

Schnittstellenmodul: Das Prinzip des Cavalieri – Zwischen dem *Satz von Fubini* und der Schulmathematik

Max Hoffmann

Stand: 11. Mai 2017

Der Satz von Fubini liefert eine Möglichkeit mehrdimensionale Integration auf iterierte eindimensionale Integration zurückzuführen. Für $n = 3$ bedeutet dies, dass ein Körpervolumen via Integration über die Querschnittsflächen auf verschiedenen Höhen berechnet werden kann, solange diese Querschnittsflächen Jordan-messbar sind. Genau auf dieser Idee beruht die Schulvariante des *Prinzips von Cavalieri*, das die Volumengleichheit zweier Körper mit gleicher Grundfläche auf die Flächengleichheit der zur Grundfläche parallelen Querschnitte auf jeder Höhe zurückführt. Das zweidimensionale Analogon dieses Konzeptes findet sich auch in den üblichen Flächeninhaltsformeln für beispielsweise Dreiecke und Trapeze wieder.

Formuliert man das Prinzip des Cavalieri für eine beliebige Dimension n mit den Mitteln der mehrdimensionalen Riemann-Integration, ist es im Wesentlichen ein Corollar des Satzes von Fubini und findet sich im Skript. Im Folgenden wird es noch einmal genannt:

Satz 1 (Prinzip des Cavalieri)

Seien $Q \subset \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ Quader und $A \subset Q \times I \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Jordan-messbare Menge. Für $h \in I$ definieren wir den Querschnitt auf der Höhe h durch

$$A_h := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, h) \in A\}.$$

Ist A_h für jedes $h \in I$ Jordan-messbar, so gilt

$$\text{J-vol}_{n+1}(A) = \int_I \text{J-vol}_n(A_h) \, dh.$$

Ausgewählte intendierte Lernergebnisse

Die Studierenden

- (LE 1) nutzen ihr Wissen über mehrdimensionale Riemann-Integration, um das *Prinzip des Cavalieri*, wie es in der Schule formuliert wird, mathematisch präzise zu beschreiben
- (LE 2) führen das Prinzip des Cavalieri auf einen Spezialfall des Satzes von Fubini zurück
- (LE 3) nutzen das Prinzip des Cavalieri zum Nachweis typischer, aus der Schulmathematik bekannter, Inhaltsformeln
- (LE 4) formulieren das Prinzip des Cavalieri für den zweidimensionalen Fall
- (LE 5) entwerfen begründet eine für SuS der Unterstufe verständliche Darstellung des Cavalieri-Prinzips und dessen Begründung
- (LE 6) beurteilen für typische Flächeninhaltsformeln der Schulmathematik, ob das Cavalieri-Prinzip in diesen entdeckbar ist
- (LE 7) vergleichen das Cavalieri-Prinzip und Zerlegebeweise in Bezug auf den Einsatz zur Begründung von Flächeninhaltsformeln unter Verwendung mathematikdidaktischer Theorien

- (LE 8) entwerfen eine Lerneinheit für SuS der Oberstufe zur Berechnung von Volumina über die Funktion der Querschnittsflächen
- (LE 9) analysieren den Zugang zur Volumenberechnung aus dem vorigen Lernziel aus mathematikdidaktischer Sicht
- (LE 10) vergleichen den Zugang zur Volumenberechnung aus dem vorigen Lernziel mit dem Konzept des Rotationsvolumens aus mathematischer und mathematikdidaktischer Sicht

Aufbau der Lehr-/Lerneinheit

Die *Voraussetzungen* bestehen in der komplette Behandlung des Skriptes bis auf das Cavalieri-Prinzip, da sowohl der Satz von Fubini als auch der Jordan-Inhalt benötigt werden.

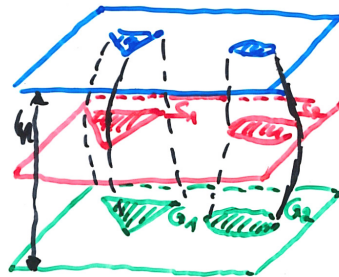
Beschreibung des Vorgehens Ausgehend von einer Möglichkeit, wie in der Schule kompliziertere Volumina ausgerechnet werden, soll ein präziser mathematischer Satz formuliert und bewiesen werden. Wir starten mit dem folgenden (abgezeichneten) Auszug aus dem Schulbuch *Lambacher Schweizer 10, NRW (graue Ausgabe), (Schmid & Weidig, 1996, S. 116)*:

Satz des Cavalieri:

Wenn für zwei Körper gilt:

- (1) Die Flächeninhalte der Grundflächen sind gleich: $G_1 = G_2$;
- (2) Sie haben gleiche Höhen;
- (3) Schnittflächen im gleichen Abstand parallel zur Grundfläche haben den gleichen Flächeninhalt: $S_1 = S_2$,

dann haben beide Körper das gleiche Volumen.



Offensichtlich geht es um den Vergleich von Volumina bestimmter Körper. Die Ausgangsfrage soll sein:

Wie können wir den *Satz des Cavalieri* aus dem Schulbuch unter Verwendung des Jordan-Inhalts fachmathematisch präzise formulieren?

Die folgenden Aspekte kann man mit den Studierenden im Gespräch erarbeiten. „Körper“ können wir als Punktmengen im \mathbb{R}^3 auffassen. Seien also $A, B \subset \mathbb{R}^3$ (nichtleer) die beiden Körper. Die obige Skizze legt die Annahme der Existenz eines Quaders $Q' \subset \mathbb{R}^3$ nahe mit $A, B \subset Q'$. Ohne Einschränkung wollen wir die Grundflächen der zu betrachtenden Körper als parallel zur x_1x_2 -Ebene ansehen. Da wir Querschnitte parallel zur Grundfläche in verschiedenen Höhen (also x_3 -Koordinaten) betrachten wollen, ist es sinnvoll, Quader $Q \subset \mathbb{R}^2$ und $I \subset \mathbb{R}$ so zu wählen, dass $Q' = Q \times I$ ist. Das I beschreibt die „Höhenachse“ und das Q die in Fig. 3 farbig markierten Rechtecke auf verschiedenen Höhen. In einer *Studierendenarbeitsphase* kann nun Aufgabe 1 bearbeitet werden.

Aufgabe 1 (Beschreibung von Querschnittsflächen)

Geben Sie eine formale Definition für die Querschnittsflächen $A(h)$ und $B(h)$ von A bzw. B auf der Höhe h an. Überlegen Sie sich dazu zunächst den Definitionsbereich für h .

Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 1 Sei $h \in I$. Dann definieren wir

$$A(h) = \{x \in Q \mid (x, h) \in A\} \quad \text{und} \quad B(h) = \{x \in Q \mid (x, h) \in B\}.$$

Direkt im Anschluss kann man nun die Schulversion des Satzes von Cavalieri erarbeiten (vgl. Aufgabe 2).

Aufgabe 2 (Satz des Cavalieri (Schulversion))

Formulieren Sie den Satz des Cavalieri analog zum Schulbuchauszug aus Abbildung ?? unter Verwendung des Jordan-Inhalts.

Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 2 Seien $A, B \subset \mathbb{R}^3$ Jordan-messbar und seien $Q \subset \mathbb{R}^2$ und $I \subset \mathbb{R}$ Quader mit $A, B \in Q \times I$. Wir definieren

$$A(h) = \{x \in Q \mid (x, h) \in A\} \quad \text{und} \quad B(h) = \{x \in Q \mid (x, h) \in B\}.$$

Wenn nun für jedes $h \in I$ gilt, dass $A(h)$ und $B(h)$ Jordan-messbar sind und außerdem $J\text{-vol}_2(A(h)) = J\text{-vol}_2(B(h))$, dann ist $J\text{-vol}_3(A) = J\text{-vol}_3(B)$.

Dieser Satz soll an dieser Stelle noch nicht bewiesen werden. Zunächst analysieren wir die genaue Aussage des formulierten Satzes. Der Satz liefert eine Möglichkeit, das Volumen zweier Körper unter gewissen Voraussetzungen zu vergleichen. Nicht Bestandteil des Satzes ist eine Aussage über die Berechnung des Volumens. In der Schule wird oft wie folgt argumentiert: „Wenn man das Volumen von einem der beiden Körper bestimmen kann, hat man auch das Volumen des anderen Körpers.“ Die mathematisch präzise Formulierung ermöglicht nun aber eine Idee für die explizite Berechnung eines Körpervolumens: Offenbar hängt das Volumen vom Intervall I und dem Querschnitt zu jeder „ $h \in I$ “ ab. Über die anschauliche Idee, den Körper in kleine Scheiben zu schneiden, die näherungsweise quaderförmig sind, und diese dann aufzuaddieren kommt man sofort zu folgender Vermutung:

Satz 2 (Cavalieri (dreidimensional))

Sei $A \subset \mathbb{R}^3$ nichtleer und Jordan-messbar und seien $Q \subset \mathbb{R}^2$ und $I \subset \mathbb{R}$ Quader mit $A \in Q \times I$. Für $h \in I$ definieren wir den Querschnitt auf der Höhe h durch

$$A(h) = \{x \in Q \mid (x, h) \in A\}.$$

Ist $A(h)$ für jedes $h \in I$ Jordan-messbar, so gilt

$$J\text{-vol}_3(A) = \int_I J\text{-vol}_2(A(h)) \, dh.$$

Durch die Überlegung

$$\int_{Q \times I} \mathbb{1}_A(x) \, dx = \int_A 1 \, dx = J\text{-vol}_3(A) = \int_I J\text{-vol}_2(A(h)) \, dh = \int_I \left(\int_{A(h)} 1 \, dx \right) \, dh$$

sieht man, dass es sich bei der Aussage um einen Spezialfall des Satzes von Fubini handelt. Das Prinzip von Cavalieri für beliebige Dimension, samt formalem Beweis findet man im Skript; der Beweis der Schulversion folgt sofort¹.

Das Prinzip des Cavalieri bietet nun eine Vielzahl von Anknüpfungspunkten zur Schulmathematik. Einige davon werden in den folgenden (nichttrivialen) Übungsaufgaben verarbeitet, die in Präsenz und/oder Hausübungen verwendet werden können. Dazu gehört insbesondere der Nachweis verschiedener Inhaltsformeln, die in der Schule anders, oder nur anschaulich bewiesen werden. Diese Nachweise sind Bestandteil der Aufgaben 4, 3, 5 und 7, die somit Schnittstellenaufgaben im Sinne der wechselseitigen Verknüpfung von Schulmathematik und Hochschulmathematik sind. In den Aufgaben 6 und 8 spielen außerdem mathematikdidaktische Bezüge eine Rolle. Es wird versucht, die Grundidee des Cavalieri-Prinzips sowohl auf die Sekundarstufe I, als auch auf die Sekundarstufe II (Mathematik) zu übertragen.

¹Man braucht die Translationsinvarianz des Jordan-Inhalts.

Aufgabe 3 (Kreisinhalt)

Bestimme den Flächeninhalt eines Kreises K mit Radius r mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri.

Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 3 Sei $I = [-r, r]$. Wir wählen $Q = I^2$. Dann ist ohne Einschränkung $K \subset Q$. Für $h \in I$ gilt für die Querschnittslänge auf der Höhe h nach der Kreisgleichung

$$K(h) = 2\sqrt{r^2 - h^2}.$$

Dabei ist $K(h)$ als eindimensionaler Quader Jordan-messbar. Mit dem Prinzip von Cavalieri gilt

$$\text{J-vol}_2(K) = \int_{-r}^r 2\sqrt{r^2 - h^2} \, dh = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - h^2} \, dh$$

Mit Substitution von zunächst $h = r \sin u$ und später $s = 2u$ erhält man

$$\text{J-vol}_2(K) = 2 \cdot \left[\frac{1}{2} \left(rh \sqrt{1 - \frac{h^2}{r^2}} + r^2 \arcsin \left(\frac{h}{r} \right) \right) \right]_{-r}^r = r^2 (\arcsin(1) - \arcsin(-1)) = \left(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi \right) r^2 = \pi r^2$$

Aufgabe 4 (Rechteckige Pyramide)

Bestimme die Formel für das Volumen einer Pyramide $P \subset \mathbb{R}^3$ mit rechteckiger Grundfläche (Seitenlängen a, b) und Höhe h_P mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri.

Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 4 Sei $Q = [0, a] \times [0, b]$ und $I = [0, h_P]$. Dann ist ohne Einschränkung $P \in Q \times I$. Für $h \in I$ gilt für die Querschnittsfläche $P(h)$ z. B. mit dem Strahlensatz

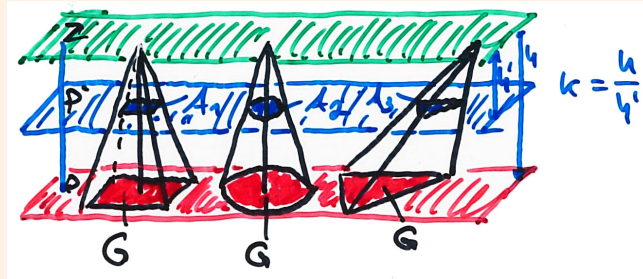
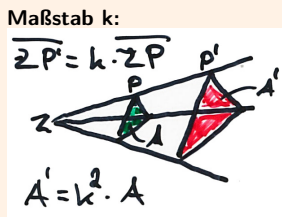
$$P(h) = ab \left(1 - \frac{h}{h_P} \right)^2 = ab \left(1 - \frac{2h}{h_P} + \frac{h^2}{h_P^2} \right).$$

Dabei muss erwähnt werden, dass die Querschnittsflächen als zweidimensionale Quader Jordan-messbar sind. Cavalieri liefert nun

$$\begin{aligned} \text{J-vol}_3(P) &= \int_0^{h_P} ab \left(1 - \frac{2h}{h_P} + \frac{h^2}{h_P^2} \right) \, dh \\ &= ab \left(\int_0^{h_P} 1 \, dh - \frac{2}{h_P} \int_0^{h_P} h \, dh + \frac{1}{h_P^2} \int_0^{h_P} h^2 \, dh \right) \\ &= ab \left(h_P - \frac{2}{h_P} \cdot \frac{1}{2} \cdot h_P^2 + \frac{1}{h_P^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot h_P^3 \right) \\ &= ab \left(h_P - h_P + \frac{1}{3} h_P \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot (a \cdot b) \cdot h_P. \end{aligned}$$

Aufgabe 5 (Kegelvolumen)

In der Schule wird die Formel für das Kegelvolumen oft über die Pyramidenvolumenformel und das Cavalieri-Prinzip begründet. Dazu vergleiche auch die folgende Abbildung aus *Maßstab 10*, (Schröder, Wurl & Wynands, 2008, S. 92) (abgezeichnet):



Alle 3 Spitzkörper haben gleich große Grundflächen und gleiche Höhe.

Begründe: Alle Pyramiden und Kegel mit gleich großer Grundfläche und gleicher Höhe haben gleiches Volumen.

Beweise die Formel für das Kegelvolumen (Radius r , Höhe h_K) mit Hilfe von Aufgabe 4 und 3, sowie des Prinzips von Cavalieri.

Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 5 Wähle $a = \sqrt{\pi r^2} = \sqrt{\pi}r$ als Kantenlänge einer quadratischen Pyramidengrundfläche. Dann folgt sofort $J\text{-vol}_3(K) = \frac{1}{3} \cdot (\pi \cdot r^3) \cdot h_K$ aus den Aufgaben und dem Prinzip von Cavalieri.

Aufgabe 6 (Der zweidimensionale Cavalieri)

- Formulieren Sie eine zweidimensionale Version des Prinzips des Cavalieri, die für SuS der Unterstufe verständlich sein soll.
- Entwickeln Sie unter Verwendung dynamischer Geometriesoftware eine Lernumgebung, die das Entdecken des zweidimensionalen Cavalieri-Prinzips unterstützt. Begründen Sie Ihre Gestaltung.
- Überlegen Sie sich eine Begründung des zweidimensionalen Cavalieri-Prinzips, die für SuS der Unterstufe zugänglich ist.
- In welchen typischen Flächeninhaltsformeln kann man das Konzept des zweidimensionalen Cavalieri-Prinzips entdecken. Nennen Sie mindestens zwei Beispiele und erläutern Sie ihre Wahl.
- Diskutieren Sie: Wie unterscheiden sich aus mathematikdidaktischer Sicht Begründungen von Flächeninhaltsformeln über Zerlegungen von Begründungen mit Hilfe des Cavalieri-Prinzips.

Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 6 Bei dieser Aufgabe kann das Cavalieri-Prinzip für den zweidimensionalen Fall beispielsweise als eine dynamische Sichtweise auf die Gleichheit von Flächen gesehen werden: Die Gleichheit zweier Flächen kann man mit Cavalieri begründen, wenn sie durch eine Scherung (und eventuelle eine Translation) ineinander übergehen. Somit erweist sich der Einsatz dynamischer Geometriesoftware als nützlich. Die Besprechung der Aufgabe kann auch ein Ausgangspunkt für eine Beschäftigung mit der Translationsinvarianz des Jordan-Inhalts sein.

Aufgabe 7 (Kugelvolumen)

Bestimme das Volumen einer Kugel K mit Radius r mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri.

Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 7 Sei $I = [-r, r]$ und $Q = I^2$. Dann ist ohne Einschränkung $K \subset Q \times I$. Für $h \in I$ gilt für die Querschnittsfläche auf Höhe h nach Aufgabe 3 und der Kreisgleichung $K(h) = \pi r^2 - \pi h^2$.

Dabei ist $K(h)$ als Kreisschreibe Jordan-messbar. Mit dem Prinzip von Cavalieri gilt

$$\begin{aligned} \text{J-vol}_3(K) &= \int_{-r}^r \pi r^2 - \pi h^2 \, dh \\ &= 2\pi r^3 - \pi \left[\frac{1}{3} h^3 \right]_{-r}^r \\ &= 2\pi r^3 - \frac{2}{3} \pi r^3 \\ &= \frac{4}{3} \pi r^3. \end{aligned}$$

Aufgabe 8 (Querschnittsflächenfunktionen)

Sei K ein Körper im \mathbb{R}^3 , der die Höhe h_K hat, und dessen Jordan-Inhalt der Querschnittsfläche für jedes $h \in [0, h_K]$ durch eine Funktion $q_K : [0, h_K] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, h \mapsto q_K(h)$ gegeben ist. q_K nennen wir die *Querschnittsflächenfunktion* von K .

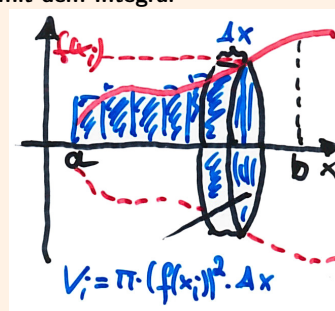
- a) Entwickeln Sie eine Lerneinheit für einen Oberstufenkurs im Rahmen der Integralrechnung, die Querschnittsflächenfunktionen nutzt um Volumina verschiedener Körper auszurechnen. Die SuS sollen sich das Verfahren mit Hilfe der Lerneinheit selbstständig erarbeiten können.

Hinweis: Nutzen Sie Ihr Wissen über das Prinzip des Cavalieri. Hilfreich können auch die vorangegangenen Aufgaben sein.

- b) Untersuchen Sie den Zugang zur Volumenmessung auf die vorkommenden Aspekte des Messens (Weigand et al., 2014, S. 158 ff.) sowie auf die angesprochenen Aspekte und Grundvorstellungen des Integrals (Greefrath, Oldenburg, Siller, Ulm & Weigand, 2016, S. 238 ff.).
- c) Vergleichen Sie den Zugang zur Volumenberechnung über *Querschnittsflächenfunktionen* mit der Volumenberechnung über *Rotationskörper* fachmathematisch und fachdidaktisch. Ausgangspunkt kann der folgende Auszug aus *Neue Wege, Analysis II*, (Schmidt, Körner & Lergenmüller, 2011, S. 172) (Abbildung abgezeichnet) sein. Recherchieren Sie aber auch gerne in weiteren Schulbüchern.

Berechnung des Volumens eines Rotationskörpers mit dem Integral

Die Fläche unter dem Graphen von f im Intervall $[a, b]$ rotiert um die x -Achse. Wir unterteilen das Intervall in n kleine Abschnitte der Breite $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Jeder der dadurch entstehenden Rechteckstreifen der „Höhe“ $f(x_i)$ erzeugt bei der Rotation eine Zylinderscheibe. Die Summe der Volumina dieser Zylinderscheiben liefert dann einen guten Näherungswert für das Volumen des Rotationskörpers.



$$V \approx \pi \cdot (f(x_1))^2 \cdot \Delta x + \pi \cdot (f(x_2))^2 \cdot \Delta x + \dots + \pi \cdot (f(x_n))^2 \cdot \Delta x = \pi \cdot \sum_{k=1}^n (f(x_k))^2 \cdot \Delta x$$

Der Grenzwert dieser Produktsummen kann als Integral berechnet werden.

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 8 In dieser Aufgabe wird ein Zugang zur exakten Volumenbestimmung vorgestellt, der auf dem Prinzip von Cavalieri beruht, aber mit dem Mitteln den in der Schule vorhandenen Integrationsmöglichkeiten auskommt. Für die Lösung der Aufgabe ist es erforderlich die gelernten fachmathematischen Konzepte begrifflich verstanden zu haben. Nur so können die zentralen Ideen zur Konzeption der Unterrichtseinheit verwendet werden. Außerdem wird wieder die Anwendung einer mathematikdidaktischen

Konzeption gefordert und in c) wird der Ansatz verküpft mit dem bekannten Ansatz über das Rotationsvolumen. Dieser kann auch fachmathematisch als Spezialfall des Zugangs über die Querschnittsflächenfunktionen analysiert werden.

Zusammenfassendes

In diesem Teil der Lerneinheit wurde das Prinzip des Cavalieri, wie es in der Schule zum Vergleich von Körpervolumina verwendet wird, mit Hilfe der Riemann-Integrationstheorie und insbesondere des Jordaninhalts allgemein formuliert. Dabei wurde festgestellt, dass es sich um einen Spezialfall des Satzes von Fubini handelt. Das Prinzip erwies sich als hilfreich zum Nachweis verschiedener bekannter Volumenformeln. Die grundlegende Idee kann auch Anwendung bei der Betrachtung von Flächeninhalten in der Unterstufe sowie bei der Integralrechnung in der Oberstufe finden. Diese vielen Verknüpfungen machen deutlich, dass auch das Prinzip des Cavalieri einen guten Ausgangspunkt zur Entwicklung mathematikbezogener Schnittstellenkompetenz liefert.

Literaturverzeichnis

- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe*. Springer Spektrum.
- Schmid, A. & Weidig, I. (Hrsg.). (1996). *Lambacher Schweizer 10. Mathematisches Unterrichtswerk für Gymnasien. Ausgabe Nordrhein-Westfalen*. Ernst Klett Verlag.
- Schmidt, G., Körner, H. & Lergenmüller, A. (Hrsg.). (2011). *Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien. Analysis II*. Bildungshaus Schulbuchverlage.
- Schröder, M., Wurl, B. & Wynands, A. (Hrsg.). (2008). *Maßstab 10. Mathematik*. Bildungshaus Schulbuchverlage.
- Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., ... Wittmann, G. (2014). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*. Springer Spektrum.