# Analysis I
# Übungsblatt 06 – Schnittstellenaufgabe

Christian Fleischhack
Max Hoffmann
*Stand:* 23. November 2016

**Abgabe**
01. Dezember, 12:00 Uhr
Kasten 114, 115 (D1-Flur)

Verwenden Sie die Titelseitenvorlage.

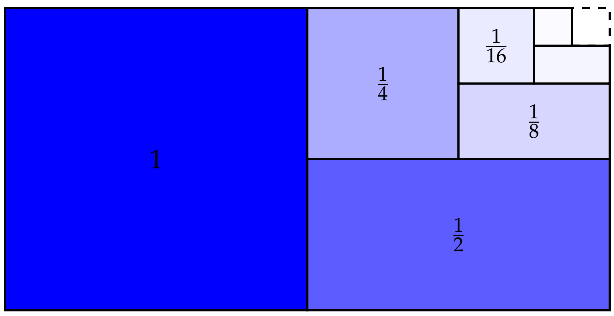
**Schnittstellenaufgabe 1 (Die geometrische Reihe)**
Schon in Schulbüchern finden wir verschiedene Beispiele zum Thema *Folgen*. Mit einer besonderen Folge, die auch in der Hochschule eine Rolle spielt, wollen wir uns in dieser Aufgabe beschäftigen. Dazu betrachten wir zunächst die folgenden zwei, scheinbar sehr unterschiedlichen, Ausgangsbeispiele, die in der Schule das Thema motivieren. Vielleicht kommen Ihnen diese aus Ihrer eigenen Schulzeit bekannt vor.

**Das Märchen vom Reiskorn und dem Schachbrett** (Neue Wege, Analysis II (2011), S. 110)

Im alten Persien erzählten sich die Menschen einst dieses Märchen: Es war einmal ein kluger Höfling, der seinem König ein kostbares Schachbrett schenkte. Der König war über den Zeitvertreib sehr dankbar und so sprach er zu seinem Höfling: „Sage mir, wie ich dich zum Dank für dieses wunderschöne Geschenk belohnen kann. Ich werde dir jeden Wunsch erfüllen.“ „Nichts weiter will ich, als dass Ihr das Schachbrett mit Reis auffüllen möget. Legt ein Reiskorn auf das erste Feld, zwei Reiskörner auf das zweite Feld, vier Reiskörner auf das dritte, acht auf das vierte und so fort.“ Der König war erstaunt über soviel Bescheidenheit und ordnete sogleich die Erfüllung des Wunsches an. Sofort traten Diener mit einem Sack Reis herbei und schickten sich an, die Felder auf dem Schachbrett nach den Wünschen des Höflings zu füllen. Bald stellten Sie fest, dass ein Sack Reis gar nicht ausreichen würde und ließen noch mehr Säcke aus dem Getreidespeicher holen. 64 Felder hatte das Schachspiel. Schon das zehnte Feld musste für den Höfling mit 512 Körnern gefüllt werden. Beim 21. Feld waren es schon über eine Million Körner. Und lange vor dem 64. Feld stellten die Diener fest, dass es im ganzen Reich des Königs nicht genug Reiskörner gab, um das Schachbrett aufzufüllen.

**Halbierungswachstum** (Neue Wege, Analysis II (2011), S. 111)

Aus einem Einheitsquadrat entstehen durch fortgesetze Halbierung jeweils die eingefärbten Rechtecke und Quadrate. Diese werden als Mosaik wie in dem Bild an das Quadrat angelegt. In dem Bild sind es zusammen mit den Ausgangsquadraten 7 Flächenstücke.




Basierend auf diesen Beispielen definieren wir zwei Folgen $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- $R_n$ gibt die Gesamtanzahl der Reiskörner auf den Schachbrettfeldern $0$ bis $n$ an.

  *Hinweis:* Aus formalen Gründen fangen wir bei dem $0$-ten Feld an zu zählen.

- $A_n$ gibt den Gesamtflächeninhalt der Rechtecke bis einschließlich der $n$-ten Iteration an.

  *Hinweis:* Aus formalen Gründen zählen wir das Rechteck mit Flächeninhalt $1$ als das $0$-te Rechteck.

a) Drücken Sie für ein $n \in \mathbb{N}$ die Folgenglieder $R_n$ und $A_n$ jeweils mithilfe des Summenzeichens aus.

b) Finden und Begründen Sie eine geschlossene Formel für $R_n$ und $A_n$.

c) Überprüfen Sie beide Folgen auf Konvergenz. Geben Sie ggf. den Grenzwert an.

d) Für $q \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ und $a \in \mathbb{R}$ wird durch die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} a \cdot q^k$$

die sogenannte *geometrische Reihe* definiert mit Startwert $a$ definiert. Nutzen Sie Ihre Ideen aus den vorigen Aufgabenteilen, um die folgenden Aufgaben zur allgemeinen geometrischen Reihe zu bearbeiten.

(i) Finden und begründen Sie eine geschlossene Formel für $S_n$.

(ii) Finden und begründen Sie eine rekursive Formel für $S_n$.

(iii) Nutzen Sie das Geogebra-Applet unter `https://ggbm.at/XdRTeDZn`, um Vermutungen über die Konvergenz und Divergenz der geometrischen Reihe in Abhängigkeit von $q$ aufzustellen.

(iv) Beweisen Sie Ihre Vermutung aus (iii).

e1) **(nur Lehramt)** Über die Universitätsbibliothek (im Uninetz oder über VPN) haben Sie online freien Zugriff auf das Buch *Didaktik der Analysis (2016), Greefrath et al.* Lesen Sie Abschnitt 3.3 und analysieren Sie sorgfältig, welche Grundvorstellungen und Aspekte zum Thema Folgen mit Hilfe der beiden Beispiele gefördert werden können.

*Hinweis:* Falls Ihnen die Begriffe „Grundvorstellungen“ und „Aspekte“ nicht klar sind, können diese in Abschnitt 1.5 nachgelesen werden.

e2) **(nur Nichtlehramt)** Zeigen Sie für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, dass

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x-y) \sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}.$$