Diskussionspunkte für die thematische Konzeption eines Schnittstellenmoduls zur mehrdimensionalen Integrationstheorie

Max Hoffmann

Stand: 11. Mai 2017

Diese Themenwahl ist konform mit den Lehramtsprüfungsordnungen der Universität Paderborn. In den *besonderen Bestimmungen* für den gymnasialen Masterstudiengang ist die Vorlesung *Reelle Analysis* als eine Möglichkeit angegeben, um ein fachwissenschaftliches Modul abzudecken (UPB, 2016). In dieser Vorlesung wird typischerweise eine Einführung in Differentialgleichungen und mehrdimensionale Integrationstheorie gegeben.

Dass eine solche Vorlesung zum Ende des Studiums liegt, hat für den Entwurf eines mathematischen Schnittstellenmoduls zwei entscheidende Vorteile: Zum einen kann auf ein breites Repertoire von fachmathematischem und insbesondere auch fachdidaktischem Wissen zurückgegriffen werden. Zum anderen liegt die Veranstaltung zeitlich nah am Übergang in das Referendariat und kann somit insbesondere zur Überwindung der zweiten von Felix Klein beschriebenen Diskontinuität beitragen.

1 Analyse

1.1 Festlegung und Beschreibung des fachmathematischen Rahmens

Wie oben beschrieben, soll sich das zu entwickelnde fachmathematische Schnittstellenmodul mit dem Bereich *mehrdimensionale Integrationstheorie* auseinandersetzen. Zur Ausgestaltung dieser Thematik bieten sich zwei Zugänge an: *Riemann-Integrale* oder *Lebesgue-Integrale*. Jeder der beiden Zugänge impliziert ein unterschiedliches Vorgehen. Darauf soll im Folgenden überblicksartig eingegangen werden.

1.1.1 Möglicher Aufbau eines Zugangs zum Lebesgue-Integral

Um das *Lebesgue-Integral* einzuführen, benötigt man zunächst den Begriff der *σ-Algebra* und damit verbunden den Begriff der *messbaren Menge* als Elemente von *Messräumen*. Darauf aufbauend kann man *messbare Funktionen* als Funktionen zwischen Messräumen definieren, sodass Urbilder messbarer Mengen wieder messbar sind. Diese Funktionen sind essentiell für das spätere Integrierbarkeitskonzept.

Anschließend kann man messbaren Mengen ein so genanntes *Maß* zuordnen; der Messraum wird dann zu einem *Maßraum*. Als bedeutsame Maße erweisen sich das *Zählmaß*, mit dessen Hilfe man später Eigenschaften von Integralen auf Reihen überführen kann, sowie das *Lebesgue-Borel-Maß*, das jedem halboffenen Quader sein natürliches Volumen zuordnet.

Unter Verwendung von *Stufenfunktionen* kann man nun das Integral für messbare Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ – wobei X ein Maßraum ist – bezüglich des durch den Maßraum gegebenen Maßes definieren.

Als wichtige Sätze für die Arbeit mit Integralen erweisen sich der *Satz von Fubini*, der das Zurückführen mehrdimensionaler Integrale auf den eindimensionalen Fall erlaubt, sowie die Transformationsformel, die die Integration über alternative Koordinatendarstellungen beschreibt.

Ein entsprechender Zugang findet sich beispielsweise im Skript zur Reellen Analysis von Glöckner (2008).

1.1.2 Möglicher Aufbau eines Zugangs zum Riemann-Integral

Bei der Definition des (mehrdimensionalen) Riemann-Integrals kann man in vielen Punkten wie im eindimensionalen Fall vorgehen. Zunächst erweitert man das Konzept (abgeschlossener) Intervalle auf mehrdimensionale *Quader*. Diese stellen die Bereiche dar, über die eine Funktion integriert werden soll. Mit Hilfe dieser Quader kann man nun (analog zum eindimensionalen Fall) *Ober-* und *Untersummen* bzw. *Zwischensummen* definieren, deren Grenzwerte später den Wert des Integrals definieren. Dazu muss zunächst das Konzept der *Zerlegung* von Quadern in Teilquader eingeführt werden.

Man kann zeigen, dass die Zugänge über Ober- und Untersummen bzw. über Zwischensummen äquivalent sind. Somit stehen beide damit verbundenen Darstellungsformen für die Beweise weiterer Eigenschaften zur Verfügung. Auch für mehrdimensionale Riemann-Integrale kann man eine abgeschwächte Form des *Satzes von Fubini* beweisen.

Unter Verwendung des *Jordan-Inhaltes*, der auf der Idee beruht, komplizierte Mengen von außen und von innen durch Quader anzunäheren, lässt sich dann Integration über kompliziertere Mengen beschreiben. Dabei muss das Konzept der *Jordanschen Nullmengen* eingeführt werden. Mit diesem Konzept kann man dann weitere Aussagen über *Jordan-Messbarkeit* und über Riemann-integrierbare Funktionen, die nicht überall stetig sind, machen. Auch die Transformationsformel lässt sich beweisen.

Entsprechende Zugänge finden sich bei A'Campo-Neuen (2011); Duistermaat und Kolk (2004); Roch (2013); Sauvigny (2014).

1.1.3 Vergleich der beiden Integrations-Begriffe

Der Grundgedanke beider Zugänge ist die Idee des Messens des Volumens, das eine Funktion „einschließt". Es wird deutlich, dass die Einführung des Lebesgue-Integrals einen deutlich größeren Vorlauf (die Maßtheorie) braucht, dafür aber einen vielseitigeren Integrationsbegriff liefert, der viele Anwendungen abseits der Volumenmessung ermöglicht. Ein wichtiges Beispiel hierfür ist die Wahrscheinlichkeitstheorie (diskret und kontinuierlich). Ein weiteres Beispiel besteht in der Möglichkeit, Reihen als Integrale (mit dem Zählmaß) anzusehen. In der Tat stellt das Lebesgue-Integral den Integrationszugang dar, der bedeutsam und nötig für den Eintritt in aktuelle mathematische Forschung ist.

Die Einführung des Riemann-Integrals benötigt einen geringeren Vorlauf und verallgemeinert im Wesentlichen den typischen eindimensionalen Zugang. Der Integrationsbegriff eignet sich gut für nicht zu komplizierte Beispiele, ist jedoch bei komplizierteren Beispiel deutlich weniger nützlich als das Lebesgue-Integral. Tatsächlich kann man ein Maß wählen, sodass die Riemann-Integrierbarkeit im Prinzip ein Spezialfall der Lebesgue-Integrierbarkeit ist.

1.2 Potenzielle Schnittstellen

Es gilt nun Bereiche der Mathematikdidaktik und der Schulmathematik zu identifizieren, deren Bezug zum fachmathematischen Rahmen den Erwerb mathematikbezogener Schnittstellenkompetenz fördert. Für den Bereich der mehrdimensionalen Integrationstheorie bieten sich – schulmathematisch geordnet – drei Oberthemen an: Geometrie, Integralrechnung und Stochastik. Eine Auswahl (ohne Anspruch auf Vollständigkeit) entsprechender Teilthemen wird im Folgenden vorgestellt.

1.2.1 Messen von Flächeninhalten und Volumina im Allgemeinen

Der Aspekt des Messens, insbesondere von Flächeninhalten und Volumina, ist expliziter Bestandteil der Kernlehrpläne (MSW NRW, 2007, 2013). Als zwei wesentliche Aspekte der Grundidee *Messen* nennen Weigand et al. (2014, S. 160 f.) das *Auslegen* einer zu messenden Größe („Messen-durch-Auslegen-und-Zählen-Aspekt“) und das *Ausrechnen* von Inhalten („Messen-als-Berechnen-Aspekt“). Die Charakterisierung von Messen als „Auslegen bzw. Ausfüllen“ (mit kongruenten Flächen- bzw. Volumenstücken) beschreiben Weigand et al. (2014, S.171 f.) als eine logische Folgerung eines auf David Hilbert zurückgehenden (vgl. Volkert, 2015) axiomatischen Flächeninhaltsbegriffs.

Der Bezug zu fachmathematischen Inhalten ist in beiden Zugängen zur mehrdimensionalen Integration deutlich. Sowohl die Zerlegung von Quadern, die Approximierung n-dimensionaler Volumina durch Ober-, Unter- oder Zwischensummen und das Konzept des Jordan-Inhaltes als auch die Theorie messbarer Mengen und Maßräume bieten viele Ansatzpunkte zur Verknüpfung von Wissen. Desweiteren liefern beide Integralbegriffe eine Möglichkeit, kompliziertere n-dimensionale Volumina explizit auszurechnen. Ein weiterer, damit verbundener Aspekt des Messens ist die Approximation von Raum- und Flächeninhalten (Weigand et al., 2014, S. 179, ff.).

1.2.2 Das Prinzip von Cavalieri im Speziellen

Ein weiterer Aspekt des Messens von Flächeninhalten und Volumina ist die *Flächen- und Körperverwandlung*. Ein Beispiel hiefür ist das *Prinzip des Cavalieri*. In der Schulmathematik spielt es meist für den Volumenvergleich von Körpern mit gleicher Grundfläche und Höhe eine Rolle (inbsb. bei der Herleitung der Kegelvolumenformel aus der Pyramidenvolumenformel). Es lässt sich jedoch ohne Weiteres auch für den Vergleich von Flächeninhalten verwenden. In beiden Zugängen zur mehrdimensionalen Integrationstheorie lässt sich das Prinzip von Cavalieri fachmathematisch als Spezialfall des *Satzes von Fubini* formulieren. Die Schulversion ist wiederum ein Spezialfall dieser Formulierung. Somit ist auch hier ein Bezug vorhanden, der für den Ausbau mathematikbezogener Schnittstellenkompetenz benutzt werden kann. (Weigand et al., 2014, S. 177 ff.)

1.2.3 Grundvorstellungen zum Integralbegriff

Die (eindimensionale) Integration an sich stellt ebenfalls einen Bestandteil des Kernlehrplans NRW für Mathematik dar (MSW NRW, 2013, S. 17). Aus fachlicher Sicht unterscheiden Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm und Weigand (2016, S. 238) den *Maßaspekt*, den *Produktsummenaspekt* und den *Stammfunktionsaspekt* des Integralbegriffs. Aus didaktischer Sicht werden als Grundvorstellungen die *(Re-)Konstruktionsvorstellung*, die *Flächeninhaltsvorstellung*, die *Mittelwertsvorstellung* und die *Kumulationsvorstellung* unterschieden. Genauere Ausführungen zu diesen Aspekten und Vorstellungen findet man bei Greefrath et al. (2016, S. 239 ff.).

Für den Erwerb mathematikbezogener Schnittstellenkompetenz lässt sich bei beiden Zugängen zur mehrdimensionalen Integration diskutieren, welche Aspekte bei den jeweiligen Integralen auch im mehrdimensionalen Fall vorhanden sind und welche Grundvorstellungen sich fortsetzen lassen. Bei beiden Zugängen kann man außerdem den eindimensionalen Fall mit der Integration in der Schule vergleichen. Dabei ist insbesondere die Betrachtung von Defnitionsbereichen, die keine Intervalle sind, interessant.

Insbesondere beim mehrdimensionalen Riemann-Integral bietet es sich an, die mehrdimensionale Konstruktion mit dem eindimensionalen Vorgehen (insbesondere auch in der Schule) zu vergleichen.

1.2.4 Ereignisräume und Wahrscheinlichkeitsmaße

Eine wichtige Anwendung der Maßtheorie (auch aus fachmathematischer Sicht) ist die Wahrscheinlichkeitstheorie. σ-Algebren stellen die Grundstruktur für die Beschreibung von Ereignissen (messbaren Mengen) auf Stichprobenmengen dar. Die Abbildung, die einem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zuordnet, ist ein Maß mit Gesamtvolumen 1. Dies lässt sich auch auf die diskreten Fälle anwenden, wie sie typischerweise in der Schulmathematik behandelt werden. Somit ist ein offensichtlicher Schulbezug vorhanden, der Grundlage für den Aufbau mathematikbezogener Schnittstellenkompetenz sein kann. Insbesondere der Aufbau von MHK kann dadurch unterstützt werden, dass aufgezeigt wird, wie sich Begriffe der diskreten Wahrscheinlichkeitstheorie (z. B. Erwartungswert) im kontinuierlichen Fall fortsetzen lassen und welche Rolle das Integral als „überabzählbare Verallgemeinerung" abzählbarer Summation dabei spielt.

1.2.5 Das Gaußsche Fehlerintegral

Einen weiteren, zwar sehr speziellen, aber auch wichtigen Bezug zwischen Wahrscheinlichkeitstheorie und mehrdimensionaler Integrationstheorie bildet das *Gaußsche Fehlerintegral*. Die Gaußsche Glockenkurve ist explizit im Kernlehrplan erwähnt (MSW NRW, 2013, S. 34) und kann auch in der Schule als Beispiel einer nicht elementar integrierbaren Funktion gesehen werden. Um nun nachzurechnen, dass der Wert des Integrals tatsächlich gleich eins ist, bietet ein zweidimensionaler Integrationszugang in der Tat eine interessante Möglichkeit, den Wert des Integrals exakt zu bestimmen. Dieses funktioniert für beide Integral-Zugänge. [1]

1.2.6 Abschließendes zum Potenzial für den Aufbau mathematischer Schnittstellenkompetenz

Durch die obigen Ausführungen ist deutlich geworden, dass es eine Vielzahl von Bezügen zwischen Schulmathematik, Mathematikdidaktik und der mehrdimensionalen Integrationstheorie gibt, die sinnvoll für den Aufbau mathematikbezogener Schnittstellenkompetenz genutzt werden können. Dabei erhebet die obige Aufstellung keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Offensichtlich bietet also der Bereich der mehrdimensionalen Integrationstheorie einen guten Ausgangspunkt für den Entwurf eines fachmathematischen Schnittstellenmoduls.

2 Inhaltliche Auswahl für das Schnittstellenmodul

Im letzten Abschnitt wurde der grobe fachmathematische Rahmen festgelegt und auf verwendbare Bezüge zur Mathematikdidaktik und zur Schulmathematik hin analysiert. Basierend auf dieser Analyse muss in Phase (II) nun eine inhaltliche Auswahl getroffen werden. Hierzu muss zunächst entschieden werden, welcher fachmathematische Zugang zur mehrdimensionalen Integration gewählt werden soll.

Wie in der obigen Analyse sichtbar geworden ist, liefern beide Zugänge Möglichkeiten zum Aufbau mathematikbezogener Schnittstellenkompetenz. Bei der Einführung des Lebesgue-Integrals wird der Bezug zur Wahrscheinlichkeitstheorie deutlicher, während bei der Einführung des mehrdimensionalen Riemann-Integrals ein expliziterer Vergleich mit der Integration in der Schule vollzogen werden kann.

[1] Die im folgenden Modul verwendete Mathematik führt für den Beweis nicht weit genug. Einen auf dem vorgestellten Zugang basierenden Nachweis findet man bspw. bei Duistermaat und Kolk (2004, S. 465 f).

Da es auf inhaltlicher Ebene Argumente für beide Zugänge gibt, wird als ein weiteres Argument für die Auswahl der organisatorische Rahmen des fachmathematischen Schnittstellenmoduls fungieren. Möchte man das Schnittstellenmodul in eine Vorlesung einbetten, in der auch Bachelor-Mathematik-Studierende sitzen, so ist unbedingt das Lebesue-Integral als das Integral zu wählen, das anschlussfähig für die weitere mathematische Ausbildung eben dieser Studierenden ist. Für das Schnittstellenmodul kann dann der Kurs bspw. zeitweise getrennt werden und / oder es spezielle Übungsaufgaben und / oder Übungsgruppen für die Lehramtsstudierenden geben.

Handelt es sich allerdings um eine Veranstaltung speziell für Lehramtsstudierende, so kann man zwar auch das Lebesgue-Integral einführen, die Nähe zum Integralbegriff der Schulmathematik liefert aber auch ein gutes Argument für die Behandlung des mehrdimensionalen Riemann-Integrals. Im Folgenden soll genau dieser Weg gegangen werden. Es soll explizit angemerkt werden, dass es sich nicht um eine Entscheidung *gegen* das Lebesgue-Integral, sondern um eine Entscheidung *für* das Riemann-Integral handelt. Die Konzeption eines fachmathematischen Schnittstellenmoduls basierend auf dem Lebesgue-Integral ist ebenso auf vernünftige Art und Weise möglich.

Literaturverzeichnis

A'Campo-Neuen, A. (2011). *Skript zur Vorlesung Mathematische Methoden III. Herbstsemester 2011. Kapitel 4. Reelle Analysis: Integration.* Zugriff auf `http://jones.math.unibas.ch/~annette/vorlesung11_files/SkriptMatheIII/skript9.pdf` (20. August 2016)

Duistermaat, J. J. & Kolk, J. A. (2004). *Multidimensional Real Analysis II: Integration*. Camebridge University Press. (Cambridge studies in advanced mathematics)

Glöckner, H. (2008). *Reelle Analysis: Mehrfachintegration. Universität Paderborn, WS 2008/09.* Zugriff auf `http://www2.math.uni-paderborn.de/fileadmin/Mathematik/AG-Gloeckner/Reelle_Analysis_WS_14/scriptum-gloeckner_01.pdf` (23. August 2016)

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Springer Spektrum.

MSW NRW. (2007). *Kernlehrplan für das Gymnasium - Sekundarstufe I (G8) in Nordrhein-Westfalen Mathematik* (1. Aufl.). Ritterbach Verlag.

MSW NRW. (2013). *Kernlehrplan für das Gymnasium - Sekundarstufe II (G8) in Nordrhein-Westfalen mathematik* (1. Aufl.). Ritterbach Verlag.

Roch, S. (2013). *Skript zur Vorlesung Analysis II. SS 2013.* Zugriff auf `http://www3.mathematik.tu-darmstadt.de/index.php?eID=tx_nawsecuredl&u=0&g=0&t=1471961447&hash=945963b50afbb76e125229b7959fae48faa1ff98&file=fileadmin/home/users/186/Skripte_Roch/analysis_II_ss13.pdf` (20. August 2016)

Sauvigny, F. (2014). *Analysis*. Springer Spektrum.

UPB. (2016). *Besondere Bestimmungen der Prüfungsordnung für den Masterstudiengang Lehramt an Gymnasien und Gesamtschulen mit dem Unterrichtsfach Mathematik an der Universität Paderborn.* (Noch nicht veröffentlicht. Vorabversion)

Volkert, K. (Hrsg.). (2015). *David Hilbert. Grundlagen der Geometrie (Festschrift 1899)*. Springer Spektrum.

Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., ... Wittmann, G. (2014). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I.* Springer Spektrum.