# Schnittstellenmodul: Nutzbarmachung des Jordaninhalts für das Messen von Flächeninhalten in der Schulmathematik

Max Hoffmann

Stand: 11. Mai 2017

Ein wichtiger Schritt zur Beschreibung komplizierterer Mengen, auf denen eine Funktion Riemann-integrierbar sein kann, ist die Definition des *Jordan-Inhalts*. Im Folgenden soll beschrieben werden, wie der Spezialfall $n = 2$ genutzt werden kann, um eine Verknüpfung zum Messen und Approximieren von Flächeninhalten in der Mittelstufe herzustellen. Dabei werden aus mathematikdidaktischer Sicht der Auslege- und der Approximations-Aspekt des Messens in den Fokus genommen. Zuerst ist es dazu nötig, die – eher abstrakte – Definition über die Existenz des Integrals in eine anschaulichere Vorstellung zu überführen. Dabei werden verschiedene Aussagen über mehrdimensionale Ober- und Untersummen wiederholt. Zunächst soll noch einmal die Definition des Jordan-Inhalts angegeben werden.

**Definition 1 (Jordan-Messbarkeit, Jordan-Inhalt)**
Eine nichtleere beschränkte Menge $J \subset \mathbb{R}^n$ heißt Jordan-messbar, wenn $\mathbb{1}_f$ auf einem Quader $Q \supset J$ Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall heißt

$$\text{J-vol}_n\,(J) := \int_Q \mathbb{1}_J(x)\; dx = \int_J 1\; dx$$

der *(n-dimensionale) Jordan-Inhalt* von $J$.

**Ausgewählte intendierte Lernergebnisse**

Die Studierenden

(LE 1) verwenden die Definition des mehrdimensionalen Riemann-Integrals und des Jordan-Inhalts zur expliziten Berechnnung von Jordan-Inhalten bei einfachen geometrischen Flächen

(LE 2) stellen das Konzept des elementargeometrischen Quaderinhalts als Spezialfall des Jordaninhalts heraus

(LE 3) interpretieren den Jordan-Inhalt als gemeinsamen Grenzwert von Außen- und Inneninhalten

(LE 4) stellen die Idee der Flächeninhaltsmessung durch Zylindervolumenmessung heraus

(LE 5) wenden die Idee der Flächeninhaltsmessung durch Zylindervolumenmessung im Kontext schulischer Lerneinheiten an

(LE 6) planen aufbauend auf der Idee der Flächeninhaltsmessung durch Zylindervolumenmessung eine Lerneinheit

(LE 7) analysieren und bewerten die schulische Gittermethode unter Verwendung des fachmathematischen Konzepts des Jordan-Inhalts

(LE 8) nutzen die Theoreme und Ideen der Einführung des mehrdimensionalen Riemann-Integrals zur Argumentation

(LE 9) nutzen die Kontexte und Aspekte der Grundidee des Messens zur Analyse verschiedener Messsituationen

**Aufbau der Lehr-/Lerneinheit**

Die *Voraussetzung* für die folgende Einheit wurden bereits in den Abschnitten 1 bis 5 des Skriptes besprochen. Thematisch bedeutet das, dass das Riemann-Integral auf mehrdimensionalen Quadern unter Verwendung von Ober- und Untersummen eingeführt wurde und gezeigt wurde, dass dieser Ansatz äquivalent zur Verwendung Riemannscher Zwischensummen ist.

**Beschreibung des Vorgehens** Offensichtlich gibt der $n$-dimensionale Jordan-Inhalt ein Volumen für eine $n$-dimensionale Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ an. Für den Fall $n = 2$ wird durch den Jordan-Inhalt somit ein Flächeninhaltsbegriff definiert. Die erste Frage ist, wie sich dieser zu der üblichen Flächenmessung, die auf dem euklidischen Abstandbegriff beruht, verhält. Dies entspricht für einen Quader dem im Skript definierten elementargeometrischen Inhalt. Um dies nachzuweisen, bietet sich Aufgabe 1 an. Diese Aufgabe eignet sich auf Grund ihrer Kürze dafür, sie während einer Vorlesung für eine *Studierendenarbeitsphase* zu verwenden.

***Aufgabe 1 (Jordan-Volumen eines Rechtecks)***
Sei $R \subset \mathbb{R}^2$ ein nichttriviales Rechteck (also ein zweidimensionaler Quader). Zeigen Sie, dass $R$ Jordan-messbar ist und der Jordan-Inhalt tatsächlich dem üblichen Flächeninhalt entspricht..

*Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 1* Sei $\mathcal{Z}$ eine beliebige Zerlegung von $R$. Dann gilt für jedes $R_i \in \mathcal{Z}$ und $x \in R_i$ bereits $\mathbb{1}_R(x) = 1$. Wir erhalten $s(\mathbb{1}_R, \mathcal{Z}) = S(\mathbb{1}_R, \mathcal{Z}) = \mathrm{vol}_2(R)$. Da $\mathcal{Z}$ beliebig war, folgen Existenz und Volumengleichheit sofort aus:

$$\text{J-vol}_2(R) = \int_R dx = \int_R \mathbb{1}_R \, dx = \mathrm{vol}_2(R).$$

Als Nächstes kann man nun die Art der Flächeninhaltsbestimmung visuell deuten. Dazu skizziert man zunächst den Definitionsbereich über den das Integral ausgerechnet wird und zeichnet dann den Funktionsgraphen von $\mathbb{1}_R$ ein (vgl. Abbildung 1).

Die Studierenden können nun darüber diskutieren, an welchen Stellen in den beiden Skizzen der Jordan-Inhalt auftaucht. In der Tat ergeben sich zwei Interpretationen. Der Jordaninhalt ist definiert durch $\int_R 1 \, dx$ und entspricht somit der Maßzahl des Volumens des entstandenen Quaders. Außerdem gibt der Jordaninhalt aber auch die Maßzahl des Flächeninhaltes von $R$ an. Somit ergibt sich folgende Vermutung:

> Die gewählte Definition des Jordan-Inhalts beruht im zweidimensionalen Fall auf der Idee, Flächeninhalte durch geeignete, mit dem Riemann-Integral berechenbare, Volumina auszudrücken.

Kritische Studierende würden an dieser Stelle eventuell fragen, in welchen Situationen man denn ein Volumen gegeben hat und die Grundfläche gesucht ist. Jedoch ist vom Standpunkt des praktischen Messens die Volumenmessung ein einfacheres Problem als die Flächeninhaltsmessung: Man kann beispielsweise Wasser in das zu bestimmende Volumen einfüllen. Mit Hilfe einer Waage und

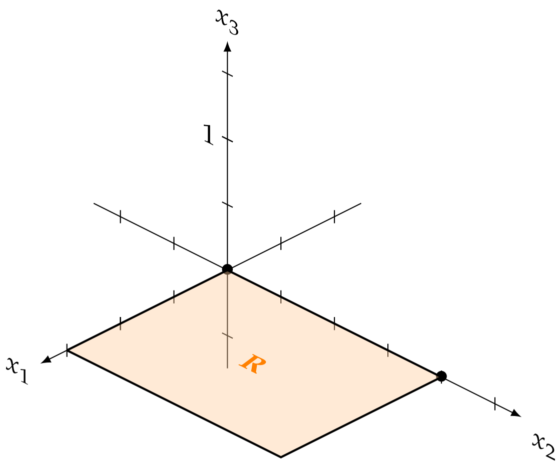



Abbildung 1: Veranschaulichung der Berechnung des Jordan-Inhalts eines Rechtecks

einer Dichtetabelle ist das Volumen schnell mit einer guten Genauigkeit bestimmt. Diese Idee aufgreifend bildet Aufgabe 2 eine potenzielle Hausaufgabe, die die Idee „Flächenmessung durch Volumenmessung" aufgreift mathematikdidaktisch aufarbeitet.

Die Frage ist nun, was geeignete Volumina für den Fall sind, dass die zu messende Fläche keine so einfache Form wie ein Rechteck hat.

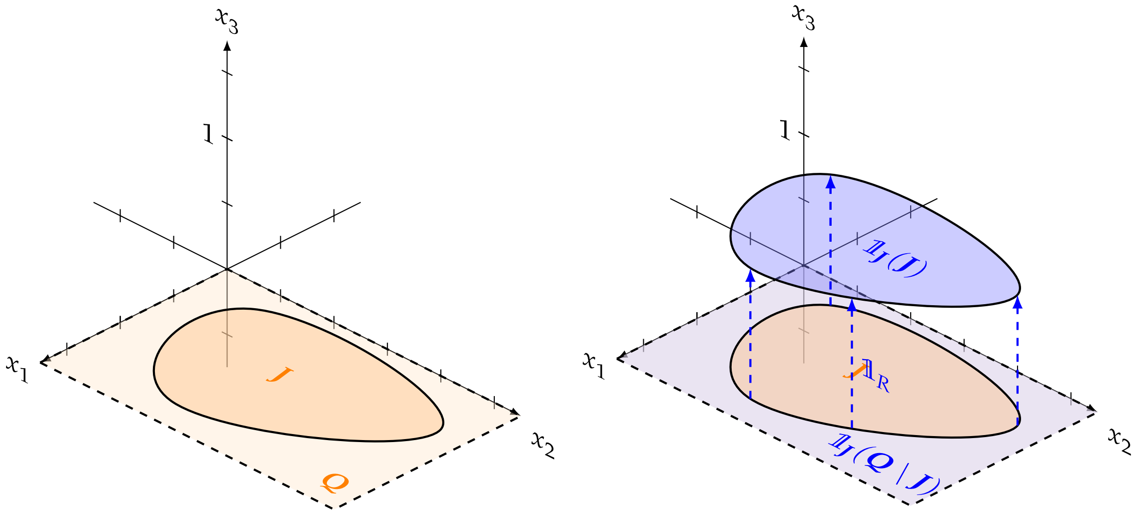



Abbildung 2: Jordan-Inhalt einer komplizierteren Fläche

Ein Blick in die Definition verrät, dass über eine Funktion integriert wird, die in jedem Punkt der zu messenden Menge den Wert *eins* annimmt. In unserem Fall ($n = 2$) bedeutet dies also, dass wir als Maßzahl für den Flächeninhalt einer Menge immer das Volumen eines Zylinders der Höhe eins berechnen, der als Grundfläche die zu messende Menge hat (siehe Abbildung 2).

Diese Dinge kann man im Gespäch mit den Studierenden erarbeiten und die obere Vermutung wie folgt verbessern:

> Die gewählte Defintion des Jordan-Inhalts beruht im zweidimensionalen Fall auf der Idee, Flächeninhalte durch Volumina von Zyindern der Höhe eins auszudrücken, deren Grundfläche die zu messende Fläche ist.

An dieser Stelle bietet es sich an, Bezug auf die aus der Schule bekannte Formel $V = G \cdot h$ zur Berechnung des Volumens $V$ eines Zylinders mit Grundfläche $G$ und Höhe $h$ zu nehmen. Durch Umformung erhält man $G = \frac{V}{h}$ und für $h = 1$ tatsächlich $G = V$. [1]

***Aufgabe 2 (Flächeninhalte aus Volumina berechnen)***
In der Vorlesung haben Sie gelernt, wie die Bestimmung des Jordan-Inhalts einer Fläche auf eine Volumenbestimmung zurückgeführt wird. Für das Messen von Flächeninhalten in der Praxis kann die Volumenmessung tatsächlich leichter als die Flächeninhaltsmessung sein.

Betrachten Sie dazu die folgende problemorientierte Aufgabe:

> Nehmt einen zylinderförmigen Gegenstand (Tasse, Glas, Mülleimer, ...) und bestimmt den Flächeninhalt der Innenquerschnittsfläche durch Messen. Zur Verfügung stehen Euch Wasser, eine Waage und ein Lineal. Stellt Euer Vorgehen und Eure Ergebnisse auf einem Plakat dar.

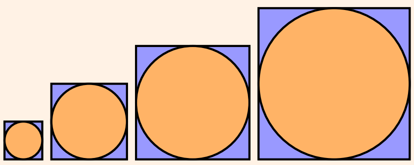
a) Bearbeiten Sie die Aufgabe und skizzieren Sie Ihren Lösungsweg.

b) Analysieren Sie, welche Aspekte und Kontexte des *Messens* bei der Lösung dieser Aufgabe vorkommen.

   *Hinweis:* Nutzen Sie ggf. Weigand et al. (2014, S. 158 ff.).

c) Entwickeln Sie eine Lehr-/Lerneinheit zur experimentellen Bestimmung der Kreiszahl $\pi$, die auf der obigen Idee der Kreisflächenmessung beruht.

   *Hinweis* Fasst man Kreise in möglichst kleine Quadrate ein, so stellt man schnell fest, dass man den Kreisdurchmesser als Seitenlänge nehmen muss. Zeichnet man sich dies für verschiedene Radien auf, so folgt aus der Ähnlichkeit der entstehenden Konfigurationen die Vermutung, dass der Anteil, den die Kreisfläche an der Quadratfläche hat, immer der gleiche ist.



   Es scheint also plausibel, die Existenz einer Zahl $k$ anzunehmen, sodass gilt

$$A_{\bigcirc} = k \cdot A_{\square} = k \cdot d^2.$$

*Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 2* Aufgabe b) ist eine typische Analyse einer Schulaufgabe, aus einem bestimmten didaktischen Blickwinkel. Bei Aufgabe c) besteht eine mögliche Lösung darin, dass die SuS in Paaren Kreisinhalte messen wie in a) beschrieben wurde. Außerdem müssen noch die jeweiligen Durchmesser bestimmt werden. Hierfür gibt es verschiedene Möglichkeiten. Man erhält eine Näherung für $\pi$ durch Mittelwertbildung.

Nun soll sich weiter mit der Frage beschäftigt werden, wie man den Begriff des Jordan-Inhalts anschaulicher charakterisieren kann. Dazu wird sich ein Rückblick auf den Zugang zum mehrdimensionalen Riemann-Integral über Unter- und Obersummen als nützlich erweisen. Wir betrachten also eine Jordan-messbare Menge $J \subset \mathbb{R}^2$ (wie bspw. in Abbildung 2) und einen Quader (Rechteck!) $Q$ mit $J \subset Q$. Diesen Quader können wir zerlegen und für diese Zerlegung die Ober- und Untersumme bezüglich $\mathbb{1}_J$ betrachten. Wir erinnern uns an Definition 2:

[1] An dieser Stelle muss man natürlich Acht auf die Einheiten geben.

**Definition 2 (Ober- und Untersumme)**
Sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung mit Indexmenge $\mathcal{I}$ von $Q$. Wir definieren die *Obersumme* $S(f,\mathcal{Z})$ und die *Untersumme* $s(f,\mathcal{Z})$ durch

$$S(f,\mathcal{Z}) := \sum_{i\in\mathcal{I}} \sup_{x\in Q_i} f(x)\cdot \mathrm{vol}_n\,(Q_i) \quad \text{und} \quad s(f,\mathcal{Z}) := \sum_{i\in\mathcal{I}} \inf_{x\in Q_i} f(x)\cdot \mathrm{vol}_n\,(Q_i)\,.$$

Da für $x \in Q$ auf jeden Fall $\mathbb{1}_J(x) \in \{0,1\}$ ist, können die „Säulen" der Ober- und Untersummen nur die Höhen 1 oder 0 haben. Es ergibt sich eine Situation wie in Abbildung 3 dargestellt ist.

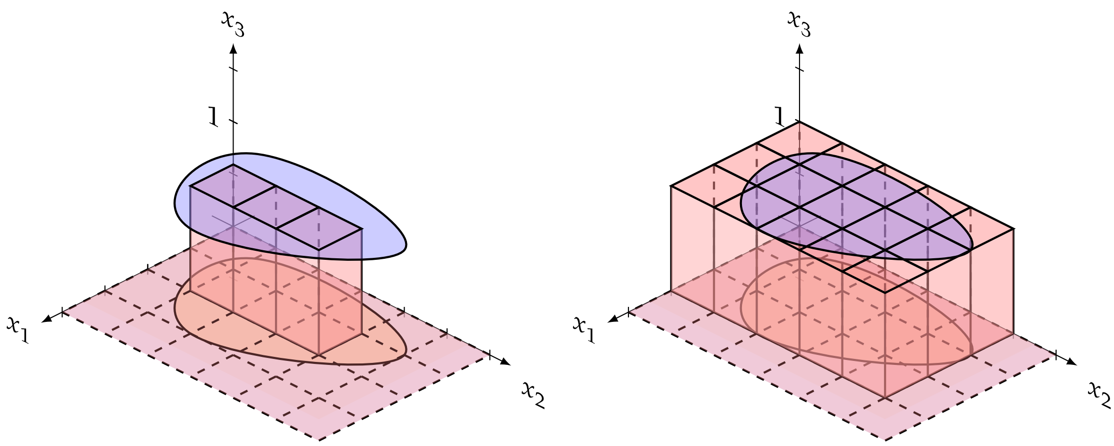



Abbildung 3: Unter- und Obersumme bezüglich $\mathbb{1}_J$ zu einer bestimmten Zerlegung

Es wird deutlich, dass es solche „Säulen" gibt, deren Grundfläche komplett in $J$ ist – diese haben bei Ober- und Untersumme die Höhe 1 – und solche deren Grundfläche zumindest teilweise in $J$ liegt – diese haben lediglich bei der Obersumme die Höhe 1. Nun gilt es, diese Mengen mathematisch zu fassen. Dies bietet sich wieder als kurze *Studierendenarbeitsphase* an. Als Grundlage kann Aufgabe 3 dienen.

***Aufgabe 3 (Defnition von Außen- und Innenapproximation)***
Sei $J \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar und $Q \supset J$ ein Quader. Ferner sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von $Q$. Geben Sie eine formale Definition für die *Außenapproximation (Innenapproximation)* $A(J,\mathcal{Z})$ $(I(J,\mathcal{Z}))$ an. Damit ist die Menge aller Teilquader der Zerlegunge $\mathcal{Z}$ gemeint, deren Volumen in der Obersumme $S(\mathbb{1}_J,\mathcal{Z})$ (Untersumme $s(\mathbb{1}_J,\mathcal{Z})$) mit dem Faktor 1 eingeht.

*Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 3*

$$A(J,\mathcal{Z}) = \left\{ \tilde{Q} \in \mathcal{Z} \;\middle|\; \sup_{x\in\tilde{Q}} \mathbb{1}_J(x) = 1 \right\}.$$

$$I(J,\mathcal{Z}) = \left\{ \tilde{Q} \in \mathcal{Z} \;\middle|\; \inf_{x\in\tilde{Q}} \mathbb{1}_J(x) = 1 \right\}.$$

Durch die Betrachtung von Innen- und Außenapproximationen lösen wir uns wieder von der Volumenvorstellung und erhalten durch die Teilmengen der Zerlegung zwei Arten von Approximationen für den Jordan-Inhalt von $J$: Eine *Überdeckung* von außen und ein *Ausfüllen* von innen. Exakt bedeutet dies

$$\bigcup_{\tilde{Q}\in I(J,\mathcal{Z})} \tilde{Q} \subset J \subset \bigcup_{\tilde{Q}\in A(J,\mathcal{Z})} \tilde{Q}.$$

Je weiter wir die Zerlegung verfeinern, desto besser wird die Approximation. Dies ist in Abbildung 4 dargestellt.

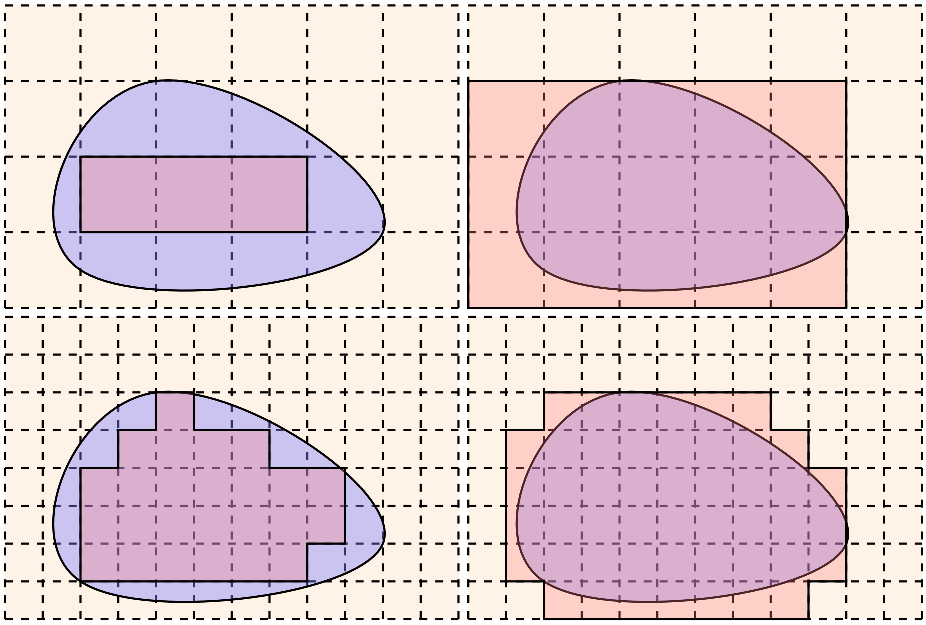


Abbildung 4: Innen- und Außenmengen bezüglich zweier Zerlegungen

Addiert man die Inhalte der Quader der Außen- bzw. Innenapproximation, so erhält man auf natürliche Art und Weise den *Außen- bzw. Inneninhalt* der Jordan-messbaren Menge $J$ durch

$$\begin{aligned} \text{A-vol}_2\left(J,\mathcal{Z}\right) &= \sum_{i:Q_i\subset A(J,\mathcal{Z})} \text{vol}_2\left(Q_i\right), \\ \text{I-vol}_2\left(J,\mathcal{Z}\right) &= \sum_{i:Q_i\subset I(J,\mathcal{Z})} \text{vol}_2\left(Q_i\right). \end{aligned}$$

Abschließend kann man zeigen (Aufgabe 4), dass der Jordan-Inhalt von $J$ tatsächlich nach oben und unten durch Außen- und Inneninhalt abgeschätzt werden kann und diese für $\|\mathcal{Z}\| \to 0$ gegen den Jordan-Inhalt konvergieren. Diese Aufgabe eignet sich als Präsenz- oder Hausaufgabe, sie ist mathematisch zwar nicht anspruchsvoll, erfordert aber das Zusammenfügen verschiedener bereits bewiesener Aussagen und somit einen Überblick über die Integraleinführung.

Die durch die obigen Überlegungen entstandende Charaktierisierung des Jordan-Inhalts führt auf ein sehr natürliches Verfahren der Flächeninhaltsapproximation, das auch in der Schule verwendet wird. Mit diesem Bezug beschäftigt sich Aufgabe 6. Das tatsächliche Ausrechnen des Jordan-Inhalts einer einfachen geometrischen Figur ist Bestandteil von Aufgabe 5. Beide Aufgaben eignen sich gut als Hausaufgaben und erfordern ein solides Verständnis des vorgestellten Stoffes.

***Aufgabe 4 (Approximation des Jordan-Inhalts)***
Sei $J \subset \mathbb{R}^2$ Jordan-messbar und sei $Q \supset J$.

a) Zeigen Sie, dass für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $Q$ gilt

$$\text{I-vol}_2\left(J,\mathcal{Z}\right) \leq \text{J-vol}_2\left(J\right) \leq \text{A-vol}_2\left(J,\mathcal{Z}\right).$$

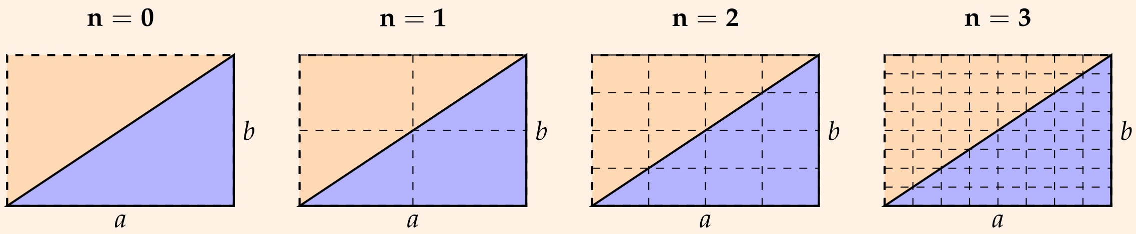
b) Zeigen Sie, dass für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge $\{\mathcal{Z}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\lim_{j\to\infty} \text{I-vol}_2\left(J, \mathcal{Z}\right) = \lim_{j\to\infty} \text{A-vol}_2\left(J, \mathcal{Z}\right) = \text{J-vol}_2\left(J\right).$$

*Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 4* Man zeigt, dass Außen- und Inneninhalt den Werten der entsprechenden Ober- und Untersummen entsprechen. Damit folgen beide Aussagen aus bereits bewiesenen Sätzen.

***Aufgabe 5 (Der Jordan-Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks)***

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das Jordan-Volumen eines Quaders dem elementargeometrischen Volumen entspricht. Zeigen Sie, dass dies auch für rechtwinklige Dreiecke gilt. Sei dazu ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen $a$ und $b$ gegeben. Die Menge aller Punkte im Dreieck und auf dem Rand des Dreiecks bezeichnen wir mir $D$. Wählen Sie eine Folge von Zerlegungen entsprechend der nachfolgenden Skizzen und zeigen Sie, dass der Jordan-Inhalt tatsächlich $\frac{1}{2}ab$ ist.




*Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 5* Der Flächeninhalt der Zerlegungsquader in Schritt $n$ ist $\frac{1}{4}^n ab$. Dann stellt man eine Reihe auf, die man mit Hilfe der geometrischen Reihe ausrechnen kann. Der Grenzwert ist $\frac{1}{2}ab$.

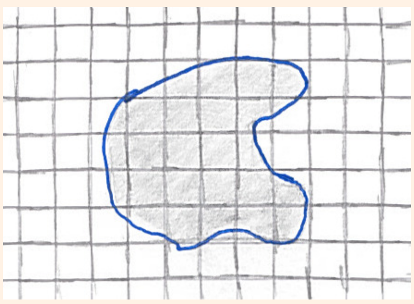
***Aufgabe 6 (Die Gittermethode zur Flächeninhaltsbestimmung)***

In verschiedenen aktuellen Schulbüchern der Jahrgangsstufe 5 (Lambacher Schweizer 5, (Hußmann et al., 2007, S. 116), Mathematik Neue Wege 5, (Lergenmüller & Schmidt, 2005, S. 190)) findet man die *Gittermethode* zum Schätzen von Flächeninhalten

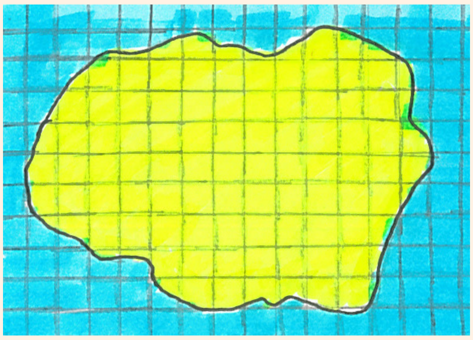
Die folgenden Aufgaben wurden wörtlich aus Schulbüchern übernommen. Graphische Darstellungen wurden abgezeichnet.

Stelle dir zwei Quadratgitter auf Folie oder durchscheinendem Papier her. Seitenlänge der Karos: 1cm bzw. 0,5 cm.

Durch Auslegen mit Plättchen kann man auch krummlinig begrenzte Flächen vergleichen. Benutzt man ein Quadratgitter und legt es über die Fläche, so lässt sich deren Größe abschätzen.
Die nebenstehende Figur ist etwa so groß wie 22 Karos.



*Schätzmethode 2:* „**Gittermethode**“
Wir legen eine Gitterfolie mit kleinen Quadraten über die Insel. (Es gibt solche Klarsichtfolien mit Milimeterpapier.) In unserem Fall ist die Seite eines Quadrates gerade $0,4\,cm$, dies entspricht $1\,km$ in der Wirklichkeit. Ein Quadrat hat somit die Fläche von $1\,km^2$. Wir zählen etwa 82 Quadrate, die die Insel überdecken. Damit schätzen wir eine Fläche von $82\,km^2$.



a) Analysieren Sie die Gittermethode fachmathematisch, indem Sie das Verfahren auf den Jordan-Inhalt zurückführen. Gehen Sie dabei insbesondere auf den Hinweis links im oberen Bild ein.

b) Analysieren Sie, welche Aspekte und Kontexte des *Messens* bei der Lösung dieser Aufgabe vorkommen.

*Hinweis:* Nutzen Sie ggf. Weigand et al. (2014, S. 158 ff.)

*Anmerkungen zur Lösung von Aufgabe 6* Zu a): In den Schulbüchern wird nicht deutlich, wie die Kästchen gezählt werden, die die Fläche nur zum Teil beinhalten. Dennoch geben Außeninhalt und Inneninhalt eine obere und untere Schranke für diese Abschätzung an. Der Hinweise lässt sich fachmathematisch mit dem Konzept der Verfeinerung verbinden.

In b) ist wieder das Anwenden einer mathematikdidaktischen Konzeption auf ein gegebenes Beispiel erforderlich.

**Zusammenfassendes**

In dem vorgestellten Teil eines Schnittstellenmoduls wurde der Jordaninhalt im zweidimensionalen Fall mit der üblichen Flächeninhaltsvorstellung verbunden. Die bei der Definition des Jordaninhalts auftretenden Grenzprozesse wurden mit Approximationsverfahren aus der Schulmathematik verknüpft. Dabei wurde immer wieder Rückbezug auf verschiedene Inhalte der Einführung der mehrdimensionalen Riemann-Integration genommen. Desweiteren wurde an verschiedenen Stellen der Prozess des Messens aus mathematikdidaktischer Sicht betrachtet. Somit wird deutlich, dass die vorgestellte Lehr-/Lerneinheit in der Tat das Potenzial hat, mathematikbezogene Schnittstellenkompetenz zu fördern.

# Literaturverzeichnis


Hußmann, S., Jürgensen, T., Leuders, T., Richter, K., Riemer, W. & Schermuly, H. (2007). *Lambacher Schweizer 5. Mathematik für Gymnasien. Nordrhein-Westfalen.* Ernst Klett Verlag.

Lergenmüller, A. & Schmidt, G. (Hrsg.). (2005). *Neue Wege. Arbeitsbuch für Gymnasien. 5. Schuljahr.* Bildungshaus Schulbuchverlage.

Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., … Wittmann, G. (2014). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I.* Springer Spektrum.