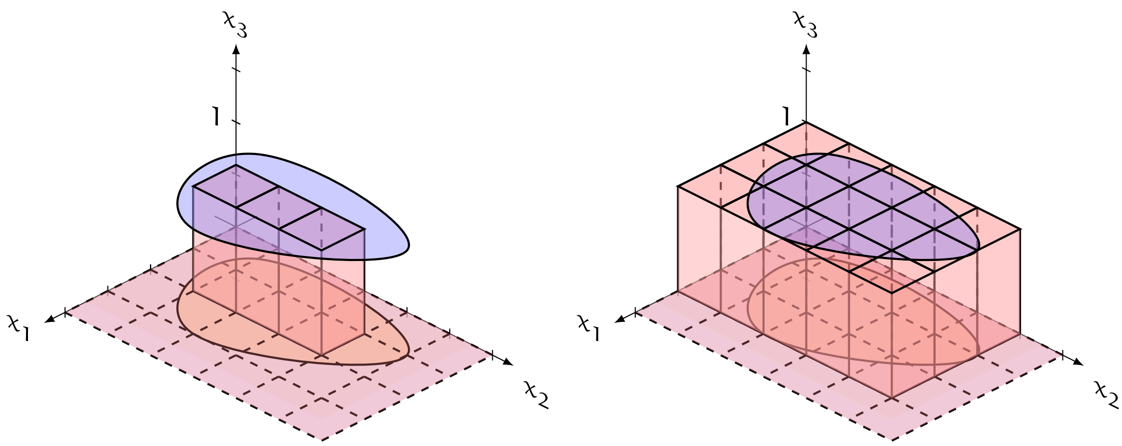


Abbildung 4.3: Unter- und Obersumme bezüglich $\mathbb{1}_J$ zu einer bestimmten Zerlegung

Es wird deutlich, dass es solche „Säulen" gibt, deren Grundfläche komplett in J ist – diese haben bei Ober- und Untersumme die Höhe 1 – und solche deren Grundfläche zumindest teilweise in J liegt – diese haben lediglich bei der Obersumme die Höhe 1. Nun gilt es, diese Mengen mathematisch zu fassen. Dies bietet sich wieder als kurze *Studierendenarbeitsphase* an. Als Grundlage kann Aufgabe 3 dienen.

Aufgabe 3 (Defnition von Außen- und Innenapproximation)
Sei $J \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar und $Q \supset J$ ein Quader. Ferner sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von Q. Geben Sie eine formale Definition für die *Außenapproximation (Innenapproximation)* $A(J, \mathcal{Z})$ $(I(J, \mathcal{Z}))$ an. Damit ist die Menge aller Teilquader der Zerlegunge $\mathcal{Z}$ gemeint, deren Volumen in der Obersumme $S(\mathbb{1}_J, \mathcal{Z})$ (Untersumme $s(\mathbb{1}_J, \mathcal{Z})$) mit dem Faktor 1 eingeht.

Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 3

$$A(J, \mathcal{Z}) = \left\{ \tilde{Q} \in \mathcal{Z} \;\middle|\; \sup_{x \in \tilde{Q}} \mathbb{1}_J(x) = 1 \right\}.$$

$$I(J, \mathcal{Z}) = \left\{ \tilde{Q} \in \mathcal{Z} \;\middle|\; \inf_{x \in \tilde{Q}} \mathbb{1}_J(x) = 1 \right\}.$$

Durch die Betrachtung von Innen- und Außenapproximationen lösen wir uns wieder von der Volumenvorstellung und erhalten durch die Teilmengen der Zerlegung zwei Arten von Approximationen für den Jordan-Inhalt von J: Eine *Überdeckung* von außen und ein *Ausfüllen* von innen. Exakt bedeutet dies

$$\bigcup_{\tilde{Q} \in I(J, \mathcal{Z})} \tilde{Q} \subset J \subset \bigcup_{\tilde{Q} \in A(J, \mathcal{Z})} \tilde{Q}.$$

Je weiter wir die Zerlegung verfeinern, desto besser wird die Approximation. Dies ist in Abbildung 4.4 dargestellt.

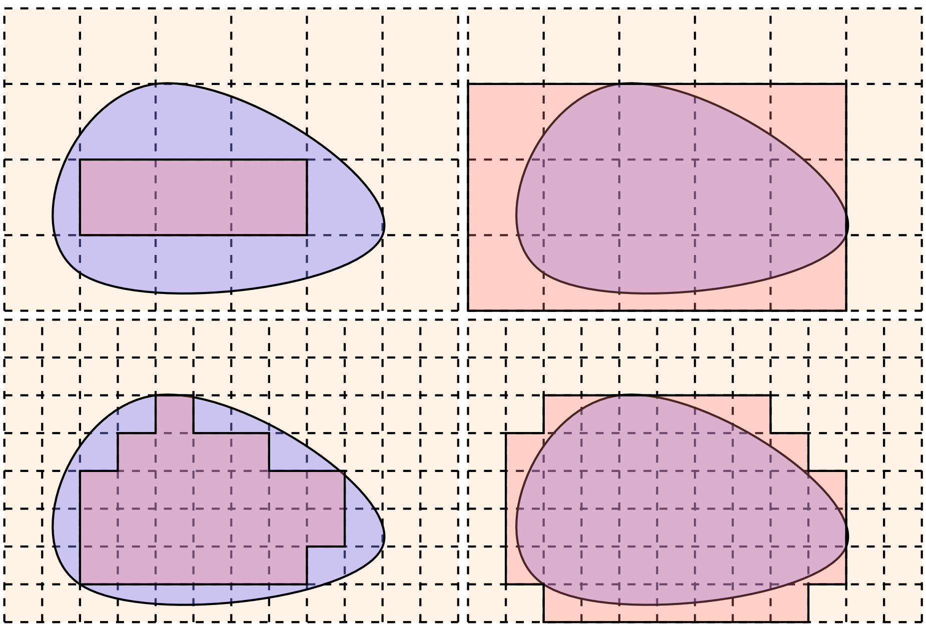


Abbildung 4.4: Innen- und Außenmengen bezüglich zweier Zerlegungen

Addiert man die Inhalte der Quader der Außen- bzw. Innenapproximation, so erhält man auf natürliche Art und Weise den *Außen- bzw. Inneninhalt* der Jordan-messbaren Menge J durch

$$\text{A-vol}_2(J,\mathcal{Z}) = \sum_{i:Q_i \subset A(J,\mathcal{Z})} \text{vol}_2(Q_i)\,,$$

$$\text{I-vol}_2(J,\mathcal{Z}) = \sum_{i:Q_i \subset I(J,\mathcal{Z})} \text{vol}_2(Q_i)\,.$$

Abschließend kann man zeigen (Aufgabe 4), dass der Jordan-Inhalt von J tatsächlich nach oben und unten durch Außen- und Inneninhalt abgeschätzt werden kann und diese für $\|\mathcal{Z}\| \to 0$ gegen den Jordan-Inhalt konvergieren. Diese Aufgabe eignet sich als Präsenz- oder Hausaufgabe, sie ist mathematisch zwar nicht anspruchsvoll, erfordert aber das Zusammenfügen verschiedener bereits bewiesener Aussagen und somit einen Überblick über die Integraleinführung.

Die durch die obigen Überlegungen entstandende Charaktierisierung des Jordan-Inhalts führt auf ein sehr natürliches Verfahren der Flächeninhaltsapproximation, das auch in der Schule verwendet wird. Mit diesem Bezug beschäftigt sich Aufgabe 6. Das tatsächliche Ausrechnen des Jordan-Inhalts einer einfachen geometrischen Figur ist Bestandteil von Aufgabe 5. Beide Aufgaben eignen sich gut als Hausaufgaben und erfordern ein solides Verständnis des vorgestellten Stoffes.

Aufgabe 4 (Approximation des Jordan-Inhalts)
Sei $J \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar und sei $Q \supset J$.

a) Zeigen Sie, dass für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von Q gilt

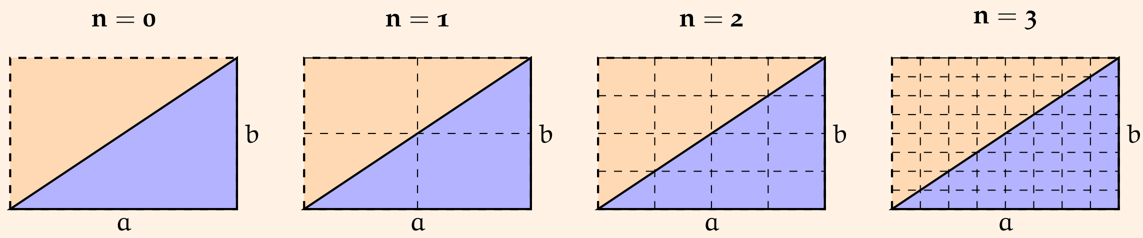
$$\text{I-vol}_2(J,\mathcal{Z}) \le \text{J-vol}_2(J) \le \text{A-vol}_2(J,\mathcal{Z})\,.$$

b) Zeigen Sie, dass für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge $\{\mathcal{Z}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\lim_{j\to\infty} \text{I-vol}_2(J,\mathcal{Z}) = \lim_{j\to\infty} \text{A-vol}_2(J,\mathcal{Z}) = \text{J-vol}_2(J)\,.$$

Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 4 Man zeigt, dass Außen- und Inneninhalt den Werten der entsprechenden Ober- und Untersummen entsprechen. Damit folgen beide Aussagen aus bereits bewiesenen Sätzen.

Aufgabe 5 (Der Jordan-Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks)
In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das Jordan-Volumen eines Quaders dem elementargeometrischen Volumen entspricht. Zeigen Sie, dass dies auch für rechtwinklige Dreiecke gilt. Sei dazu ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen a und b gegeben. Die Menge aller Punkte im Dreieck und auf dem Rand des Dreiecks bezeichnen wir mir D. Wählen Sie eine Folge von Zerlegungen entsprechend der nachfolgenden Skizzen und zeigen Sie, dass der Jordan-Inhalt tatsächlich $\frac{1}{2}ab$ ist.



Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 5 Der Flächeninhalt der Zerlegungsquader in Schritt n ist $\frac{1}{4}^n ab$. Dann stellt man eine Reihe auf, die man mit Hilfe der geometrischen Reihe ausrechnen kann. Der Grenzwert ist $\frac{1}{2}ab$.

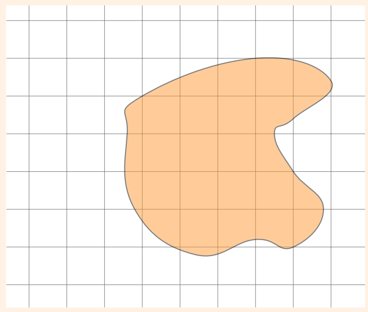
Aufgabe 6 (Die Gittermethode zur Flächeninhaltsbestimmung)

In verschiedenen aktuellen Schulbüchern der Jahrgangsstufe 5 (Lambacher Schweizer 5, (Hußmann et al., 2007, S. 116), Mathematik Neue Wege 5, (Lergenmüller & Schmidt, 2005, S. 190)) findet man die *Gittermethode* zum Schätzen von Flächeninhalten:

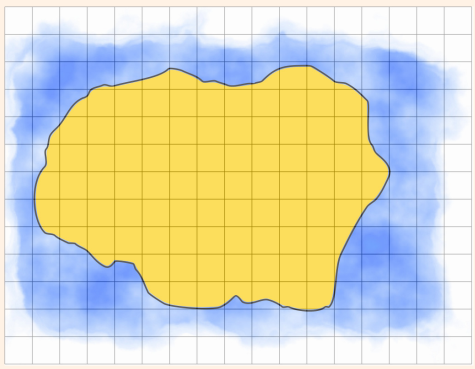
Die folgenden Aufgaben wurden wörtlich aus Schulbüchern übernommen. Graphische Darstellungen wurden abgezeichnet.

Stelle dir zwei Quadratgitter auf Folie oder durchscheinendem Papier her. Seitenlänge der Karos: 1cm bzw. 0,5 cm.

Durch Auslegen mit Plättchen kann man auch krummlinig begrenzte Flächen vergleichen. Benutzt man ein Quadratgitter und legt es über die Fläche, so lässt sich deren Größe abschätzen.
Die nebenstehende Figur ist etwa so groß wie 22 Karos.



Schätzmethode 2: „**Gittermethode**“
Wir legen eine Gitterfolie mit kleinen Quadraten über die Insel. (Es gibt solche Klarsichtfolien mit Milimeterpapier.) In unserem Fall ist die Seite eines Quadrates gerade $0,4\,cm$, dies entspricht $1\,km$ in der Wirklichkeit. Ein Quadrat hat somit die Fläche von $1\,km^2$. Wir zählen etwa 82 Quadrate, die die Insel überdecken. Damit schätzen wir eine Fläche von $82\,km^2$.



a) Analysieren Sie die Gittermethode fachmathematisch, indem Sie das Verfahren auf den Jordan-Inhalt zurückführen. Gehen Sie dabei insbesondere auf den Hinweis links im oberen Bild ein.

b) Analysieren Sie, welche Aspekte und Kontexte des *Messens* bei der Lösung dieser Aufgabe vorkommen.

Hinweis: Nutzen Sie ggf. Weigand et al. (2014, S. 158 ff.)

Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 6 Zu a): In den Schulbüchern wird nicht deutlich, wie die Kästchen gezählt werden, die die Fläche nur zum Teil beinhalten. Dennoch geben Außeninhalt und Inneninhalt eine obere und untere Schranke für diese Abschätzung an. Der Hinweise lässt sich fachmathematisch mit dem Konzept der Verfeinerung verbinden.

In b) ist wieder das Anwenden einer mathematikdidaktischen Konzeption auf ein gegebenes Beispiel erforderlich.

Zusammenfassendes

In dem vorgestellten Teil eines Schnittstellenmoduls wurde der Jordaninhalt im zweidimensionalen Fall mit der üblichen Flächeninhaltsvorstellung verbunden. Die bei der Definition des Jordaninhalts auftretenden Grenzprozesse wurden mit Approximationsverfahren aus der Schulmathematik verknüpft. Dabei wurde immer wieder Rückbezug auf verschiedene Inhalte der Einführung der mehrdimensionalen Riemann-Integration genommen. Desweiteren wurde an verschiedenen Stellen der Prozess des Messens aus mathematikdidaktischer Sicht betrachtet. Somit wird deutlich, dass die vorgestellte Lehr-/Lerneinheit in der Tat das Potenzial hat, mathematikbezogene Schnittstellenkompetenz zu fördern.

4.3.2 Schnittstelle: Das Prinzip des Cavalieri: Zwischen dem *Satz von Fubini* und der Schulmathematik

Der Satz von Fubini (siehe B.5.2) liefert eine Möglichkeit mehrdimensionale Integration auf iterierte eindimensionale Integration zurückzuführen. Für $n = 3$ bedeutet dies, dass ein Körpervolumen via Integration über die Querschnittsflächen auf verschiedenen Höhen berechnet werden kann, solange diese Querschnittsflächen Jordan-messbar sind. Genau auf dieser Idee beruht die Schulvariante des *Prinzips von Cavalieri*, das die Volumengleichheit zweier Körper mit gleicher Grundfläche auf die Flächengleichheit der zur Grundfläche parallelen Querschnitte auf jeder Höhe zurückführt. Das zweidimensionale Analogon dieses Konzeptes findet sich auch in den in den üblichen Flächeninhaltsformeln für beispielsweise Dreiecke und Trapeze wieder.

Formuliert man das Prinzip des Cavalieri für eine beliebige Dimension n mit den Mitteln der mehrdimensionalen Riemann-Integration, ist es im Wesentlichen ein Corollar des Satzes von Fubini und findet sich im Skript unter B.6.12. Im Folgenden wird es noch einmal genannt:

Satz 4.3.3 (Prinzip des Cavalieri)
Seien $Q \subset \mathbb{R}^n, I \subset \mathbb{R}$ Quader und $A \subset Q \times I \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Jordan-messbare Menge. Für $h \in I$ definieren wir den Querschnitt auf der Höhe h durch

$$A_h := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, h) \in A\}.$$

Ist A_h für jedes $h \in I$ Jordan-messbar, so gilt

$$\text{J-vol}_{n+1}(A) = \int_I \text{J-vol}_n(A_h) \, dh.$$

Ausgewählte intendierte Lernergebnisse

Die Studierenden

(LE 1) nutzen ihr Wissen über mehrdimensionale Riemann-Integration, um das *Prinzip des Cavalieri*, wie es in der Schule formuliert wird, mathematisch präzise zu beschreiben (Schaffen, begriffliches Wissen)

(LE 2) führen das Prinzip des Cavalieri auf einen Spezialfall des Satzes von Fubini zurück (Verstehen, Faktenwissen)

(LE 3) nutzen das Prinzip des Cavalieri zum Nachweis typischer, aus der Schulmathematik bekannter, Inhaltsformeln (Anwenden, Faktenwissen)

(LE 4) formulieren das Prinzip des Cavalieri für den zweidimensionalen Fall (Erinnern, Faktenwissen)

(LE 5) entwerfen begründet eine für SuS der Unterstufe verständliche Darstellung des Cavalieri-Prinzips und dessen Begründung (Bewerten und Schaffen, begriffliches Wissen)

(LE 6) beurteilen für typische Flächeninhaltsformeln der Schulmathematik, ob das Cavalieri-Prinzip in diesen entdeckbar ist (Bewerten, Faktenwissen und begriffliches Wissen)

(LE 7) vergleichen das Cavalieri-Prinzip und Zerlegebeweise in Bezug auf den Einsatz zur Begründung von Flächeninhaltsformeln unter Verwendung mathematikdidaktischer Theorien (Bewerten, Faktenwissen und Begriffliches Wissen)

(LE 8) entwerfen eine Lerneinheit für SuS der Oberstufe zur Berechnung von Volumina über die Funktion der Querschnittsflächen (Schaffen, begriffliches Wissen)

(LE 9) analysieren den Zugang zur Volumenberechnung aus dem vorigen Lernziel aus mathematikdidaktischer Sicht (Analysieren, begriffliches Wissen und Faktenwissen)

(LE 10) vergleichen den Zugang zur Volumenberechnung aus dem vorigen Lernziel mit dem Konzept des Rotationsvolumens aus mathematischer und mathematikdidaktischer Sicht (Analysieren und Bewerten, Begriffliches Wissen)

Aufbau der Lehr-/Lerneinheit

Die *Voraussetzungen* bestehen in der komplette Behandlung des Skriptes aus Anhang B bis auf das Cavalieri-Prinzip (B.6.12), da sowohl der Satz von Fubini als auch der Jordan-Inhalt benötigt werden.

Beschreibung des Vorgehens Ausgehend von einer Möglichkeit, wie in der Schule kompliziertere Volumina ausgerechnet werden, soll ein präziser mathematischer Satz formuliert und bewiesen werden. Wir starten mit dem folgenden Schulbuchauszug.

Satz des Cavalieri:
Wenn für zwei Körper gilt:
(1) Die Flächeninhalte der Grundflächen sind gleich: $G_1 = G_2$;
(2) Sie haben gleiche Höhen;
(3) Schnittflächen im gleichen Abstand parallel zur Grundfläche haben den gleichen Flächeninhalt: $S_1 = S_2$,
dann haben beide Körper das gleiche Volumen.

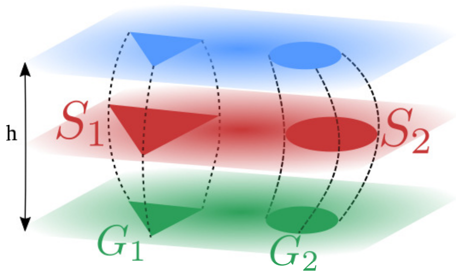


Abbildung 4.5: Aus: *Lambacher Schweizer 10, NRW (graue Ausgabe), (Schmid & Weidig, 1996, S. 116)*, (Grafik abgezeichnet)

Offensichtlich geht es um den Vergleich von Volumina bestimmter Körper. Die Ausgangsfrage soll sein:

> Wie können wir den *Satz des Cavalieri* aus dem Schulbuch unter Verwendung des Jordan-Inhalts fachmathematisch präzise formulieren?

Die folgenden Aspekte kann man mit den Studierenden im Gespräch erarbeiten. „Körper" können wir als Punktmengen im $\mathbb{R}^3$ auffassen. Seien also $A, B \subset \mathbb{R}^3$ (nichtleer) die beiden Körper. Die Skizze (Fig. 3 in Abbildung 4.5) legt die Annahme der Existenz eines Quaders $Q' \subset \mathbb{R}^3$ nahe mit $A, B \in Q'$. Ohne Einschränkung wollen wir die Grundflächen der zu betrachtenden Körper als parallel zur x_1x_2-Ebene ansehen. Da wir Querschnitte parallel zur Grundfläche in verschiedenen Höhen (also x_3-Koordinaten) betrachten wollen, ist es sinnvoll, Quader $Q \subset \mathbb{R}^2$ und $I \subset \mathbb{R}$ so zu wählen, dass $Q' = Q \times I$ ist. Das I beschreibt die „Höhenachse" und das Q die in Fig. 3 farbig markierten Rechtecke auf verschiedenen Höhen. In einer *Studierendenarbeitsphase* kann nun Aufgabe 7 bearbeitet werden.

Aufgabe 7 (Beschreibung von Querschnittsflächen)
Geben Sie eine formale Definition für die Querschnittsflächen $A(h)$ und $B(h)$ von A bzw. B auf der Höhe h an. Überlegen Sie sich dazu zunächst den Definitionsbereich für h.

Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 7 Sei $h \in I$. Dann definieren wir

$$A(h) = \{x \in Q \mid (x,h) \in A\} \quad \text{und} \quad B(h) = \{x \in Q \mid (x,h) \in B\}.$$

Direkt im Anschluss kann man nun die Schulversion des Satzes von Cavalieri erarbeiten (vgl. Aufgabe 8).

Aufgabe 8 (Satz des Cavalieri (Schulversion))
Formulieren Sie den Satz des Cavalieri analog zum Schulbuchauszug aus Abbildung 4.5 unter Verwendung des Jordan-Inhalts.

Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 8 Seien $A, B \subset \mathbb{R}^3$ Jordan-messbar und seien $Q \subset \mathbb{R}^2$ und $I \subset \mathbb{R}$ Quader mit $A, B \in Q \times I$. Wir definieren

$$A(h) = \{x \in Q \mid (x, h) \in A\} \quad \text{und} \quad B(h) = \{x \in Q \mid (x, h) \in B\}.$$

Wenn nun für jedes $h \in I$ gilt, dass $A(h)$ und $B(h)$ Jordan-messbar sind und außerdem $\text{J-vol}_2\,(A(h)) = \text{J-vol}_2\,(B(h))$, dann ist $\text{J-vol}_3\,(A) = \text{J-vol}_3\,(B)$.

Dieser Satz soll an dieser Stelle noch nicht bewiesen werden. Zunächst analysieren wir die genaue Aussage des formulierten Satzes. Der Satz liefert eine Möglichkeit, das Volumen zweier Körper unter gewissen Voraussetzungen zu vergleichen. Nicht Bestandteil des Satzes ist eine Aussage über die Berechnung des Volumens. In der Schule wird of wie folgt argumentiert: „Wenn man das Volumen von einem der beiden Körper bestimmen kann, hat man auch das Volumen des anderen Körpers.“ Die mathematisch präzise Formulierung ermöglicht nun aber eine Idee für die explizite Berechnung eines Körpervolumens: Offenbar hängt das Volumen vom Intervall I und dem Querschnitt zu jeder „$h \in I$“ ab. Über die anschauliche Idee, den Körper in kleine Scheiben zu schneiden, die näherungsweise quaderförmig sind, und diese dann aufzuaddieren kommt man sofort zu folgender Vermutung:

Satz 4.3.4 (Cavalieri (dreidimensional))
Sei $A \subset \mathbb{R}^3$ *nichtleer und Jordan-messbar und seien* $Q \subset \mathbb{R}^2$ *und* $I \subset \mathbb{R}$ *Quader mit* $A \in Q \times I$. *Für* $h \in I$ *definieren wir den Querschnitt auf der Höhe* h *durch*

$$A(h) = \{x \in Q \mid (x, h) \in A\}.$$

Ist $A(h)$ *für jedes* $h \in I$ *Jordan-messbar, so gilt*

$$\text{J-vol}_3\,(A) = \int_I \text{J-vol}_2\,(A(h))\ dh.$$

Durch die Überlegung

$$\int_{Q\times I} \mathbb{1}_A(x)\ dx = \int_A 1\ dx = \text{J-vol}_3\,(A) = \int_I \text{J-vol}_2\,(A(h))\ dh = \int_I \left(\int_{A(h)} 1\ dx \right)\ dh$$

sieht man, dass es sich bei der Aussage um einen Spezialfall des Satzes von Fubini (siehe B.5.2) handelt. Das Prinzip von Cavalieri für beliebige Dimension, samt formalem Beweis findet man bei B.6.12; der Beweis der Schulversion folgt sofort[4].

Das Prinzip des Cavalieri bietet nun eine Vielzahl von Anküpfungspunkten zur Schulmathematik. Einige davon werden in den folgenden (nichttrivialen) Übungsaufgaben verarbeitet, die in Präsenz und/oder Hausübungen verwendet werden können. Dazu gehört insbesondere der Nachweis verschiedener Inhaltsformeln, die in der Schule anders, oder nur anschaulich bewiesen werden. Diese Nachweise sind Bestandteil der Aufgaben 10, 9, 11 und 13, die somit Schnittstellenaufgaben im Sinne der wechselseitigen Verknüpfung von Schulmathematik und Hochschulmathematik sind. In den Aufgaben 12 und 14 spielen außerdem mathematikdidaktische Bezüge eine Rolle. Es wird versucht,

[4]Man braucht die Translationsinvarianz des Jordan-Inhalts.

die Grundidee des Cavalieri-Prinzips sowohl auf die Sekundarstufe I, als auch auf die Sekundarstufe II (Mathematik) zu übertragen.

Aufgabe 9 (Kreisinhalt)
Bestimme den Flächeninhalt eines Kreises K mit Radius r mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri.

Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 9 Sei $I = [-r, r]$. Wir wählen $Q = I^2$. Dann ist ohne Einschränkung $K \subset Q$. Für $h \in I$ gilt für die Querschnittslänge auf der Höhe h nach der Kreisgleichung

$$K(h) = 2\sqrt{r^2 - h^2}.$$

Dabei ist $K(h)$ als eindimensionaler Quader Jordan-messbar. Mit dem Prinzip von Cavalieri gilt

$$\text{J-vol}_2\,(K) = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - h^2}\ dh = 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - h^2}\ dh$$

Mit Substitution von zunächst $h = r \sin u$ und später $s = 2u$ erhält man

$$\text{J-vol}_2\,(K) = 2 \cdot \left[\frac{1}{2}\left(rh\sqrt{1 - \frac{h^2}{r^2}} + r^2 \arcsin\left(\frac{h}{r}\right)\right)\right]_{-r}^{r} = r^2\,(\arcsin(1) - \arcsin(-1)) = \left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\right) r^2 = \pi r^2$$

Aufgabe 10 (Rechteckige Pyramide)
Bestimme die Formel für das Volumen einer Pyramide $P \subset \mathbb{R}^3$ mit rechteckiger Grundfläche (Seitenlängen a, b) und Höhe h_P mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri.

Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 10 Sei $Q = [0, a] \times [0, b]$ und $I = [0, h_P]$. Dann ist ohne Einschränkung $P \in Q \times I$. Für $h \in I$ gilt für die Querschnittsfläche $P(h)$ z. B. mit dem Strahlensatz

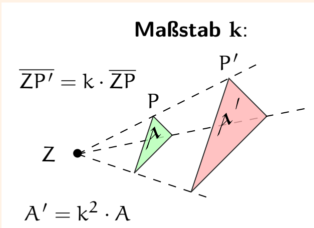
$$P(h) = ab\left(1 - \frac{h}{h_P}\right)^2 = ab\left(1 - \frac{2h}{h_P} + \frac{h^2}{h_P^2}\right).$$

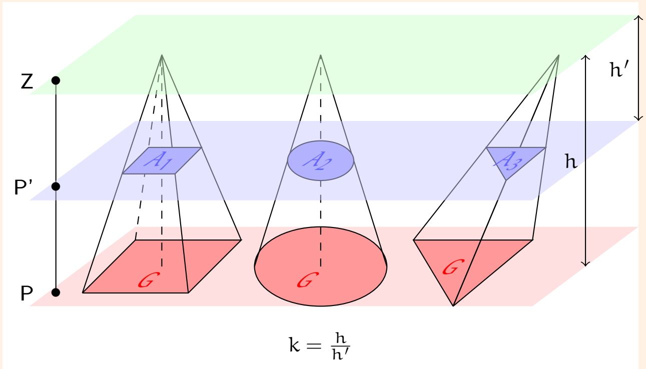
Dabei muss erwähnt werden, dass die Querschnittsflächen als zweidimensionale Quader Jordan-messbar sind. Cavalieri liefert nun

$$\begin{aligned}
\text{J-vol}_3\,(P) &= \int_0^{h_P} ab\left(1 - \frac{2h}{h_P} + \frac{h^2}{h_P^2}\right)\ dh \\
&= ab\left(\int_0^{h_P} 1\ dh - \frac{2}{h_P}\int_0^{h_P} h\ dh + \frac{1}{h_P^2}\int_0^{h_P} h^2\ dh\right) \\
&= ab\left(h_P - \frac{2}{h_P}\cdot\frac{1}{2}\cdot h_P^2 + \frac{1}{h_P^2}\cdot\frac{1}{3}\cdot h_P^3\right) \\
&= ab\left(h_P - h_p + \frac{1}{3}h_P\right) \\
&= \frac{1}{3}\cdot(a\cdot b)\cdot h_P.
\end{aligned}$$

Aufgabe 11 (Kegelvolumen)

In der Schule wird die Formel für das Kegelvolumen oft über die Pyramidenvolumenformel und das Cavalieri-Prinzip begründet. Dazu vergleiche auch die folgende Abbildung aus *Maßstab 10, (Schröder, Wurl & Wynands, 2008, S. 92)* (abgezeichnet):





Alle 3 Spitzkörper haben gleich große Grundflächen und gleiche Höhe.

Begründe: Alle Pyramiden und Kegel mit gleich großer Grundfläche und gleicher Höhe haben gleiches Volumen.

Beweise die Formel für das Kegelvolumen (Radius r, Höhe h_K) mit Hilfe von Aufgabe 10 und 9, sowie des Prinzips von Cavalieri.

Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 11 Wähle $a = \sqrt{\pi r^2} = \sqrt{p}r$ als Kantenlänge einer quadratischen Pyramidengrundfläche. Dann folgt sofort $\text{J-vol}_3\,(K) = \frac{1}{3} \cdot (\pi \cdot r^3) \cdot h_K$ aus den Aufgaben und dem Prinzip von Cavalieri.

Aufgabe 12 (Der zweidimensionale Cavalieri)

a) Formulieren Sie eine zweidimensionale Version des Prinzips des Cavalieri, die für SuS der Unterstufe verständlich sein soll.

b) Entwickeln Sie unter Verwendung dynamischer Geometriesoftware eine Lernumgebung, die das Entdecken des zweidimensionalen Cavalieri-Prinzips unterstützt. Begründen Sie Ihre Gestaltung.

c) Überlegen Sie sich eine Begründung des zweidimensionalen Cavalieri-Prinzips, die für SuS der Unterstufe zugänglich ist.

d) In welchen typischen Flächeninhaltsformeln kann man das Konzept des zweidimensionalen Cavalieri-Prinzips entdecken. Nennen Sie mindestens zwei Beispiele und erläutern Sie ihre Wahl.

e) Diskutieren Sie: Wie unterscheiden sich aus mathematikdidaktischer Sicht Begründungen von Flächeninhaltsformeln über Zerlegungen von Begründungen mit Hilfe des Cavalieri-Prinzips.

Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 12 Bei dieser Aufgabe kann das Cavalieri-Prinzip für den zweidimensionalen Fall beispielsweise als eine dynamische Sichtweise auf die Gleichheit von Flächen gesehen werden: Die Gleichheit zweier Flächen kann man mit Cavalieri begründen, wenn sie durch eine Scherung (und eventuelle eine Translation) ineinander übergehen. Somit erweist sich der Einsatz dynamischer Geometriesoftware als nützlich. Die Besprechung der Aufgabe kann auch ein Ausgangspunkt für eine Beschäftigung mit der Translationsinvarianz des Jordan-Inhalts sein.

Aufgabe 13 (Kugelvolumen)
Bestimme das Volumen einer Kugel K mit Radius r mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri.

Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 13 Sei $I = [-r, r]$ und $Q = I^2$. Dann ist ohne Einschränkung $K \subset Q \times I$. Für $h \in I$ gilt für die Querschnittsfläche auf Höhe h nach Aufgabe 9 und der Kreisgleichung $K(h) = \pi r^2 - \pi h^2$. Dabei ist $K(h)$ als Kreisschreibe Jordan-messbar. Mit dem Prinzip von Cavalieri gilt

$$\begin{aligned} \text{J-vol}_3(K) &= \int_{-r}^{r} \pi r^2 - \pi h^2 \, dh \\ &= 2\pi r^3 - \pi \left[\frac{1}{3}h^3\right]_{-r}^{r} \\ &= 2\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

Aufgabe 14 (Querschnittsflächenfunktionen)
Sei K ein Körper im $\mathbb{R}^3$, der die Höhe h_K hat, und dessen Jordan-Inhalt der Querschnittsfläche für jedes $h \in [0, h_K]$ durch eine Funktion $q_K : [0, h_K] \to \mathbb{R}_{\geq 0}, h \mapsto q_K(h)$ gegeben ist. q_K nennen wir die *Querschnittsflächenfunktion* von K.

a) Entwickeln Sie eine Lerneinheit für einen Oberstufenkurs im Rahmen der Integralrechnung, die Querschnittsflächenfunktionen nutzt um Volumina verschiedener Körper auszurechnen. Die SuS sollen sich das Verfahren mit Hilfe der Lerneinheit selbstständig erarbeiten können.

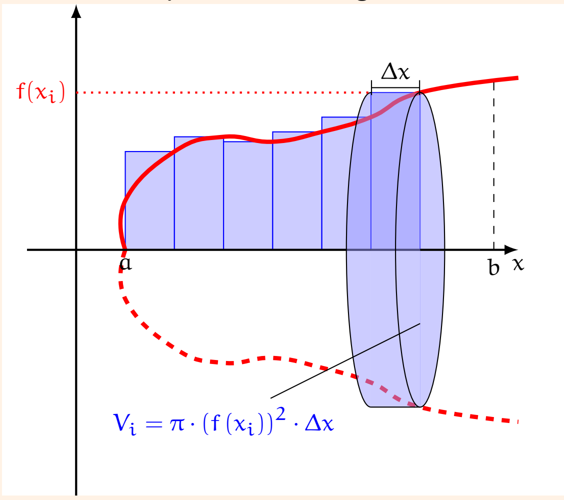
   Hinweis: Nutzen Sie Ihr Wissen über das Prinzip des Cavalieri. Hilfreich können auch die vorangegangenen Aufgaben sein.

b) Untersuchen Sie den Zugang zur Volumenmessung auf die vorkommenden Aspekte des Messens (Weigand et al., 2014, S. 158 ff.) sowie auf die angesprochenen Aspekte und Grundvorstellungen des Integrals (Greefrath et al., 2016, S. 238 ff.).

c) Vergleichen Sie den Zugang zur Volumenberechnung über *Querschnittsflächenfunktionen* mit der Volumenberechnung über *Rotationskörper* fachmathematisch und fachdidaktisch. Ausgangspunkt kann der folgende Auszug aus *Neue Wege, Analysis II, (Schmidt, Körner & Lergenmüller, 2011, S. 172)* (Abbildung abgezeichnet) sein. Recherchieren Sie aber auch gerne in weiteren Schulbüchern.

Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers mit dem Integral

Die Fläche unter dem Graphen von f im Intervall $[a, b]$ rotiert um die x-Achse. Wir unterteilen das Intervall in n kleine Abschnitte der Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Jeder der dadurch entstehenden Rechteckstreifen der „Höhe“ $f(x_i)$ erzeugt bei der Rotation eine Zylinderscheibe. Die Summe der Volumina dieser Zylinderscheiben liefert dann einen guten Näherungswert für das Volumen des Rotationskörpers.



$$V \approx \pi \cdot (f(x_1))^2 \cdot \Delta x + \pi \cdot (f(x_2))^2 \cdot \Delta x + \ldots + \pi \cdot (f(x_n))^2 \cdot \Delta x = \pi \cdot \sum_{k=1}^{n} (f(x_k))^2 \cdot \Delta x$$

Der Grenzwert dieser Produktsummen kann als Integral berechnet werden.

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 14 In dieser Aufgabe wird ein Zugang zur exakten Volumenbestimmung vorgestellt, der auf dem Prinzip von Cavalieri beruht, aber mit dem Mitteln den in der Schule vorhandenen Integrationsmöglichkeiten auskommt. Für die Lösung der Aufgabe ist es erforderlich die gelernten fachmathematischen Konzepte begrifflich verstanden zu haben. Nur so können die zentralen Ideen zur Konzeption der Unterrichtseinheit verwendet werden. Außerdem wird wieder die Anwendung einer mathematikdidaktischen Konzeption gefordert und in c) wird der Ansatz verküpft mit dem bekannten Ansatz über das Rotationsvolumen. Dieser kann auch fachmathematisch als Spezialfall des Zugangs über die Querschnittsflächenfunktionen analysiert werden.

Zusammenfassendes

In diesem Teil der Lerneinheit wurde das Prinzip des Cavalieri, wie es in der Schule zum Vergleich von Körpervolumina verwendet wird, mit Hilfe der Riemann-Integrationstheorie und insbesondere des Jordaninhalts allgemein formuliert. Dabei wurde festgestellt, dass es sich um einen Spezialfall des Satzes von Fubini handelt. Das Prinzip erwies sich als hilfreich zum Nachweis verschiedener bekannter Volumenformeln. Die grundlegende Idee kann auch Anwendung bei der Betrachtung von Flächeninhalten in der Unterstufe sowie bei der Integralrechnung in der Oberstufe finden. Diese vielen Verknüpfungen machen deutlich, dass auch das Prinzip des Cavalieri einen guten Ausgangspunkt zur Entwicklung mathematikbezogener Schnittstellenkompetenz liefert.

4.3.3 Schnittstelle: Vom Ein- ins Mehrdimensionale – Grundvorstellungen und Aspekte der Integralrechnung

Ein bereits erwähnter Vorteil des Zugangs zur mehrdimensionalen Integrationstheorie über das Riemann-Integral ist die Anschlussfähigkeit an den eindimensionalen Zugang. Bezogen auf die schulmathematische Integralrechnung werden in der Mathematikdidaktik verschiedene Aspekte und Grundvorstellungen der (eindimensionalen) Integration unterschieden. Eine sich logisch ergebende Frage ist die Erweiterbarkeit dieser Konzepte auf den mehrdimensionalen Fall.[5] Hierfür soll eine Schnittstellenaufgabe vorgestellt werden, die im Anschluss an die Einführung des mehrdimensionalen Riemann-Integrals dazu genutzt werden kann, die einzelnen Schritte noch einmal nachzuvollziehen und mit mathematikdidaktischen Konzepten zu verknüpfen.

An dieser Stelle wird keine umfassende Lehr-/Lerneinheit beschrieben. Grund hierfür ist das Ziel, ein Beispiel zu geben, wie der Aufbau mathematikbezogener Schnittstellenkompetenz durch eine selbstständige Erarbeitung der Studierenden einhergeht mit einer Wiederholung der gelernten Fachinhalte. Eine entsprechende Schnittstellenaufgabe erweist sich als probates Mittel.

Ausgewählte intendierte Lernergebnisse und dementsprechende Schnittstellenaufgabe

Die Studierenden

(LE 1) machen sich die einzelnen Schritte bei der Konstruktion des mehrdimensionalen Riemann-Integrals klar (Verstehen, Faktenwissen und begriffliches Wissen)

(LE 2) machen sich die mathematikdidaktischen Kategorien „Aspekte“ und „Grundvorstellungen“ mit Hilfe eines Lehrbuches klar (Verstehen, Faktenwissen)

(LE 3) bewerten die mehrdimensionale Erweiterbarkeit der Aspekte und Grundvorstellungen zur (eindimensionalen) Integration (Analysieren und Bewerten, begriffliches Wissen)

Aufgabe 15 (Grundvorstellungen und Aspekte des Riemann-Integrals)

a) Lesen Sie Greefrath et al. (2016, S. 238–256).

b) Welche der vorgestellten Grundvorstellungen und Aspekte lassen sich auch auf das mehrdimensionale Riemann-Integral übertragen. Begründen Sie ihre Antworten.

Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 15 Es wird schnell deutlich, das der gewählte Zugang vor allem durch die Vorstellung der Volumenmessung getragen wird. Aspekte und Grundvorstellungen, die sich auf die Beziehung zur Differenzialrechnung beziehen, spielen (zunächst) keine Rolle mehr.

[5] An dieser Stelle muss erwähnt werden, dass in der Tat auch der Hauptsatz über den *Satz von Stokes* auf die mehrdimensionale Integration verallgemeinerbar ist. Soweit reichen aber die beschriebenen fachlichen Grundlagen für die MIU nicht.

4.4 Zusammenfassendes

In diesem Kapitel wurde das in Kapitel 3 vorgestellte Konzept der *fachmathematischen Schnittstellenmodule* anhand eines ersten praktischen Beispiels umgesetzt. Als grober fachmathematischer Rahmen wurde der Bereich der mehrdimensionalen Integrationstheorie gewählt. In Abschnitt 4.1 wurden zunächst zwei Zugänge – Riemann und Lebesgue – vorgestellt und diskutiert. Außerdem wurden jeweils mögliche Bezüge zum Aufbau mathematikbezogener Schnittstellenkompetenz besprochen. Schlussendlich wurde dann eine Entscheidung für das Riemann-Integral getroffen – in Anhang B findet sich ein dementsprechendes Skript. Für dieses Beispiel wurden für zwei Schnittstellen Vorschläge für ausführliche Lehr-/Lerneinheiten vorgestellt. Zusätzlich wurde noch für eine weitere Schnittstelle eine entsprechende Schnittstellenaufgabe vorgestellt.

In diesem Kapitel wurde allerdings nicht explizit auf den Bereich des kompetenzorientierten Prüfens eingegangen, da in dem Bereich in Kapitel 2 auch keine konzeptionellen Grundlagen gelegt wurden. Ein erster Ansatzpunkt kann aber sein, dass sich die vorgestellten Aufgaben auch als Prüfungsaufgaben verwenden lassen, die explizit MSK mit abprüfen. Über weitere Aspekte des Prüfens, wie bspw. die Verwendung alternativer Prüfungsformen, soll an dieser Stelle nicht gesprochen werden.

Die vorgestellten Beispiele bilden selbstverständlich nicht das vollständige Schnittstellenpotenzial der Thematik ab, geben aber einen Einblick in Möglichkeiten der praktischen Umsetzung. Der nächste Schritt – auch im Sinne des Vorgehensmodells (B), S. 43 – wäre nun die praktische Erprobung des Entworfenen. Dies kann aber im Rahmen dieser Arbeit nicht geleistet werden. Das Sammeln praktischer Erfahrungen ermöglicht außerdem ein besseres Gefühl für die Formulierung von sinnvollen Lernzielen – die in diesem Kapitel vorgestellten intendierten Lernergebnisse sind als erster, vorläufiger Vorschlag zusehen. Festzustellen ist, dass bei der Formulierung von Lernzielen die Kategorien der Wissensdimension der verwendeten Taxonomie nicht gut anwendbar waren, da sie die Komplexität des Lehrerwissens nicht erfassen. Dies stellt auf jeden Fall eine notwendige Optimierungsmöglichkeit für den Entwurf weiterer Schnittstellenaktivitäten dar. Eine tiefergehende Reflexion des Gesamtkonzepts wird Bestandteil des folgenden, letzten Kapitels sein.

Kapitel 5

Reflexion, Fazit und Ausblick

5.1 Rückschau

In der vorliegenden Arbeit wurde das Konzept sogenannter *fachmathematischer Schnittstellenmodule (MIU)* für die gymnasiale Lehramtsausbildung entwickelt und beispielhaft für den Bereich der mehrdimensionalen Integrationstheorie umgesetzt.

In Kapitel 2 wurden zunächst konzeptionelle Grundlagen vorgestellt, die relevant in Bezug auf die Entwicklung von Innovationen in der universitären Lehramtsausbildung sind. Dazu gehören formale Rahmenbedingungen (2.1), Konzepte zur Kompetenzorientierung (2.2), Konzepte zur Beschreibung von professionellem Lehrerwissen (2.3) sowie eine Darstellung der Problematik der *doppelten Diskontinuität* und zugehörige Lösungsansätze (2.4). Dabei wurden insbesondere die Arbeiten zu *Schnittstellenaktivitäten* von Bauer (2.4.2) vorgestellt.

Für die Beschreibung professionellen Lehrerwissens liefert die Arbeitsgruppe um Ball und Bass (Michigan) mit dem Konzept des *Mathematical Knowledge for Teaching* eine differenzierte Aufteilung mathematikbezogener Wissenskomponenten (S. 16). Das deutsche COACTIV-Projekt liefert nützliche Modelle zur Beschreibung der Gesamtstruktur und des Erwerbs professioneller Lehrerkompetenz (S. 21). Die Arbeiten beider Forschergruppen bauen auf der *Knowledge Base of Teachers* von Lee Shulman auf.

In Kapitel 3 wurde durch eine Analyse der aktuellen Mathematiklehramtsausbildung an der Universität Paderborn die Anschlussfähigkeit mathematischen Fachwissens problematisiert. Auf dieses Problem zielend wurde die folgende Forschungsfrage ((A), S. 35) formuliert:

> Wie können Lehr-/Lernsituationen im Rahmen des gymnasialen Mathematiklehramtsstudiums so gestaltet werden, dass sie den Erwerb anschlussfähiger fachmathematischer Inhalte unterstützen? „Anschlussfähig“ heißt in diesem Fall die gewinnbringende Nutzbarkeit für den Erwerb weiterer professionsbezogener Kompetenzen sowie im späteren Berufsalltag.

Entsprechend des dieser Arbeit zugrunde liegenden Forschungsdesigns (3.1.2) wurde mit dem *Schnittstellen-Tetraeder* (S. 36) ein Modell zur Beschreibung von Schnittstellen in der Mathematiklehrerausbildung vorgestellt. Ein wesentlicher Bestandteil war die *mathematikbezogene Schnittstellen-*

kompetenz (MSK) als Kompetenz zur Verbindung von Schulmathematik, Hochschulmathematik und Mathematikdidaktik.

Basierend auf diesem Modell konnten *fachmathematische Schnittstellenmodule* als solche Lehr-/Lerneinheiten definiert werden, die den Erwerb von MSK im Rahmen einer fachmathematisch ausgerichteten Veranstaltung unterstützen (S. 40). Anschließend wurden verschiedene Aspekte für den Entwurf solcher Module diskutiert und ein mehrschrittes Vorgehensmodell vorgeschlagen (B), S. 43. Darauf aufbauend wurde das *Vier-Phasen-Modell für die Verwendung fachmathematischer Schnittstellenmodule* entwickelt (S. 44).

Basierend diesen Betrachtungen wurden die folgendenden Hypothesen ((C), S. 44 und (D), S. 45) für die Beantwortung der Forschungsfrage ((A), S. 35) aufgestellt:

- Fachmathematische Schnittstellenmodule (entwickelt nach dem Vorgehen aus (B), S. 43) bilden eine Möglichkeit, Lehr-/Lernsituationen zum Erwerb anschlussfähiger fachmathematischer Inhalte (im Sinne der Forschungsfrage ((A), S. 35)) zu gestalten.
- Fachmathematische Schnittstellenmodule (entwickelt unter Beachtung der vorgestellten Aspekte) wirken motivierend auf Lehramtsstudierende und erhöhen die Wahrscheinlichkeit, dass die Lehramststudierenden fachmathematische Inhalte als gewinnbringend in Bezug auf die spätere Unterrichtstätigkeit einschätzen.

Abschließend wurden in Kapitel 4 am Beispiel einer Veranstaltung zur mehrdimensionalen Integrationstheorie mögliche Teile einer MIU nach dem Vorgehensmodell (B), S. 43 entworfen und vorgestellt. Dabei wurden vor allem zwei Schnittstellen detailliert betrachtet: In 4.3.1 wurde der *Jordan-Inhalt* in Bezug zum Messen von Flächen durch Auslegen und Approximation gesetzt und so eine Lehr-/Lerngelegenheit konzipiert, die den Erwerb von MSK unterstützt. In 4.3.2 wurden verschiedene Bezüge zwischen Fachmathematik, Schulmathematik und Mathematikdidaktik unter Verwendung des *Prinzips des Cavalieri* als Spezialfall des *Satzes von Fubini* behandelt.

Somit wurde deutlich, wie eine Veranstaltung zur mehrdimensionalen Riemann-Integration genutzt werden kann, um neben fachmathematischem Wissen auch explizit mathematikbezogene Schnittstellenkompetenz in den Fokus der intendierten Lernziele zu nehmen, und somit zu einer MIU im Sinne der entwickelten Konzeption wird.

5.2 Reflexion im Kontext der Forschungsfrage

Es gilt nun zu diskutieren, inwieweit die vorliegende Arbeit zur Beantwortung der Forschungsfrage ((A), S. 35) und insbesondere zum Verifizieren oder Falsifizieren der Hypothesen (C), S. 44 , (D), S. 45 beiträgt.

Zunächst soll dazu die Entwicklung der expliziten Schnittstelleneinheiten reflektiert werden. Festzuhalten ist, dass in dem gegebenen fachmathematischen Rahmen in der Tat mehrere Schnittstellen identifizierbar waren. Die entwickelten Vorgehensweisen und Aufgabenstellungen verknüpfen tatsächlich schulmathematisches, fachmathematisches und mathematikdidaktisches Wissen miteinander. Für den Entwurf war es erforderlich, sich sowohl in den fachwissenschaftlichen als auch in den fachdidaktischen Themengebieten auszukennen. Dies bedeutet, dass die Konzeption von Schnittstellenmodulen Personen mit entsprechend umfassender Expertise benötigt.

Im Sinne der Kompetenzorientierung konnten die vorgestellten Einheiten nicht der Forderung gerecht werden, durchgehend nach didaktischen Forschungsergebnissen entworfen zu sein. Dazu fehlt es schlichtweg an entsprechender Forschung.

Für die sinnvolle Formulierung intendierter Lernergebnisse haben sich die Wissenskategorien der taxonomischen Matrix als nicht hilfreich für die Klassifikation erwiesen, da es nicht möglich war, die vielschichten Lernergebnisse sinnvoll abzubilden.

Das vorgestellte Schnittstellenmodul war so konzipiert, dass ihm eine separate Lehramtsveranstaltung zu Grunde lag. Jedoch können die entwickelten Aufgaben genauso in einer gemischten Veranstaltung eingesetzt werden.

Was die vorliegende Arbeit liefert, ist die Vorstellung eines Vorschlages (MIUs) für eine Lehr-/Lerneinheit im Sinne der Forschungsfrage. Dabei ist die Entwicklung unter ständigem Rückbezug auf etablierte theoretische Konzeptionen vollzogen worden. Dies spricht für die Plausibilität der Hypothesen. Durch die Präsentation von Beispielen für Teile eines Schnittstellenmoduls konnte außerdem gezeigt werden, dass das Vorgehensmodell grundsätzlich umsetzbar ist. In den entstandenen Lerneinheiten wird tatsächlich eine Vielzahl von Anlässen zum Erwerb mathematikbezogener Schnittstellenkompetenz angeboten.

Im Rahmen der vorliegenden Masterarbeit war es allerdings nicht möglich, die entworfenen Einheiten in der Praxis zu testen. Dies wäre der nächste notwendige Schritt zur endgültigen Beantwortung der Forschungsfrage. Diese empirischen Evaluationen liefern dann auch die Möglichkeit, die Nützlichkeit des entwickelten Schnittstellen-Tetraeders zu bewerten.

Nichtsdestotrotz liefern sowohl die Erfahrungen von bspw. Bauer (vgl. 2.4.2) als auch die Erfahrungen des Autors, insbesondere bezogen auf den Einsatz von Schnittstellenaufgaben, erste Indizien dafür, dass fachmathematische Schnittstellenmodule ein sinnvolles und nützliches Konzept sein können. Zur Bestätigung dieser Vermutung muss (wie bereits andiskutiert) die Durchführung von Schnittstellenmodulen empirisch beforscht und evaluiert werden. Dahingehend ergeben sich unter anderem folgende weiterführende Fragestellungen, von denen einige bereits an entsprechenden Stellen der Arbeit angesprochen wurden.

- Wie kann MSK kompetenzorientiert abgeprüft werden?
- Mit welchen Methoden kann der auf Seite 45 formulierte Evaluationsprozess in der Praxis umgesetzt werden?
- Wie kann der Begriff der *mathematikbezogenen Schnittstellenkompetenz* weiter ausdifferenziert werden?
- Wie muss eine Version des Vorgehensmodells (B), S. 43 , aussehen, die auf die praktische Umsetzbarkeit im Lehralltag an Universitäten abzielt?
- Wie kann man die taxonomische Matrix so erweitern, dass sie besser für die Formulierung intendierter Lernziele für den Erwerb professioneller Lehrerkompetenz geeignet ist?
- Können die Hypothesen (C), S. 44 , (D), S. 45 verifiziert oder falsifiziert werden?

Außerdem ist es zwingend nötig, die mathematikdidaktische Forschung für die Lehre einzelner Inhalte der Fachmathematik auszubauen. Nur so können lehrbezogene Entscheidungen in Mathematikveranstaltungen tatsächlich evidenzbasiert getroffen werden.

Literaturverzeichnis

A'Campo-Neuen, A. (2011). *Skript zur Vorlesung Mathematische Methoden III. Herbstsemester 2011. Kapitel 4. Reelle Analysis: Integration.* Zugriff auf `http://jones.math.unibas.ch/~annette/vorlesung11_files/SkriptMatheIII/skript9.pdf` (20. August 2016)

Anderson, L. W. et al. (Hrsg.). (2005). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing : a revision of Bloom's Taxonomy of educational objectives* (Complete ed., [Nachdr.] Aufl.). New York [u.a.] : Longman.

Ball, D. L. & Bass, H. (2002). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In *Proceedings of the 2002 annual meeting of the canadian mathematics education study group* (S. 3–14).

Ball, D. L. & Bass, H. (2009). With an eye on the Mathematical Horizon. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009*.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching what makes it special? *Journal of teacher education*, *59* (5), 389–407.

Bauer, T. (2012). *Analysis – Arbeitsbuch. Bezüge zwischen Schul- und Hochschulmathematik, sichtbar gemacht in Aufgaben mit kommentierten Lösungen.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Bauer, T. (2013). Schnittstellen bearbeiten in Schnittstellenaufgaben. In C. Ableitinger, J. Kramer & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 39–56). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Bauer, T., Gromes, W. & Partheil, U. (2016). Mathematik verstehen von verschiedenen Standpunkten aus – Zugänge zum Krümmungsbegriff. In A. Hoppenbrock, R. Biehler, R. Hochmuth & H.-G. Rück (Hrsg.), *Lehren und Lernen von Mathematik in der Studieneingangsphase* (S. 483–499). Springer.

Bauer, T. & Partheil, U. (2009). Schnittstellenmodule in der Lehramtsausbildung im Fach Mathematik. In *Mathematische Semesterberichte 56* (S. 85-103). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Baumert, J. & Kunter, M. (2011a). 2 Das Kompetenzmodell von COACTIV. *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*, 29–53.

Baumert, J. & Kunter, M. (2011b). 8 Das mathematikspezifische Wissen vo Lehrkräften, kognitive Aktivierung im Unterricht und Lernfortschritte von Schülerinnen und Schülern. *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*, 163–192.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Klusmann, U., Krauss, S. & Neubrand, M. (2011). 1 Professionelle Kompetenz von Lehrkräften, koginitv aktivierender Unterricht und die mathematische

Kompetenz von Schülerinnen und Schülern (COACTIV) – Ein Forschungsprogramm. *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*, 7–25.

Becher, S. (2014). Einstellungen von Lehramtsstudierenden (Gym) zur fachmathematischen und (fachdidaktischen) universitären Ausbildung. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014*, 141–144.

Becher, S. & Biehler, R. (2015). Welche Kriterien legen Lehramtsstudierende (Gym) bei der Bewertung fachmathematischer Veranstaltungen zu Grunde? *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015*, 116–119.

Bromme, R. (2014). *Der Lehrer als Experte: Zur Psychologie des professionellen Wissens* (Bd. 7). Waxmann Verlag.

Bruner, J. (1977). The process of education. 1960. *Cambridge, MA: Harvard UP*.

Danckwerts, R. (2013). Angehende Gymnasiallehrer(innen) brauchen eine „Schulmathematik vom höheren Standpunkt"! In C. Ableitinger, J. Kramer & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 77–94). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Duistermaat, J. J. & Kolk, J. A. (2004). *Multidimensional Real Analysis II: Integration*. Camebridge University Press. (Cambridge studies in advanced mathematics)

Glöckner, H. (2008). *Reelle Analysis: Mehrfachintegration. Universität Paderborn, WS 2008/09.* Zugriff auf `http://www2.math.uni-paderborn.de/fileadmin/Mathematik/AG-Gloeckner/Reelle_Analysis_WS_14/scriptum-gloeckner_01.pdf` (23. August 2016)

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Springer Spektrum.

Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *19* (1), 3–45.

Hefendehl-Hebeker, L. (2013). Doppelte Diskontinuität oder die Chance der Brückenschläge. In C. Ableitinger, J. Kramer & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 1–15). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Hilgert, J., Hoffmann, M. & Panse, A. (2015a). *Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten: tutoriell und transparent*. Springer-Verlag.

Hilgert, J., Hoffmann, M. & Panse, A. (2015b). Kann professorale Lehre tutoriell sein? Ein Modellversuch zur Einführung in mathematisches Denken und Arbeiten. In W. Paravicini & J. Schnieder (Hrsg.), *Hanse-Kolloquium zur Hochschuldidaktik der Mathematik 2013. Beiträge zum gleichnahmigen Symposium am 8. und 9. November 2013 an der Universität zu Lübeck.* Münster: WTM-Verlag.

Hill, H. C., Schilling, S. G. & Ball, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The Elementary School Journal*, *105* (1), 11–30.

Hoffmann, M. (2014). *Entwicklung von Schnittstellenaufgaben zwischen Hochschulmathematik und Schulmathematik im Rahmen einer gymnasialen Lehramtsanfängerveranstaltung* (Bachelorarbeit). Universität Paderborn.

HRK. (1999). *Der Europäische Hochschulraum. Gemeinsame Erklärung der Europäischen Bildungsminister.* Zugriff auf `https://www.hrk.de/fileadmin/redaktion/hrk/02-Dokumente/02-03-Studium/02-03-01-Studium-Studienreform/Bologna_Dokumente/Bologna_1999.pdf` (24. Juli 2016)

HRK. (2003). *Den Europäischen Hochschulraum verwirklichen. Kommuniqué der Konferenz der europäischen Hochschulministerinnen und -minister am 19. September 2003 in Berlin.* Zugriff auf `https://www.hrk.de/fileadmin/redaktion/hrk/02-Dokumente/02-03-Studium/02-03-01-Studium-Studienreform/Bologna_Dokumente/Berlin_communique_2003.pdf` (25. Juli 2016)

HRK, MKM & BMBF. (2005). *Qualifikationsrahmen für Deutsche Hochschulabschlüsse.* Zugriff auf `https://www.hrk.de/fileadmin/redaktion/hrk/02-Dokumente/02-03-Studium/02-03-02-Qualifikationsrahmen/2005_Qualifikationsrahmen_HSAbschluesse.pdf` (25. Juli 2016)

Hußmann, S., Jürgensen, T., Leuders, T., Richter, K., Riemer, W. & Schermuly, H. (2007). *Lambacher Schweizer 5. Mathematik für Gymnasien. Nordrhein-Westfalen*. Ernst Klett Verlag.

JQI. (2004). *Shared 'dublin' descriptors for Short Cycle, First Cycle, Second Cycle and Third Cycle Awards. Draft 1 working document on JQI meeting in Dublin on 18. October 2004.* Zugriff auf `https://www.uni-due.de/imperia/md/content/bologna/dublin_descriptors.pdf` (25. Juli 2016)

Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Teil I: Arithmetik, Algebra, Analysis.* Leibzig: Teubner. (Zitiert nach der handschriftlichen Urfassung in openlibrary.org.)

Klieme, E. & Hartig, J. (2007). Kompetenzkonzepte in den Sozialwissenschaften und im erziehungswissenschaftlichen Diskurs. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaften*, *10* (Sonderheft 8), 11–29.

Kunter, M. & Baumert, J. (2011). 18 Das COACTIV-Forschungsprogramm zur Untersuchung professioneller Kompetenzen von Lehrkräften – Zusammenfassung und Diskussion. *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*, 345–366.

Kunter, M., Kleickmann, T., Klusmann, U. & Richter, D. (2011). 2 Die Entwicklung professioneller Kompetenzen von Lehrkräften. *Professionelle Kompetenz von Lehrkräften: Ergebnisse des Forschungsprogramms COACTIV*, 55–68.

Lergenmüller, A. & Schmidt, G. (Hrsg.). (2005). *Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien. 5. Schuljahr*. Bildungshaus Schulbuchverlage.

MIWF NRW & UPB. (2015a). *Hochschulvertrag 2015 – 2016.* Zugriff auf `http://www.wissenschaft.nrw.de/fileadmin/Medien/Dokumente/Hochschule/ZLV_V/HSVertrag/U_Paderborn_HSVertrag.pdf` (23. Juli 2016)

MIWF NRW & UPB. (2015b). *Hochschulvertrag Sondervereinbarung zur Lehramtsausbildung 2015 – 2016.* Zugriff auf `http://www.wissenschaft.nrw.de/fileadmin/Medien/Dokumente/Hochschule/U_Paderborn_HSVertrag_Lehramt.pdf` (23. Juli 2016)

MSW NRW. (2007). *Kernlehrplan für das Gymnasium - Sekundarstufe I (G8) in Nordrhein-Westfalen Mathematik* (1. Aufl.). Ritterbach Verlag.

MSW NRW. (2013). *Kernlehrplan für das Gymnasium - Sekundarstufe II (G8) in Nordrhein-Westfalen mathematik* (1. Aufl.). Ritterbach Verlag.

NRW. (2016a). *Gesetz über die Ausbildung für Lehrämtler an öffentlichen Schulen.* (Lehrerausbildungsgesetz – LABG)

NRW. (2016b). *Verordnung über den Zugang zum nordrhein-westfälischen Vorbereitungsdienst für Lehrämtler an Schulen und Voraussetzungen bundesweiter Mobilität.* (Lehramtszugangsverordung – LZV)

Roch, S. (2013). *Skript zur Vorlesung Analysis II. SS 2013.* Zugriff auf http://www3.mathematik.tu-darmstadt.de/index.php?eID=tx_nawsecuredl&u=0&g=0&t=1471961447&hash=945963b50afbb76e125229b7959fae48faa1ff98&file=fileadmin/home/users/186/Skripte_Roch/analysis_II_ss13.pdf (20. August 2016)

Sauvigny, F. (2014). *Analysis*. Springer Spektrum.

Schaper, N. (2012). *Fachgutachten zur Kompetenzorientierung in Studium und Lehre* (Bericht). Hochschulrektorenkonferenz nexus. Zugriff auf https://www.hrk-nexus.de/fileadmin/redaktion/hrk-nexus/07-Downloads/07-02-Publikationen/fachgutachten_kompetenzorientierung.pdf (23. Juli 2016)

Schmid, A. & Weidig, I. (Hrsg.). (1996). *Lambacher Schweizer 10. Mathematisches Unterrichtwerk für Gymnasien. Ausgabe Nordrhein-Westfalen*. Ernst Klett Verlag.

Schmidt, G., Körner, H. & Lergenmüller, A. (Hrsg.). (2011). *Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien. Analysis II*. Bildungshaus Schulbuchverlage.

Schröder, M., Wurl, B. & Wynands, A. (Hrsg.). (2008). *Maßstab 10. Mathematik*. Bildungshaus Schulbuchverlage.

Seidel, T. & Reiss, K. (2014). Lerngelegenheiten im Unterricht. In T. Seidel & A. Krapp (Hrsg.), *Pädagogische Psychologie* (6. Aufl., S. 253–275). Beltz Verlag, Weinheim, Basel.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, *57* (1), 1–23.

Suzuka, K., Sleep, L., Ball, D. L., Bass, H., Lewis, J. & Thames, M. (2009). Designing and using tasks to teach mathematical knowledge for teaching. *DS Mewborn & HS Lee, Scholarly practices and inquiry in the preparation of mathematics teachers: Association of Mathematics Teacher Education monograph series*, *6*, 7–23.

UPB. (2011a). *Allgemeine Bestimmungen der Prüfungsordnung für den Bachelorstudiengang Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen an der Universität Paderborn.* Zugriff auf http://digital.ub.uni-paderborn.de/download/pdf/1059160?name=Allgemeine%20Bestimmungen%20der%20Pr%C3%BCfungsordnung%20f%C3%BCr%20den%20Bachelorstudiengang%20Lehramt (23. Juli 2016)

UPB. (2011b). *Besondere Bestimmungen der Prüfungsordnung für den Bachelorstudiengang Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen mit dem Unterrichtsfach Mathematik an der Universität Paderborn.* Zugriff auf http://digital.ub.uni-paderborn.de/download/pdf/1059501?name=Besondere%20Bestimmungen%20der%20Pr%C3%BCfungsordnung%20f%C3%BCr%20den%20Bachelorstudiengang%20Lehramt%20a (23. Juli 2016)

UPB. (2014). *Allgemeine Bestimmungen der Prüfungsordnung für den Masterstudiengang Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen an der Universität Paderborn.* Zugriff auf http://digital.ub.uni-paderborn.de/hs/download/pdf/1041395?originalFilename=true (23. Juli 2016)

UPB. (2016a). *Besondere Bestimmungen der Prüfungsordnung für den Bachelorstudiengang Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen mit dem Unterrichtsfach Mathematik an der Universität Paderborn.* (Noch nicht veröffentlicht. Vorabversion)

UPB. (2016b). *Besondere Bestimmungen der Prüfungsordnung für den Masterstudiengang Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen mit dem Unterrichtsfach Mathematik an der Universität Paderborn.* (Noch nicht veröffentlicht. Vorabversion)

Volkert, K. (Hrsg.). (2015). *David Hilbert. Grundlagen der Geometrie (Festschrift 1899).* Springer Spektrum.

Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., ... Wittmann, G. (2014). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I.* Springer Spektrum.

Weinert, F. E. (1999). *Concepts of Competence.* Organisation for Economic Co-operation and Development.

Index

Abbildungsverzeichnis

Anhang A

Anhänge zum Theorie-Teil

A.1 Dublin Descriptors

Im Folgenden findet man die Konkretisierung der *Dublin Descriptors* im Bezug auf die vier Stufen vereinheitlichter Hochschulabschlüsse (JQI, 2004, S. 2 f.):

„

Qualifications that signify completion of the higher education short cycle (within the first cycle) are awarded to students who:

- have demonstrated knowledge and understanding in a field of study that builds upon general secondary education and is typically at a level supported by advanced textbooks; such knowledge provides an underpinning for a field of work or vocation, personal development, and further studies to complete the first cycle;
- can apply their knowledge and understanding in occupational contexts;
- have the ability to identify and use data to formulate responses to well-defined concrete and abstract problems;
- can communicate about their understanding, skills and activities, with peers, supervisors and clients;
- have the learning skills to undertake further studies with some autonomy.

Qualifications that signify completion of the first cycle are awarded to students who:

- have demonstrated knowledge and understanding in a field of study that builds upon and their general secondary education, and is typically at a level that, whilst supported by advanced textbooks, includes some aspects that will be informed by knowledge of the forefront of their field of study;

- can apply their knowledge and understanding in a manner that indicates a professional approach to their work or vocation, and have competences typically demonstrated through devising and sustaining arguments and solving problems within their field of study;
- have the ability to gather and interpret relevant data (usually within their field of study) to inform judgements that include reflection on relevant social, scientific or ethical issues;
- can communicate information, ideas, problems and solutions to both specialist and non-specialist audiences;
- have developed those learning skills that are necessary for them to continue to undertake further study with a high degree of autonomy.

Qualifications that signify completion of the second cycle are awarded to students who:

- have demonstrated knowledge and understanding that is founded upon and extends and/or enhances that typically associated with Bachelor's level, and that provides a basis or opportunity for originality in developing and/or applying ideas, often within a research3 context;
- can apply their knowledge and understanding, and problem solving abilities in new or unfamiliar environments within broader (or multidisciplinary) contexts related to their field of study;
- have the ability to integrate knowledge and handle complexity, and formulate judgements with incomplete or limited information, but that include reflecting on social and ethical responsibilities linked to the application of their knowledge and judgements;
- can communicate their conclusions, and the knowledge and rationale underpinning these, to specialist and non-specialist audiences clearly and unambiguously;
- have the learning skills to allow them to continue to study in a manner that may be largely self-directed or autonomous.

Qualifications that signify completion of the third cycle are awarded to students who:

- have demonstrated a systematic understanding of a field of study and mastery of the skills and methods of research associated with that field;
- have demonstrated the ability to conceive, design, implement and adapt a substantial process of research with scholarly integrity;
- have made a contribution through original research that extends the frontier of knowledge by developing a substantial body of work, some of which merits national or international refereed publication;
- are capable of critical analysis, evaluation and synthesis of new and complex ideas;
- can communicate with their peers, the larger scholarly community and with society in general about their areas of expertise;
- can be expected to be able to promote, within academic and professional contexts, technological, social or cultural advancement in a knowledge based society;

Glossary

1. The word **'professional'** is used in the descriptors in its broadest sense, relating to those attributes relevant to undertaking work or a vocation and that involves the application of some aspects of advanced learning. It is not used with regard to those specific requirements relating to regulated professions. The latter may be identified with the profile / specification.
2. The word **'competence'** is used in the descriptors in its broadest sense, allowing for gradation of abilities or skills. It is not used in the narrower sense identified solely on the basis of a 'yes/no' assessment.
3. The word **'research'** is used to cover a wide variety of activities, with the context often related to a field of study; the term is used here to represent a careful study or investigation based on a systematic understanding and critical awareness of knowledge. The word is used in an inclusive way to accommodate the range of activities that support original and innovative work in the whole range of academic, professional and technological fields, including the humanities, and traditional, performing, and other creative arts. It is not used in any limited or restricted sense, or relating solely to a traditional 'scientific method'.

"

A.2 Kategorien von Schnittstellenaufgaben

Die folgenden Beschreibungen der Kategorien von Schnittstellenaufgaben stammen aus der Bachelorarbeit von Hoffmann (2014, S. 12 f.):

Zu (A): Grundvorstellungen aufbauen und festigen Auf der Basis der „lerntheoretischen Grunderkenntnis", dass Lernen ein „*kumulativer* und *irreversibler* Prozess" (Bauer, 2013, S. 42, Hervorhebung im Originaltext) ist, stellt Bauer fest, dass es nicht möglich ist, in der Schule aufgebaute Grundvorstellungen zu mathematischen Themen einfach zu „löschen". Es ist somit notwendig, an vorhandene Vorstellungen anzuknüpfen, sofern diese vorhanden sind. Da viele Dinge in der Schule – für die universitäre Mathematik – zu ungenau behandelt werden, müssen die Grundvorstellungen dann erweitert werden.

Manche Themen der Hochschulmathematik oder Sichtweisen auf bereits bekannte Themen sind neu und die notwendigen Grundvorstellungen müssen erst aufgebaut werden. Hierbei können Erfahrungen aus der Schulmathematik oft nützlich sein. (vgl. Bauer, 2013, S. 41 f.)

Zu (B): Unterschiedliche Zugänge verstehen und analysieren In Schul- und Hochschulmathematik werden oftmals für ein und dasselbe Thema untschiedliche Zugänge (im Sinne der sachlogischen Vorgehensweise und nicht der Unterrichtsmethodik) gewählt. Dies kann verschiedene Gründe, wie z. B. den unterschiedlichen Grad der Exaktheit, die gewünschte Grundvorstellung, die aufgebaut werden soll, oder die Verfügbarkeit mathematischer Mittel, die für einen bestimmten Zugang notwendig sind, haben.

In Schnittstellenaufgaben können verschiedene Zugänge zu einem Thema analysiert und miteinander verglichen werden. Hierbei kann unter anderem auf das Potential von Zugängen im Hinblick auf weiterführende Betrachtungen oder die notwendigen mathematischen Vorkenntnisse eingegangen werden. (vgl. Bauer, 2013, S. 42 ff.)

Zu (C): Mit hochschulmathematischen Werkzeugen Fragestellungen der Schulmathematik vertieft verstehen Diese Kategorie zielt auf eine „inhaltsbezogene Nützlichkeit“ der Hochschulmathematik für die Schulmathematik ab. Eine Schnittstellenaufgabe kann dazu dienen, Fragestellungen, die SuS[1] verstehen oder auch selber formulieren könnten, mit den Mitteln der Fachmathematik zu beantworten, um somit den angehenden Lehrkräften die Nützlichkeit dieser aufzuzeigen. Besonders interessant sind dabei Fragestellungen, die mit Mitteln der Schulmathematik nur sehr kompliziert, oder gar nicht beantwortbar sind. (vgl. Bauer, 2013, S.44 f.)

Zu (D): Mathematische Arbeitsweisen üben und reflektieren. Eine große Schwierigkeit für Studienanfänger ist der Umgang mit mathematischen Definitionen und Beweisen. Ziel sollte es auch im Lehramtsstudium sein, dass die Studierenden sich am Ende ihres Studiums als Teil der mathematischen Gemeinschaft sehen und sich typisch mathematische Arbeitsweisen angeeignet haben. Diese können dann in gewissen Situationen auch an die SuS weitergegeben werden. Bauer verdeutlicht dies anhand des Unterschiedes, ob eine Lehrkraft von „die Mathematiker“ oder aber “wir in der Mathematik“ spricht.

In der späteren Berufspraxis ist es für einen Lehrer notwendig, eine angemessene „Begründungsbasis“ für die jeweiligen Jahrgangsstufen zu finden, auf der dann stichhaltig argumentiert werden kann. Schnittstellenaufgaben können dazu beitragen, dass die Studierenden eine rigorose fachmathematische Begründung für ein schulmathematisches Thema sehen und begreifen. Dies ist erforderlich, um sinnvoll didaktisch reduzieren zu können. Außerdem können mit Hilfe von Schnittstellenaufgaben mathematische Arbeitsweisen auf bereits aus der Schule bekannte Themen angewandt werden. (vgl. Bauer, 2013, S.45 f.)

[1]Schülerinnen und Schüler

Anhang B

Skript zu mehrdimensionaler Riemann-Integration

Anmerkung Das hier vorliegende Skript wurde aus den Ausführungen von A'Campo-Neuen (2011); Duistermaat und Kolk (2004); Roch (2013); Sauvigny (2014) zusammengestellt und durch den Autor erweitert. Es handelt sich um eine Zusammenstellung fachmathematischer Inhalte zur mehrdimensionalen Riemann-Integration, die als Grundlage für die Entwicklung fachmathematischer Schnittstellenmodule in diesem Kontext dienen. Teile der fachlichen Inhalte wurden fast wörtlich aus den oben stehenden Arbeiten übernommen. Alle Abbildungen wurdem vom Autor (teilweise unter Verwendung von *Geogebra*) erstellt.

Notation B.0.1

- Im Allgemeinen ist $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
- Ist $a \in \mathbb{R}^n$, so beschreiben $a_1, \ldots, a_n$ die Komponenten von a. Es gilt also $a = (a_1, \ldots, a_n)$.
- Sind $a, b \in \mathbb{R}^n$, so schreiben wir $a < (\leq) b$, falls $a_k < (\leq) b_k$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt.

B.1 Mehrdimensionale Quader

Im Rahmen der eindimensionalen Riemann-Integration von Funktionen $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wurde die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen von f und der ersten Koordinatenachse mit Rechtecken ausgefüllt, deren eine Kante ein abgeschlossenes Intervall in $[a, b]$ war. Um das Konzept der Riemann-Integration auf Funktionen der Form $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mehrdimensional erweitern zu können, bedarf es einer mehrdimensionalen Erweiterung des Intervallkonzepts. Dazu definieren wir

Definition B.1.1 (Mehrdimensionale Quader)
Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$. Dann definieren wir durch

$$Q := [a, b] := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \leq x \leq b\}.$$

einen *Quader* Q der Dimension n. Außerdem definieren wir für $k = 1, \ldots, n$

$$I_k(Q) := [a_k, b_k] = \{x_k \in \mathbb{R} \mid a_k \leq x_k \leq b_k\}.$$

Ist klar, welcher Quader gemeint ist, so schreiben wir einfach I_k.

Solchen Quadern kann man nun auf natürliche geometrische Art und Weise einen Inhalt und einen Durchmesser zuweisen.

Definition B.1.2 (Kenngrößen mehrdimensionaler Quader)
Sei $Q = [a, b] \subset \mathbb{R}^n$ ein n-dimensionaler Quader. Wir definieren den *(elementargeometrischen) Inhalt* von Q durch

$$\mathrm{vol}_n(Q) := \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{vol}_1(I_k).$$

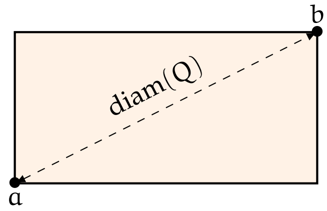
Weiter definieren wir den *Durchmesser* von Q durch

$$\mathrm{diam}(Q) := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{vol}_1(I_k)^2}.$$

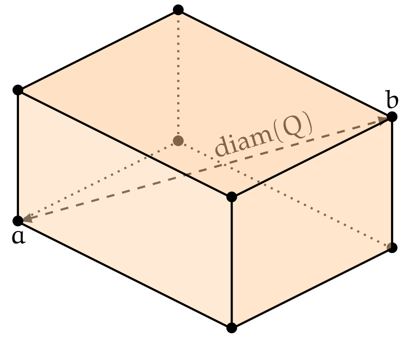
Beispiel B.1.3
Für die Dimensionen 1, 2 und 3 kann man sich Quader anschaulich vorstellen:

(i) Für die Dimension 1, ist der Quader $[a, b]$ genau das Intervall $[a, b]$. Somit sind die Notationen konsistent.

(ii) Für die Dimension 2 ist der Quader $[a, b]$ genau ein ausgefülltes Rechteck, bei dem a und b diagonal gegenüberliegende Eckpunkte sind.



(iii) Für die Dimension 3 Ist der Quader $[a, b]$ genau ein ausgefüllter Quader im geometrischen Sinne, bei dem a und b gegenüberliegende Eckpunkte sind.



Hat ein Quader in einer Dimension „keine Ausdehnung“, so hat er den Inhalt null. Beispielsweise haben eine Strecke im $\mathbb{R}^2$ oder ein Rechteck im $\mathbb{R}^3$ den Flächeninhalt bzw. das Volumen null. Diese Aussage ist Bestandteil der folgenden Bemerkung.

Bemerkung B.1.4 (i) Ist $Q = [a, b] \subset \mathbb{R}^n$ ein n-dimensionaler Quader und es gibt $k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $a_k = b_k$, dann ist $\mathrm{vol}_n(Q) = 0$.

(ii) Ist Q ein nichttrivialer n-dimensionaler Quader, so ist $\mathrm{vol}_n(Q) > 0$.

Analog zur eindimensionalen Riemann-Integration wollen wir auch für mehrdimensionale Definitionsbereiche einen Quader in kleinere Quader unterteilen können.

Definition B.1.5 (Zerlegung eines Quaders)
Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein nichttrivialer Quader. Eine *Zerlegung* $\mathcal{Z}$ von Q mit endlicher Indexmenge $\mathcal{I}$ ist definiert als eine Menge

$$\mathcal{Z} = \{Q_i \mid i \in \mathcal{I}\}.$$

von nichttrivialen Teilquadern $Q_i \subset Q$ ($i \in \mathcal{I}$), sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(1) $Q = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} Q_i$,

(2) Für $i, j \in \mathcal{I}$ paarweise verschieden gilt $\mathring{Q}_i \cap \mathring{Q}_j = \emptyset$.

Außerdem definieren wir die *Feinheit* von $\mathcal{Z}$ durch

$$\|\mathcal{Z}\| := \max\{\mathrm{diam}(Q_i) \mid i \in \mathcal{I}\}.$$

Der folgende Satz liefert uns die Existenz von Zerlegungen im Sinne der obigen Definition.

Satz B.1.6 (Existenz von Zerlegungen)
Sei $Q = [a, b] = I_1 \times \ldots \times I_n$ *ein nichttrivialer Quader im* $\mathbb{R}^n$. *Die Intervalle* I_k *seien jeweils in* p_k *Teilintervalle* $I_k^{i_k} := \left[x_k^{(i_k-1)}, x_k^{(i_k)}\right]$ *mit* $1 \leq i_k \leq p_k$ *und* $p := (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ *aufgeteilt, wobei die Anordnung*

$$a_k =: x_k^{(0)} < x_k^{(1)} < \ldots < x_k^{(p_k-1)} < x_k^{(p_k)} := b_k$$

für $k = 1, \ldots, n$ *gilt.*

Ferner sei

$$\mathcal{N} := \{i \in \mathbb{N}^n \mid 1 \leq i_k \leq p_k \text{ für } 1 \leq k \leq n\} \subset \mathbb{N}^n.$$

Für $i \in \mathcal{N}$ *definieren wir dann den Teilquader*

$$Q_i := \left\{x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_k^{(i_k-1)} \leq x_k \leq x_k^{(i_k)},\ 1 \leq k \leq n\right\}.$$

Dann gelten die folgenden zwei Aussagen

(i) $\mathcal{Z} := \{Q_i \mid i \in \mathcal{N}\}$ *ist eine Zerlegung von* Q.

(ii) Es gilt $\operatorname{vol}_n(Q) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \operatorname{vol}_n Q_i$.

Beispiel B.1.7 (zur Situation von Satz B.1.6)
In Abbildung B.1 ist ein Beispiel für die in Satz B.1 beschriebene Situation aufgezeichnet. Dabei ist $p = (3, 2)$ und $\mathcal{N} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$.

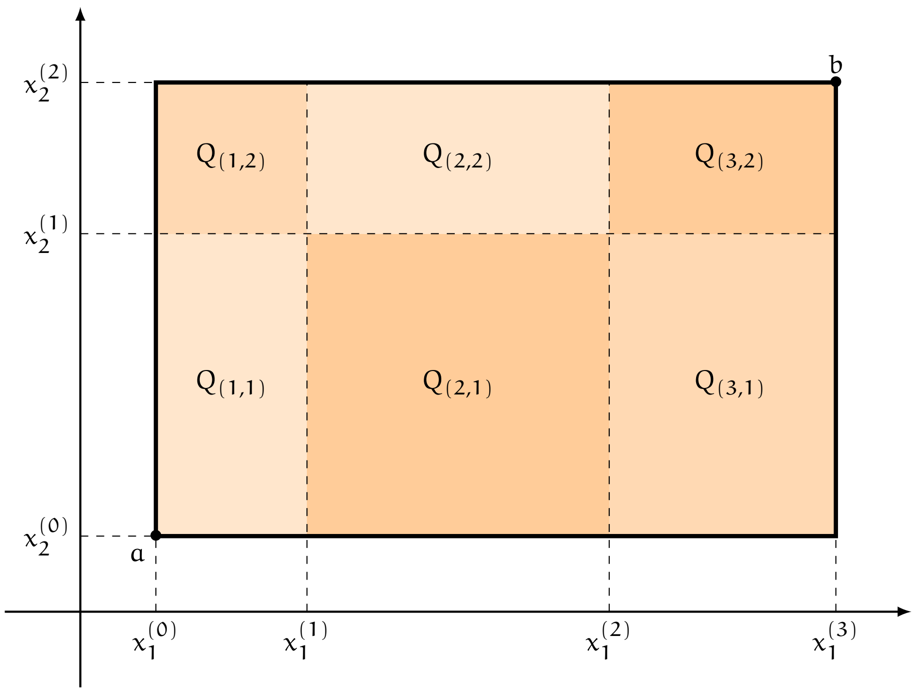


Abbildung B.1: Skizze für die Situation in Satz B.1.6

Beweis. **(von Satz B.1.6)**

(i) Wir beweisen (1) und (2) aus Definition B.1.5. Seien $x \in Q$ und $k \in \{1, \dots, n\}$. Wegen $x \in Q$ gilt $x_k \in I_k$. Nach Konstruktion gibt es dann $i^{(k)} \in \mathcal{N}$ mit $x_k \in I_k^{\left(i_k^{(k)}\right)}$. Nach Definition von $\mathcal{N}$ ist $\tilde{i} := \left(i_1^{(1)}, i_2^{(2)}, \dots, i_n^{(n)}\right) \in \mathcal{N}$, also $x \in Q_{\tilde{i}} \in \mathcal{Z}$. Außerdem gilt für $Q_i \in \mathcal{Z}$ und $x \in Q_i$ beliebig nach Definition sofort $a \leq x \leq b$, also $x \in Q$. Somit ist (1) bewiesen.

Seien nun $i, j \in \mathcal{N}$ paarweise verschieden. Somit gibt es $1 \leq k \leq n$ mit $i_k \neq j_k$. Das bedeutet nach Konstruktion sofort

$$\mathring{I}_k^{(i_k)} \cap \mathring{I}_k^{(j_k)} = \emptyset.$$

Für einen inneren Punkt $x \in \mathring{Q}_i$ von Q_i gilt $x_k \in \mathring{I}_k^{(i_k)}$. Somit kann x_k kein innerer Punkt von $I_k^{(j_k)}$ sein und es folgt $x \notin \mathring{Q}_j$, was (2) beweist.

$\mathcal{Z}$ ist somit zusammen mit der Indexmenge $\mathcal{N}$ eine Zerlegung.

(ii) Für den Beweis der Aussage rechnen wir wie folgt:

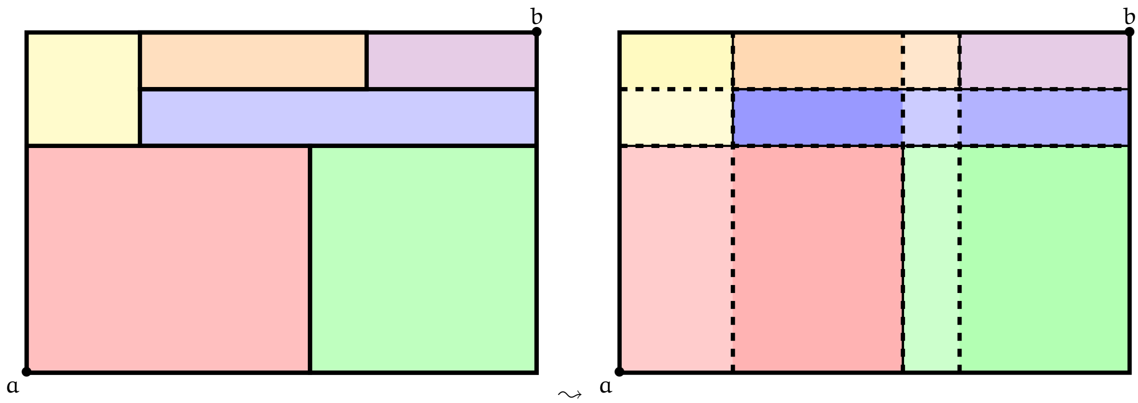
$$\operatorname{vol}_n(Q) = \prod_{k=1}^{n} \operatorname{vol}_1(I_k) = \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{1 \leq i_k \leq p_k} \operatorname{vol}_1\left(I_k^{(i_k)}\right) \right) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \left(\prod_{k=1}^{n} \operatorname{vol}_1\left(I_k^{(i_k)}\right) \right) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \operatorname{vol}_n(Q_i).$$

□

Satz B.1.8
Sei $Q \in \mathbb{R}^n$ *ein nichttrivialer Quader,* $\mathcal{I}$ *eine Indexmenge und* $\mathcal{Z} = \{Q_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ *eine Zerlegung von* Q. *Dann gilt*

$$\operatorname{vol}_n(Q) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \operatorname{vol}_n Q_i.$$

Beweis. *Idee:* Konstruiere aus $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}'$, die von der Form wie in Satz B.1.6 ist.



Für jedes $1 \leq k \leq n$ betrachten wir für alle Quader aus $\mathcal{Z}$ die k-te Koordinate der Endpunkte. Diese bilden die $x_k^{(i)}$, wie in Satz B.1.6. So erhält man eine Zerlegung $\mathcal{Z}'$ mit Indexmenge $\mathcal{N}$ wie in Satz B.1.6, sodass es für jedes $Q'_j \in \mathcal{Z}'$ genau ein $Q_i \in \mathcal{Z}$ gibt mit $Q'_j \subset Q_i$. Dann ist $\left\{Q'_j \in \mathcal{Z}' \;\middle|\; Q'_j \subset Q_i\right\}$ eine Zerlegung eines $Q_i \in \mathcal{Z}$, die wie in B.1.6 aufgebaut ist. Somit folgt nach Satz B.1.6 (ii):

$$\operatorname{vol}_n(Q_i) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \operatorname{vol}_n\left(Q'_j\right).$$

Somit ist dann

$$\sum_{i\in\mathcal{I}} \mathrm{vol}_n\left(Q_i\right) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \sum_{\{j\in\mathcal{N} \mid Q'_j\subset Q_i\}} \mathrm{vol}_n\left(Q'_j\right) = \sum_{j\in\mathcal{N}} \mathrm{vol}_n\left(Q'_j\right) = \mathrm{vol}_n\left(Q\right).$$

□

Definition B.1.9 (Verfeinerung)
Sei Q ein nichttrivialer Quader im $\mathbb{R}^n$ und seien $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ Zerlegungen von Q. Wir nennen $\mathcal{Z}_2$ eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}_1$, wenn es für jedes $Q_i \in \mathcal{Z}_1$ eine Menge von $Q_j \in \mathcal{Z}_2$ gibt, die eine Zerlegung von Q_i bildet.

Beispiel B.1.10
In Satz B.1.8 ist die im Beweis konstruierte Zerlegung $\mathcal{Z}'$ eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}$.

Corollar B.1.11
Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein (nichttrivialer) Quader und seien $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ Zerlegungen von Q. Dann besitzen $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ eine gemeinsame Verfeinerung.

Beweis. Diese Aussage zeigt man schnell unter Verwendung der Strategie aus dem Beweis von B.1.8. □

Bemerkung B.1.12
Die Definitionen und Theoreme in diesem Abschnitt lassen sich alle für den Fall trivialer Quader auf natürliche Art und Weise verallgemeinern.

Bemerkung B.1.13
Im Folgenden meinen wir aus technischen Gründen mit Zerlegungen immer Zerlegungen, die wie in Satz B.1.6 aufgebaut sind. Man beachte, dass man – wie im obigen Beweis gezeigt – jede andere Zerlegung in diese Form bringen und verfeinern kann.

Die bis hierhin vorgestellte Theorie über mehrdimensionale Quader liefert nun die Grundlage für die Erweiterung des Riemann-Integrals ins Mehrdimensionale.

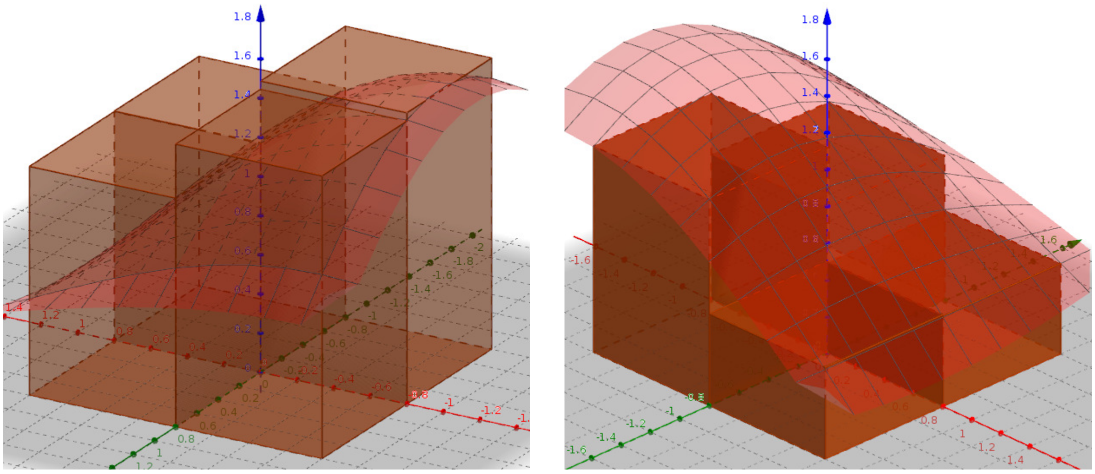
B.2 Ober- und Untersummen

In den folgenden Abschnitten sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein nichttrivialer Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt. Analog zum eindimensionalen Fall definieren wir zunächst Ober- und Untersummen.

Definition B.2.1 (Ober- und Untersumme)
Sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung mit Indexmenge $\mathcal{I}$ von Q. Wir definieren die *Obersumme* $S(f, \mathcal{Z})$ und die *Untersumme* $s(f, \mathcal{Z})$ durch

$$s(f, \mathcal{Z}) := \sum_{i \in \mathcal{I}} \inf_{x \in Q_i} f(x) \cdot \mathrm{vol}_n\,(Q_i) \quad \text{und} \quad S(f, \mathcal{Z}) := \sum_{i \in \mathcal{I}} \sup_{x \in Q_i} f(x) \cdot \mathrm{vol}_n\,(Q_i)\,.$$

Beispiel B.2.2
Beispiele für Ober- (links) und Untersummen (rechts).
(Erstellt mit Geogebra)



Lemma B.2.3 *(i) Sei $\mathcal{Z}'$ eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}$ mit Indexmenge $\mathcal{J}$. Dann gilt*

$$s(f, \mathcal{Z}) \leq s(f, \mathcal{Z}') \leq S(f, \mathcal{Z}') \leq S(f, \mathcal{Z}).$$

(ii) Für zwei beliebige Zerlegungen $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ von Q gilt

$$s(f, \mathcal{Z}_1) \leq S(f, \mathcal{Z}_2).$$

Beweis.

(i) Seien $Q'_j \in \mathcal{Z}'$ und $Q_i \in \mathcal{Z}$ mit $Q'_j \subset Q_i$. Dann gilt

$$\inf_{x \in Q_i} f(x) \leq \inf_{x \in Q'_j} f(x).$$

Mit Satz B.1.8 erhalten wir dann

$$\begin{aligned} s(f, \mathcal{Z}) &= \sum_{i \in \mathcal{I}} \inf_{x \in Q_i} f(x) \cdot \mathrm{vol}_n\,(Q_i) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \inf_{x \in Q_i} f(x) \sum_{\{j \in \mathcal{J} \mid Q'_j \subset Q_i\}} \mathrm{vol}_n \left(Q'_j\right) \\ &\leq \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{\{j \in \mathcal{J} \mid Q'_j \subset Q_i\}} \inf_{x \in Q'_j} f(x) \cdot \mathrm{vol}_n \left(Q'_j\right) = \sum_{i \in \mathcal{J}} \inf_{x \in Q'_j} f(x) \cdot \mathrm{vol}_n \left(Q'_j\right) \\ &= s(f, \mathcal{Z}') \end{aligned}$$

Damit ist die erste Ungleichung gezeigt. Die dritte zeigt man analog und die zweite folgt direkt aus der Definition von Supremum und Infimum.

(ii) Die Aussage folgt, wenn man (i) und Corollar B.1.11 zusammen verwendet.

□

Definition B.2.4
Die Funktion f heißt über den Quader Q *Riemann-integrierbar* genau dann, wenn

$$\underline{\int_Q} f(x)\ dx = \overline{\int_Q} f(x)\ dx =: \int_Q f(x) dx$$

gilt. Dabei meint

$$\underline{\int_Q} f(x)\ dx := \sup_{\mathcal{Z}} s(f, \mathcal{Z})$$

das *untere Integral von* f *über* Q und

$$\overline{\int_Q} f(x)\ dx := \inf_{\mathcal{Z}} S(f, \mathcal{Z})$$

das *obere Integral von* f *über* Q.

Corollar B.2.5
Für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ *von* Q *gilt*

$$s(f, \mathcal{Z}) \leq \underline{\int_Q} f(x)\ dx \leq \overline{\int_Q} f(x) \leq S(f, \mathcal{Z}).$$

Beweis. Die Aussage folgt aus Lemma B.2.3. □

Im Sinne der Anschauung, dass die Unter- und die Obersummen für eine geeignete Folge von Zerlegungen gegen einen gemeinsamen Grenzwert konvergieren, beweisen wir nun den folgenden Satz.

Satz B.2.6
Die Funktion f *ist auf dem Quader* Q *genau dann Riemann-integrierbar, wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine Zerlegung* $\mathcal{Z}_\varepsilon$ *von* Q *derart gibt, dass*

$$S(f, \mathcal{Z}_\varepsilon) - s(f, \mathcal{Z}_\varepsilon) < \varepsilon$$

gilt.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Sei f Riemann-integrierbar über Q. Für $\varepsilon > 0$ gibt es dann Zerlegungen $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$ von Q, sodass

$$S(f, \mathcal{Z}_1) < \int_Q f(x)\, dx + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad s(f, \mathcal{Z}_2) > \int_Q f(x)\, dx - \frac{\varepsilon}{2}$$

gelten. Sei nun $\mathcal{Z}_\varepsilon$ die gemeinsame Verfeinerung (siehe Corollar B.1.11) von $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$. Dann folgt sofort

$$S(f, \mathcal{Z}) - s(f, \mathcal{Z}) \leq S(f, \mathcal{Z}_1) - s(f, \mathcal{Z}_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

„$\Leftarrow$“ In diesem Fall folgt mit Corollar B.2.5 für jedes $\varepsilon > 0$ schon

$$\overline{\int_Q} f(x)\, dx - \underline{\int_Q} f(x)\, dx < \varepsilon,$$

was die gewünschte Aussage beweist. □

Anschaulich einleuchtend ist die Tatsache, dass man sich dem Wert des Integrals annähert, wenn man die Zerlegungen feiner macht. Dieses wollen wir formal ausdrücken.

Definition B.2.7 (Ausgezeichnete Folgen von Zerlegungen)
Eine Folge $\{\mathcal{Z}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ von Zerlegungen von Q heißt *ausgezeichnet*, wenn gilt

$$\lim_{j \to \infty} \|\mathcal{Z}_j\| = 0.$$

Satz B.2.8
Sei $\{\mathcal{Z}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen. Dann gelten

$$\underline{\int_Q} f(x)\, dx = \lim_{j \to \infty} s(f, \mathcal{Z}_j) \quad \textit{und} \quad \overline{\int_Q} f(x)\, dx = \lim_{j \to \infty} S(f, \mathcal{Z}_j).$$

Um diesen Satz zu beweisen, müssen wir berücksichtigen, dass eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge nicht zwingend bedeutet, dass eine Zerlegung immer weiter verfeinert wird. Das folgende Lemma liefert uns eine nützliche Aussage, um Zerlegungen zu vergleichen, die nicht „feiner als“ geordnet sind.

Lemma B.2.9
Seien $m := \inf\{f(x) \mid x \in Q\}$ und $M := \sup\{f(x) \mid x \in Q\}$.

Es gibt eine nur von der Zerlegung $\mathcal{Z}$ von Q abhängige Zahl $\Theta = \Theta(\mathcal{Z}) \in (0, +\infty)$, so dass für jede Zerlegung $\mathcal{Z}^*$ von Q die Ungleichung

$$S(f, \mathcal{Z}^*) \leq S(f, \mathcal{Z}) + \Theta(Z) \cdot (M - m) \cdot \|\mathcal{Z}^*\|$$

gilt mit der Feinheit $\|\mathcal{Z}^*\| = \max\left\{\operatorname{diam}(Q_k^*) : k \in \mathcal{I}^*\right\}$ und der Indexmenge

$$\mathcal{I}^* := \{k \in \mathbb{N}^n \mid 1 \leq k_\nu \leq q_\nu \textit{ für } 1 \leq \nu \leq n\}$$

mit dem Multiindex $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{N}^n$.

Beweis.

1. Wir können durch den Übergang von f zur Funktion $g(x) := f(x) - m$, $x \in Q$ ohne Einschränkungen $m = 0$ annehmen. Sei nun $\mathcal{Z}^*$ eine beliebige weitere Zerlegung von Q mit den Zerlegungsquadern $Q_k^* = \left\{x \in \mathbb{R}^n : x_\nu^{*(k_\nu - 1)} \le x_\nu \le x_\nu^{*(k_\nu)}, 1 \le \nu \le n\right\}, k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathcal{I}^*$. Somit sind insbesondere die Identitäten
$$Q = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} Q_i = \bigcup_{k \in \mathcal{I}^*} Q_k^*, \quad Q_i = I_1^{(i_1)} \times \ldots \times I_n^{(i_n)} \quad \text{bzw.} \quad Q_k^* = I_1^{*(k_1)} \times \ldots \times I_n^{*(k_n)}$$
erfüllt.

2. Dann können genau zwei Fälle bzgl. der Teilquader Q_k^* eintreten:
Fall (a): $Q_k^* \in \mathcal{A}$ gilt, falls es einen Quader Q_i der Zerlegung $\mathcal{Z}$ mit $Q_k^* \subset Q_i$ gibt, d.h. $I_\nu^{*(k_\nu)} \subset I_\nu^{(i_\nu)}$ ist für $\nu = 1, \ldots, n$ erfüllt.

   Fall (b): $Q_k^* \in \mathcal{B}$ gilt, falls eine Komponente $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ und ein zugehöriges $k_\nu \in \{1, \ldots, q_\nu\}$ derart existieren, dass das Intervall $I_k^{*(k_n)}$ einen der Punkte $x_\nu^{(1)}, \ldots, x_\nu^{(p_\nu - 1)}$ der Teilung des Intervalls $I_\nu = [a_\nu, b_\nu]$ von $\mathcal{Z}$ im Inneren enthält.

   Es sei K_ν die Menge aller natürlichen Zahlen k_ν mit $1 \le k_\nu \le q_\nu$ und obiger Eigenschaft. Dann besitzt die Menge K_ν höchstens $p_\nu - 1$ Elemente. Für die Klasse $\mathcal{B}$ folgt die Inklusion
$$\bigcup_{Q_k^* \in \mathcal{B}} Q_k^* \subset \bigcup_{\nu=1}^{n} \left\{ \bigcup_{k_\nu \in K_\nu, \mu \neq \nu : 1 \le k_\mu \le q_\mu} \left[I_1^{*(k_1)} \times \ldots \times I_\nu^{*(k_\nu)} \times \ldots \times I_n^{*(k_n)} \right] \right\}.$$

   Mit diesen Vorüberlegungen schätzen wir die Klasse $\mathcal{B}$ wie folgt ab:
$$\begin{aligned} \sum_{Q_k^* \in \mathcal{B}} |Q_k^*| &\le \sum_{\nu=1}^{n} \left[\sum_{k_\nu \in K_\nu, \mu \neq \nu : 1 \le k_\mu \le q_\mu} |I_1^{*(k_1)}| \cdot \ldots \cdot |I_\nu^{*(k_\nu)}| \cdot \ldots \cdot |I_n^{*(k_n)}| \right] \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \left[(b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{k_\nu \in K_\nu} |I_\nu^{*(k_\nu)}| \right) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n) \right] \\ &\le \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|Q|}{|b_\nu - a_\nu|} \cdot (p_\nu - 1) \cdot \|\mathcal{Z}^*\| =: \Theta(\mathcal{Z}) \cdot \|\mathcal{Z}^*\|. \end{aligned}$$

3. Unter Beachtung der Abschätzungen
$$M_k^* := \sup\{f(x) : x \in Q_k^*\} \le \sup\{f(x) : x \in Q_i\} := M_i \text{ für } Q_k^* \subset Q_i \text{ und}$$
$$M_k^* = \sup\{f(x) : x \in Q_k^*\} \le M \text{ für alle } k \in \mathcal{N}^*$$
können wir die gewünschte Ungleichung für $m = 0$ wie folgt herleiten:
$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{Z}^*) &= \sum_{k \in \mathcal{I}^*} M_k^* \cdot |Q_k^*| = \sum_{Q_k^* \in \mathcal{A}} M_k^* \cdot |Q_k^*| + \sum_{Q_k^* \in \mathcal{B}} M_k^* \cdot |Q_k^*| \\ &\le \sum_{i \in \mathcal{I}} M_i \cdot |Q_i| + M \cdot \sum_{Q_k^* \in \mathcal{B}} |Q_k^*| \le S(f, \mathcal{Z}) + M \cdot \Theta(\mathcal{Z}) \cdot \|\mathcal{Z}^*\|. \end{aligned}$$

□

Beweis. **(von Satz B.2.8)** Es genügt, die Gleichheit nur für das obere Integral von f zu beweisen. Nach Definition gibt es eine Folge von Zerlegungen $\{\mathcal{Z}_l^*\}_{l \in \mathbb{N}}$ von Q mit $\lim_{l \to \infty} S(f, \mathcal{Z}_l^*) = \bar{\int}_Q f(x)\, dx$.

Sei nun $\{\mathcal{Z}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge von Q, so liefert Lemma B.2.9

$$\overline{\int_Q} f(x)\ dx \leq S(f,\mathcal{Z}_j) \leq S(f,\mathcal{Z}_l^*) + \Theta(\mathcal{Z}_l^*)\cdot(M-m)\cdot\|\mathcal{Z}_j\|.$$

Beim Grenzübergang $j\to\infty$ und festgehaltenem l erhalten wir

$$\overline{\int_Q} f(x)\ dx \leq \liminf_{j\to\infty} S(f,\mathcal{Z}_j) \leq \limsup_{j\to\infty} S(f,\mathcal{Z}_j) \leq S(f,\mathcal{Z}_l^*) \text{ für alle } l\in\mathbb{N}.$$

Beim Grenzübergang $l\to\infty$ ergibt sich

$$\overline{\int_Q} f(x)\ dx \leq \liminf_{j\to\infty} S(f,\mathcal{Z}_j) \leq \limsup_{j\to\infty} S(f,\mathcal{Z}_j) \leq \lim_{l\to\infty} S(f,\mathcal{Z}_l^*) = \overline{\int_Q} f(x)\ dx$$

und damit $\overline{\int}_Q f(x)\ dx = \lim_{j\to\infty} S(f,\mathcal{Z}_j)$. □

B.3 Riemann-integrierbare Funktionen

Definition B.3.1 (Oszillation auf einer Teilmenge)
Sei $Q'\subset Q$ eine Teilmenge des Quaders Q. Wir definieren die *Oszillation auf* Q' durch

$$\operatorname{osc}\left(f,Q'\right) := \sup\left\{|f(x)-f(y)| \;\middle|\; x,y\in Q'\right\}.$$

Definition B.3.2 (Schwankung)
Sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von Q mit Indexmenge $\mathcal{I}$. Dann nennen wir

$$\sigma(f,\mathcal{Z}) := \sum_{i\in\mathcal{I}} \operatorname{osc}\left(f,Q_i\right)\cdot \operatorname{vol}_n\left(Q_i\right)$$

die *Schwankung von* f *auf* Q *bezüglich der Zerlegung* $\mathcal{Z}$.

Lemma B.3.3
Für eine beliebige Zerlegung $\mathcal{Z}$ *von* Q *mit Indexmenge* $\mathcal{I}$ *gilt*

$$\sigma(f,\mathcal{Z}) = S(f,\mathcal{Z}) - s(f,\mathcal{Z}).$$

Beweis. Folgt direkt, da für alle $Q_i\in\mathcal{Z}$ gilt:

$$\operatorname{osc}\left(f,Q_i\right) = \sup\{|f(x)-f(y)| \mid x,y\in Q_i\} = \sup_{x\in Q_i} f(x) - \inf_{x\in Q_i} f(x).$$

□

Dann lassen sich die Ergebnisse aus dem vorherigen Abschnitt wie folgt zusammenfassen:

Satz B.3.4 (Riemannsches Integrabilitätskriterium)
Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gelten die folgenden Aussagen

(i) *Wenn es eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge $\{\mathcal{Z}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ mit der Schwankung $\lim_{j\to\infty} \sigma(f, \mathcal{Z}_j) = 0$ gibt, dann ist f über Q Riemann-integrierbar.*

(ii) *Wenn f über Q Riemann-integrierbar ist, dann erfüllt jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge $\{\mathcal{Z}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ die Beziehung $\lim_{j\to\infty} \sigma(f, \mathcal{Z}_j) = 0$ für die Schwankung.*

Beweis.

(i) Folgt sofort aus Lemma B.3.3 und Satz B.2.6.

(ii) Folgt sofort aus Lemma B.3.3 und Satz B.2.8.

□

Satz B.3.5 (Stetige Funktionen)
Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f über Q Riemann-integrierbar.

Beweis. Weil Q kompakt ist, ist f auf Q gleichmäßig stetig. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es also $\delta(\varepsilon) > 0$, sodass für alle $x, y \in Q$ mit $\|x - y\|_2 < \delta$ bereits $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ folgt.

Sei nun $\mathcal{Z}(\varepsilon)$ eine beliebige Zerlegung von Q mit Indexmenge $\mathcal{I}$ und $\|\mathcal{Z}(\varepsilon)\| < \delta(\varepsilon)$. Dann folgt

$$\sigma(f, \mathcal{Z}(\varepsilon)) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \operatorname{osc}(f, Q_i) \cdot \operatorname{vol}_n(Q_i) \leq \sum_{i\in\mathcal{I}} \epsilon \cdot \operatorname{vol}_n(Q_i) = \varepsilon \cdot \operatorname{vol}_n(Q).$$

Somit gibt es eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge $\{\mathcal{Z}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ mit der Schwankung $\lim_{j\to\infty} \sigma(f, \mathcal{Z}_j) = 0$ und nach Satz B.3.4 folgt die Aussage. □

Wir können nun zeigen, dass die Riemann-integrierbaren Funktionen einen reellen Vektorraum bilden, der noch weitere Eigenschaften erfüllt:

Satz B.3.6 (Vektorraum der Riemann-integrierbaren Funktionen)
Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein mehrdimensionaler Quader und seien $f, g : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt, sowie $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen

$$\lambda f, \quad f + g, \quad fg, \quad |f|$$

über Q Riemann-integrierbar. Wenn es zusätzlich $P > 0$ gibt, sodass für alle $x \in Q$ gilt $|f(x)| \geq P$, dann ist auch $\frac{1}{f}$ Riemann-integrierbar.

Beweis. Wir definieren $K := \sup\{|f(x)| + |g(x)| \mid x \in Q\} < \infty$. Wir definieren $h = fg$. Sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von Q mit Indexmenge $\mathcal{I}$. Für $x, y \in Q_i$ ($i \in \mathcal{I}$) können wir abschätzen:

$$\begin{aligned} |h(x) - h(y)| &= |f(x)(g(x) - g(y)) + g(y)(f(x) - f(y))| \\ &\leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)| \\ &\leq K \cdot (|g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)|). \end{aligned}$$

Somit gilt für alle $i \in \mathcal{I}$ die Ungleichung

$$\operatorname{osc}(h, Q_i) \leq K(\operatorname{osc}(f, Q_i) + \operatorname{osc}(g, Q_i)),$$

und wir erhalten

$$\sigma(h, \mathcal{Z}) \leq K(\sigma(f, \mathcal{Z}) + \sigma(g, \mathcal{Z})).$$

Sei nun $\{\mathcal{Z}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge. Mit Satz B.3.4 folgt aus der Integrierbarkeit von f und g bereits $\lim_{j\to\infty} \sigma(f, \mathcal{Z}_j) = 0$ bzw. $\lim_{j\to\infty} \sigma(g, \mathcal{Z}_j) = 0$ und damit wieder nach Satz B.3.4 und der obigen Abschätzung, dass h integrierbar ist.

Die Integrierbarkeit von Linearkombinationen integrierbarer Funktionen zeigt man analog.

Die Integrierbarkeit von $|f|$ folgt aus der Eigenschaft $\sigma(|f|, \mathcal{Z}) \leq \sigma(f, \mathcal{Z})$ für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von Q.

Sei nun $P > 0$ wie oben beschrieben. Sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von Q mit Indexmenge $\mathcal{I}$. Für $x, y \in Q_i$ $(i \in \mathcal{I})$ können wir abschätzen:

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)}\right| = \left|\frac{f(y) - f(x)}{f(x) \cdot f(y)}\right| \leq \frac{1}{P^2}|f(y) - f(x)|.$$

Dann folgt

$$\operatorname{osc}\left(\frac{1}{f}, \mathcal{Z}\right) \leq \frac{1}{P^2}\operatorname{osc}(f, Q_i) \quad \Rightarrow \quad \sigma\left(\frac{1}{f}, \mathcal{Z}\right) \leq \frac{1}{P^2}\sigma(f, Q_i).$$

Die Integrierbarkeit folgert man wie oben. □

Bemerkung B.3.7
Man kann sich leicht überlegen, dass der Jordan-Inhalt außerdem *translationsinvariant* ist.

B.4 Riemannsche Zwischensummen

Eine Alternative zu dem bis hierhin beschriebenen Zugang über Ober- und Untersummen ist Inhalt der folgenden Defnition. Dieser Ansatz wird es uns ermöglichen, weitere Aussagen über Riemann-integrierbare Funktionen zu treffen.

Definition B.4.1 (Riemannsche Zwischensumme)
Sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von $Q = \bigcup_{i\in\mathcal{N}} Q_i$ und seien die *Zwischenpunkte* $\xi_i \in Q_i$, $i \in \mathcal{N}$ gewählt. Dann nennen wir

$$\Sigma(f, \mathcal{Z}, \xi) := \sum_{i\in\mathcal{N}} f(\xi_i) \cdot \operatorname{vol}_n(Q_i)$$

die *Riemannsche Zwischensumme von* f *zur Zerlegung* $\mathcal{Z}$ *und zu den Zwischenpunkten* $\xi := \{\xi_i \mid i \in \mathcal{N}\}$.

Dass sich dieses Konzept mit den bekannten Ober- und Untersummen verträgt, liefert uns der folgende Satz.

Satz B.4.2
f *ist über* Q *genau dann Riemann-integrierbar, wenn für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge* $\{\mathcal{Z}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *von*

Q *und jede Wahl der Zwischenpunkte*

$$\xi^{(j)} := \left\{ \xi_i^{(j)} \in Q_i^{(j)} \;\middle|\; i \in \mathcal{N}_j \right\}$$

die Folge der Riemannschen Zwischensummen

$$\Sigma(f, \mathcal{Z}_j, \xi^{(j)}) := \sum_{i \in \mathcal{N}_j} f(\xi_i^{(j)}) \cdot \mathrm{vol}_n \left(Q_i^{(j)} \right), \quad j = 1, 2, \ldots$$

von f *konvergiert. In diesem Fall gilt*

$$\lim_{j \to \infty} \Sigma(f, \mathcal{Z}_j, \xi^{(j)}) = \int_Q f(x) \, dx.$$

Beweis. „⇒“ Es sei f über Q Riemann-integrierbar. Dann haben wir für jedes $j \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen

$$s(f, \mathcal{Z}_j) \leq \sum_{i \in \mathcal{N}_j} f(\xi_i^{(j)}) \cdot \mathrm{vol}_n \left(Q_i^{(j)} \right) \leq S(f, \mathcal{Z}_j).$$

Der Grenzübergang $j \to \infty$ liefert dann

$$\begin{aligned} \int_Q f(x) \, dx &= \underline{\int}_Q f(x) \, dx = \lim_{j \to \infty} s(f, \mathcal{Z}_j) \\ &\leq \lim_{j \to \infty} \sum_{i \in \mathcal{N}_j} f(\xi_i^{(j)}) \cdot \mathrm{vol}_n \left(Q_i^{(j)} \right) \\ &\leq \lim_{j \to \infty} S(f, \mathcal{Z}_j) = \overline{\int}_Q f(x) \, dx = \int_Q f(x) \, dx, \end{aligned}$$

also die Konvergenz der Riemannschen Zwischensummen gegen das Intergal.

„⇐“ Sei nun $\{\mathcal{Z}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge von Q. Mit Hilfe der Definitionen von Supremum bzw. Infimum können wir für $j = 1, 2, \ldots$ geeignete Zwischenpunkte

$$\xi^{(j)} := \left\{ \xi_i^{(j)} \in Q_i^{(j)} \;\middle|\; i \in \mathcal{N}_j \right\} \quad \text{und} \quad \eta^{(j)} := \left\{ \eta_i^{(j)} \in Q_i^{(j)} \;\middle|\; i \in \mathcal{N}_j \right\}$$

mit den Indexmengen $\mathcal{N}_j \subseteq \mathbb{N}^n$ derart wählen, dass die Zwischensummen $\Sigma(f, \mathcal{Z}_j, \xi^{(j)})$ und $\Sigma(f, \mathcal{Z}_j, \eta^{(j)})$ die Ungleichungen

$$\left| \Sigma(f, \mathcal{Z}_j, \xi^{(j)}) - s(f, \mathcal{Z}_j) \right| < \frac{1}{j} \quad \text{und} \quad \left| \Sigma(f, \mathcal{Z}_j, \eta^{(j)}) - s(f, \mathcal{Z}_j) \right| < \frac{1}{j}$$

erfüllen. Somit folgt

$$\lim_{j \to \infty} \Sigma(f, \mathcal{Z}_j, \xi^{(j)}) = \overline{\int}_Q f(x) \, dx \quad \text{und} \quad \lim_{j \to \infty} \Sigma(f, \mathcal{Z}_j, \eta^{(j)}) = \underline{\int}_Q f(x) \, dx.$$

Da nach Voraussetzung auch die gemischte Zahlenfolge

$$\Sigma(f, \mathcal{Z}_1, \xi^{(1)}), \Sigma(f, \mathcal{Z}_1, \eta^{(1)}), \Sigma(f, \mathcal{Z}_2, \xi^{(2)}), \Sigma(f, \mathcal{Z}_2, \eta^{(2)}), \ldots$$

konvergiert, erhalten wir

$$\overline{\int_Q} f(x)\ dx = \underline{\int_Q} f(x)\ dx.$$

Also ist f über Q Riemann-integrierbar. □

Satz B.4.3 (Linearitätsregel)
Seien $f, g : Q \to \mathbb{R}$ *beschränkt und Riemann-integrierbar und seien* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. *Dann ist*

$$\int_Q (\lambda f(x) + \mu g(x))\ dx = \lambda \int_Q f(x)\ dx + \mu \int_Q g(x)\ dx.$$

Beweis. Die Integrierbarkeit von $\lambda f + \mu g$ folgt aus B.3.6. Die Gleichheit der Integrale rechnet man sofort nach, indem man eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge wählt und den Grenzwert der Riemannschen Zwischensummen betrachtet. □

B.5 Der Satz von Fubini für das Riemann-Integral

Um Riemann-Integrale auf mehrdimensionalen Quadern ausrechnen zu können, können Sie unter bestimmten Umständen auf eindimensionale Integrale zurückgeführt werden. Dies ist Bestandteil dieses Abschnitts.

Lemma B.5.1 (Erinnerung)
Die (komplexe) Doppelfolge (a_{mn}) *sei konvergent, und für jedes* m *bzw.* n *sollen die (komplexen) Grenzwerte* $\lim_{n\to\infty} a_{mn}$ *und* $\lim_{m\to\infty} a_{mn}$ *existieren. Dann existieren auch die iterierten Grenzwerte und es gilt:*

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} a_{mn}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} a_{mn}\right) = \lim_{m,n\to\infty} a_{mn}.$$

Beweis. Siehe Analysis I/II. □

Satz B.5.2 (Fubini)
Seien $Q_k \subset \mathbb{R}^k$ *und* $Q_l \subset \mathbb{R}^l$ *nichttriviale Quader und* $Q := Q_k \times Q_l \subset \mathbb{R}^{k+l}$. *Weiter sei* $f : Q \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrierbar auf* Q *und für jedes* $y \in Q_l$ *existiere das Riemann-Integral*

$$g(y) := \int_{Q_k} f(x, y)\ dx.$$

Dann ist $g : Q_l \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrierbar und es gilt*

$$\int_Q f(x, y)\, d(x, y) = \int_{Q_l}\left(\int_{Q_k} f(x, y)\ dx\right)\ dy.$$

Beweis. Für $m, n \in \mathbb{N}$ sein $\mathcal{Z}_k^{(m)}$ und $\mathcal{Z}_l^{(n)}$ Zerlegungen (mit Indexmengen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$) von Q_k und Q_l mit zugehörigen Zwischenpunktvektoren $\xi_k^{(m)} = \left(\xi_{k,i}^{(m)}\right)$ und $\xi_l^{(n)} = \left(\xi_{l,j}^{(n)}\right)$. Dann wird durch $\mathcal{Z}^{(m,n)} := \mathcal{Z}_k^{(m)} \times \mathcal{Z}_l^{(n)}$ eine Zerlegung von Q mit zugehörigem Zwischenpunktvektor $\xi^{(m,n)} := \xi_k^{(m)} \times \xi_l^{(n)}$ definiert. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Sigma\left(f, \mathcal{Z}^{(m,n)}, \xi^{(m,n)}\right) &= \sum_{i,j \in \mathcal{I} \times \mathcal{J}} f\left(\xi_{k,i}^{(m)}, \xi_{l,j}^{(n)}\right) \cdot \operatorname{vol}_n Q_{k,i}^{(m)} \cdot \operatorname{vol}_n Q_{l,j}^{(n)} \\ &= \sum_{j \in \mathcal{J}} \left(\sum_{i \in \mathcal{I}} f\left(\xi_{k,i}^{(m)}, \xi_{l,j}^{(n)}\right) \cdot \operatorname{vol}_n Q_{k,i}^{(m)} \right) \cdot \operatorname{vol}_n Q_{l,j}^{(n)}. \quad (\star)\end{aligned}$$

Seien nun $\left(\mathcal{Z}_k^{(m)}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ und $\left(\mathcal{Z}_l^{(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ausgezeichnete Zerlegungsfolgen.

Dann ist offensichtlich auch $\left(\mathcal{Z}^{(m,n)}\right)_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge.

Da f auf Q Riemann-integrierbar ist, konvergiert für $(m, n) \to \infty$ nach Satz B.4.2 die linke Seite von $(\star)$ gegen $\int_Q f(x, y)\, d(x, y)$.

Außerdem konvergiert für jedes feste $\xi_{l,j}^{(n)}$ und $m \to \infty$ der Klammerterm auf der rechten Seite von $(\star)$:

$$\lim_{m \to \infty} \sum_{i \in \mathcal{I}} f\left(\xi_{k,i}^{(m)}, \xi_{l,j}^{(n)}\right) \cdot \operatorname{vol}_n Q_{k,i}^{(m)} = \int_{Q_k} f\left(x, \xi_{l,j}^{(n)}\right)\, dx = g\left(\xi_{l,j}^{(n)}\right).$$

Mit B.5.1 folgt dann die Existenz von

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{j \in \mathcal{J}} g\left(\xi_{l,j}^{(n)}\right) \cdot \operatorname{vol}_n Q_{l,j}^{(n)} = \int_{Q_l} g(y)\, dy = \int_{Q_l} \left(\int_{Q_k} f(x, y)\, dx \right) dy,$$

der wiederum mit

$$\lim_{(m,n) \to \infty} \Sigma\left(f, \mathcal{Z}^{(m,n)}, \xi^{(m,n)}\right) = \int_Q f(x, y)\, d(x, y)$$

übereinstimmt. □

Corollar B.5.3 (Vertauschung der Integrationsreihenfolge)
Sei alles wie in Satz B.5.2. Ist f *auf* $Q = Q_k \times Q_l$ *Riemann-integrierbar, und existieren die Integrale*

$$\int_{Q_k} f(x, y)\, dx \quad \textit{für jedes } y \in Q_l \qquad \textit{und} \quad \int_{Q_l} f(x, y)\, dy \quad \textit{für jedes } x \in Q_k,$$

so existieren alle iterierten Integrale und es gilt

$$\int_Q f(x, y)\, d(x, y) = \int_{Q_l} \left(\int_{Q_k} f(x, y)\, dx \right) dy = \int_{Q_k} \left(\int_{Q_l} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Beweis. Folgt sofort aus Satz B.5.2. □

B.6 Integration über Jordanbereiche

In diesem Abschnitt wollen wir kompiziertere Definitionsbereiche anschauen, auf denen eine Funktion Riemann-integrierbar ist.

Definition B.6.1 (Charakteristische Funktion)
Seien $B \subset A$ Mengen. Dann definieren wir die *charakteristische Funktion von* B durch

$$\mathbb{1}_B : A \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \mathbb{1}_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \in A \setminus B. \end{cases}$$

Definition B.6.2
Sei $J \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer und beschränkt und Q ein nichttrivialer Quader mit $J \subset Q$. Eine beschränkte Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrierbar auf* J, falls die Funktion

$$f_J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_J(x) = \begin{cases} f(x), & x \in J \\ 0, & x \notin J \end{cases}$$

Riemann-integrierbar auf Q ist. In diesem Fall heißt

$$\int_J f(x)\, dx := \int_Q f_J(x)\, dx$$

das *Riemann-Integral* von f über J.

Definition B.6.3 (Jordan-Messbarkeit, Jordan-Inhalt und Jordan-Nullmenge)
Eine nichtleere beschränkte Menge $J \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Jordan-messbar*, wenn $\mathbb{1}_J$ Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall heißt

$$\text{J-vol}_n(J) := \int_J 1\, dx$$

der *(n-dimensionale) Jordan-Inhalt* von J.
J heißt *Jordansche Nullmenge*, wenn $\text{J-vol}_n(J) = 0$ ist.

Bemerkung B.6.4
Offensichtlich gilt für einen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ bereits $\text{J-vol}_n(Q) = \text{vol}_n(Q)$. Außerdem ist auch $\text{J-vol}_n\left(\mathring{Q}\right) = \text{J-vol}_n(Q) = \text{J-vol}_n\left(\overline{Q}\right)$.

Lemma B.6.5 (Charakterisierung von Jordanschen Nullmengen)
$J \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Jordansche Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Anzahl $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ an (nichttrivialen) Quadern $Q_1, \ldots, Q_{N(\varepsilon)}$ derart gibt, dass die folgenden beiden Eigenschaften gelten:

$$J \subset \bigcup_{k=1}^{N(\varepsilon)} Q_k, \quad \textit{und} \quad \sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} \text{vol}_n(Q_k) < \varepsilon.$$

Beweis. „$\Rightarrow$" Sei $J \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordansche Nullmenge und sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader mit $J \subset Q$. Dann gilt nach Definition

$$\int_J 1 \, dx = \int_Q \mathbb{1}_J \, dx = 0.$$

Sei $\{\mathcal{Z}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge. Nach Satz B.2.8 gilt dann

$$\lim_{j \to \infty} S(f, \mathcal{Z}_j) = \int_Q \mathbb{1}_J \, dx = 0.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Somit gibt es $N := N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass für alle $j \geq N$ gilt

$$S(f, \mathcal{Z}_j) = \sum_i \sup_{x \in Q_i} \mathbb{1}_J(x) \cdot \mathrm{vol}_n(Q_i) < \varepsilon.$$

Wählen wir nun die Teilmenge der Quader aus $\mathcal{Z}_N$ für die $\sup\limits_{x \in Q_i} = 1$ ist, so ist Eigenschaft zwei sofort erfüllt. Außerdem ist diese Teilmenge auch eine Überdeckung im Sinne der ersten Eigenschaft, da wir eine Obersumme betrachten. Da die Zerlegungen endlich sind, ist die zweite Eigenschaft gezeigt.

"$\Leftarrow$" Sei J eine Menge, die die obigen Eigenschaften erfüllt. Für $\varepsilon > 0$ beschreiben wir die überdeckenden Quader mit $Q_1^{(\varepsilon)}, \ldots, Q_{N(\varepsilon)}^{(\varepsilon)}$. Ohne Einschränkung sind die offenen Kerne der Quader disjunkt. (Das Wegfallen von Überlappungen verkleinert das Gesamtvolumen höchstens; eventuell muss man verfeinern.) Wir müssen zeigen, dass $\int_J 1 \, dx = 0$ ist.

Wir können annehmen, dass es einen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt: $J \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N(\varepsilon)} Q_k^{(\varepsilon)} \subset Q$. Dann ist

$$\int_J 1 \, dx = \int_Q \mathbb{1}_J \, dx = 0.$$

Wegen $\mathbb{1}_J \in \{0, 1\}$, ist offensichtlich $s(\mathbb{1}_J, \{Q\}) = 0$, was $\underline{\int}_J 1 \, dx \geq 0$ bedeutet. Außerdem hat jede Obersumme mindestens den Wert 0.

Man kann sich leicht überlegen, dass wir für jedes $\varepsilon > 0$ zu $Q_1^{(\varepsilon)}, \ldots, Q_{N(\varepsilon)}^{(\varepsilon)}$ endlich viele Quader hinzufügen können, sodass die Gesamtmenge eine Zerlegung $\mathcal{Z}(\varepsilon)$ von Q bildet. Da diese zusätzlichen Quader disjunkt zu J sind, spielen sie für den Wert der Obersumme $S(\mathbb{1}_J, \mathcal{Z}(\varepsilon))$ keine Rolle. Nun gilt, da $\mathcal{Z}(\varepsilon)$ mit Sicherheit eine Verfeinerung von Q ist:

$$S(\mathbb{1}_J, \mathcal{Z}(\varepsilon)) - s(\mathbb{1}_J, \mathcal{Z}(\varepsilon)) \leq S(\mathbb{1}_J, \mathcal{Z}(\varepsilon)) - s(\mathbb{1}_J, \{Q\}) = S(\mathbb{1}_J, \mathcal{Z}(\varepsilon)) = \sup_{x \in Q_i^{(\varepsilon)}} \mathbb{1}_J(x) \cdot \mathrm{vol}_n\left(Q_i^{(\varepsilon)}\right) = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{vol}_n(Q_k) < \varepsilon.$$

Mit B.2.6 und B.2.8 folgt die Aussage.

□

Corollar B.6.6
Ist $J \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordansche Nullmenge und $I \subset J$, dann ist auch I eine Jordansche Nullmenge.

Beweis. Folgt sofort aus Satz B.6.5. □

Mit Hilfe dieser Charakterisierung können wir nun den folgenden wichtigen Satz über die Riemann-Integrierbarkeit von nicht zwingend stetigen Funktionen zu beweisen.

Satz B.6.7
Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt. Wenn f überall bis auf eine Jordansche Nullmenge E stetig ist, dann ist f über Q Riemann-integrierbar.

Beweis. Nach B.6.5 existierten für $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N = N(\varepsilon)$ und Quader $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \ldots, \tilde{Q}_N$ mit

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{N} \tilde{Q}_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{N} \mathrm{vol}_n\left(\tilde{Q}_k\right) < \varepsilon.$$

Zu jedem $\tilde{Q}_k$ bestimmen wir einen Quader Q_k^* mit $\tilde{Q}_k \subset \overset{\circ}{Q_k^*}$, sodass die Abschätzung $\sum\limits_{k=1}^{N} \mathrm{vol}_n\left(Q_k^*\right) < 2\varepsilon$ erfüllt ist. Für $k \in \{1, \ldots, N\}$ definieren wir nun $Q_k := Q_k^* \cap Q$ und erhalten dann

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{N} Q_k =: M \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{N} \mathrm{vol}_n\left(Q_k\right) < 2\varepsilon.$$

Behauptung: Es gilt $\overline{Q \setminus M} \cap E = \emptyset$.
Beweis: Angenommen dieser Durchschnitt wäre nichtleer. Dann existiert $x \in E$ und eine Punktfolge $\{x_l\}_{l \in \mathbb{N}} \subset Q \setminus M$ mit $x_l \overset{l \to \infty}{\to} x$. Wegen der Definition der $\tilde{Q}_k$ muss es dann $k \in \{1, \ldots, N\}$ geben, sodass $x \in \tilde{Q}_k$ erfüllt ist. Dann existiert ein $\eta > 0$ mit

$$\{y \in Q \mid \|y - x\| < \eta\} \subset Q_k^* \cap Q = Q_k \subset M.$$

Dies schließt aber die Existenz einer solchen Folge aus. Widerspruch.

Sei nun $\mathcal{Z}$ eine beliebige Zerlegung von Q mit Indexmenge $\mathcal{I}$. Wir können $\mathcal{Z}$ derart verfeinern, sodass für jeden Teilquader Q_k entweder $Q_k \subset M$ oder $Q_k \subset \overline{Q \setminus M}$ ist. Hierzu nehmen wir die Zerlegungspunkte der überdeckenden Quader $Q_1, \ldots, Q_N$ als Zerlegungspunkte für die Zerlegung $\mathcal{Z}$ auf. Wegen der Behauptung ist die Funktion $f : \overline{Q \setminus M} \to \mathbb{R}$ auf ihrem kompakten Definitionsbereich gleichmäßig stetig. Somit eixstiert zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ derart, dass für alle $x, y \in \overline{Q \setminus M}$ mit $\|x - y\| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Wir wählen jetzt eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ mit Indexmenge $\mathcal{I}$, die die Feinheit $\|\mathcal{Z}\| < \delta$ hat. Weil f auf Q beschränkt ist, gibt es $K := \sup\{|f(x)| \mid x \in Q\} < \infty$. Nun können wir wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned}
\sigma(f, \mathcal{Z}) &= \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathrm{osc}\left(f, Q_i\right) \cdot \mathrm{vol}_n\left(Q_i\right) \\
&= \sum_{k \in \mathcal{I}: Q_k \subset M} \mathrm{osc}\left(f, Q_k\right) \cdot \mathrm{vol}_n\left(Q_k\right) + \sum_{k \in \mathcal{I}: Q_k \subset \overline{Q \setminus M}} \mathrm{osc}\left(f, Q_k\right) \cdot \mathrm{vol}_n\left(Q_k\right) \\
&\leq 2K \cdot \sum_{k \in \mathcal{I}: Q_k \subset M} \mathrm{vol}_n\left(Q_k\right) + \varepsilon \sum_{k \in \mathcal{I}: Q_k \subset \overline{Q \setminus M}} \mathrm{vol}_n\left(Q_k\right) \\
&\leq 2K \cdot 2\varepsilon + \varepsilon \cdot \mathrm{vol}_n\left(Q\right) \\
&= \varepsilon \cdot \left(4K + \mathrm{vol}_n\left(Q\right)\right).
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge, deren Schwankung gegen 0 konvergiert und mit Satz B.3.4 folgt die Riemann-Integrierbarkeit von f.

□

Corollar B.6.8
Eine Menge $J \subset \mathbb{R}^n$ ist Jordan-messbar, wenn ihr Rand ∂J eine Jordansche Nullmenge ist.

Beweis. Die Unstetigkeitsstellen von $\mathbb{1}_J$ sind genau bei ∂J. Dann folgt die Aussage aus Satz B.6.7. □

Lemma B.6.9
Eine Menge $J \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn ihr Rand ∂J eine Jordansche Nullmenge ist.

Beweis. Die eine Richtung folgt direkt aus obigem Corollar. Sei nun $J \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar. Sei $Q \supset J$ ein Quader. Es existiert also

$$\int_J 1\, dx = \int_Q \mathbb{1}_J(x)\, dx.$$

Nach Satz B.2.6 gibt es für $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}_\varepsilon$ mit $S(\mathbb{1}_J, \mathcal{Z}_\varepsilon) - s(\mathbb{1}_J, \mathcal{Z}_\varepsilon) < \varepsilon$. Wir betrachten die Mengen

$$\mathcal{I}_A := \left\{ k \in \mathcal{I} \;\middle|\; \inf_{x \in Q_k} \mathbb{1}_J(x) = 1 \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{I}_B := \left\{ k \in \mathcal{I} \;\middle|\; \sup_{x \in Q_k} \mathbb{1}_J(x) = 1 \right\}$$

und definieren

$$A = \bigcup_{k \in \mathcal{I}_A} Q_k \quad \text{und } B = \bigcup_{k \in \mathcal{I}_B} Q_k.$$

Nach Konstruktion gilt dann $A \subset J \subset B$. Man überlegt sich mit dem obigen Corollar und der Tatsache, dass Quader trivialerweise Jordan-messbar sind, dass $\mathring{A}$ und $\overline{B}$ ebenfalls Jordan-messbar sind, und dass gilt $\text{J-vol}_n(A) = \text{J-vol}_n\left(\mathring{A}\right)$ bzw. $\text{J-vol}_n(B) = \text{J-vol}_n\left(\overline{B}\right)$. Da auf jedem Quader in B die Funktion $\mathbb{1}_J$ nach Definition den Wert 0 hat, folgt aus der obigen Abschätzung bereits

$$\overline{B} - \mathring{A} < \varepsilon.$$

Somit ist $\overline{B} \setminus \mathring{A}$ eine Jordansche Nullmenge. Offenbar gilt $\partial J \subset \overline{B} \setminus \mathring{A}$. Aus Lemma B.6.5 folgert man sofort, dass Teilmengen von Jordanschen Nullmengen wiederum Jordansche Nullmengen sind. Damit ist die Aussage gezeigt. □

Lemma B.6.10
Sei $J \subset \mathbb{R}^n$ Jordan messbar und , $f : J \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann ist f auf J Riemann-integrierbar.

Beweis. Die Unstetigkeitsstellen sind genau ∂J. Da J Jordan-messbar ist, ist ∂J nach Lemma B.6.9 eine Jordansche Nullmenge. Mit Satz B.6.7 folgt dann die Riemann-Integrierbarkeit von f. □

Satz B.6.11
Sei $J \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f : J \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist der Graph von f, d. h.. die Menge

$$\Gamma(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in J,\ y = f(x)\},$$

eine Jordansche Nullmenge im $\mathbb{R}^{n+1}$.

Beweis. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader mit $J \subset Q$. Wir betrachten die Einschränkung $\hat{f}$ von f_J auf Q. Nach Satz B.2.6 gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}_\varepsilon$ von Q mit $S(\hat{f}, \mathcal{Z}_\varepsilon) - s(f, \mathcal{Z}_\varepsilon) < \varepsilon$. Damit haben wir sofort eine Überdeckung für endlich viele abgeschlossene Intervalle mit Inhaltssumme $< \varepsilon$. Wegen $\Gamma(f) \subset \Gamma(\hat{f})$ gilt dies erst recht für $\gamma(f)$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Satz B.6.12 (Prinzip des Cavalieri)
Seien $Q \subset \mathbb{R}^n, I \subset \mathbb{R}$ Quader und $A \subset Q \times I \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Jordan-messbare Menge. Für $h \in I$ definieren

wir den Querschnitt auf der Höhe h *durch*

$$A_h := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, h) \in A\}.$$

Ist A_h *für jedes* $h \in I$ *Jordan-messbar, so gilt*

$$\text{J-vol}_{n+1}(A) = \int_I \text{J-vol}_n(A_h)\ dh.$$

Beweis. Nach Definition ist $\text{J-vol}_{n+1}(A) = \int_{Q\times I} \mathbb{1}_A(y)\ dy$. Mit dem Satz von Fubini (B.5.2) erhalten wir

$$\int_{Q\times I} \mathbb{1}_A(y)\ dy = \int_I \left(\int_Q \mathbb{1}_A(x, h)\ dx \right)\ dh.$$

Für ein festes $h \in I$ ist $\mathbb{1}_A(x, h) = \mathbb{1}_{A_h}(x)$ für alle $x \in Q$ und wir erhalten

$$\int_Q \mathbb{1}_A(x, h)\ dx = \int_Q \mathbb{1}_{A_h}(x)\ dx = \text{J-vol}_n(A_h).$$

$\square$