Skript zu mehrdimensionaler Riemann-Integration

Max Hoffmann

Stand: 9. Mai 2017

Anmerkung Das hier vorliegende Skript wurde aus den Ausführungen von A'Campo-Neuen (2011); Duistermaat und Kolk (2004); Roch (2013); Sauvigny (2014) zusammengestellt und durch den Autor erweitert. Es handelt sich um eine Zusammenstellung fachmathematischer Inhalte zur mehrdimensionalen Riemann-Integration, die als Grundlage für die Entwicklung fachmathematischer Schnittstellenmodule in diesem Kontext dienen. Teile der fachlichen Inhalte wurden fast wörtlich aus den oben stehenden Arbeiten übernommen. Alle Abbildungen wurdem vom Autor (teilweise unter Verwendung von *Geogebra*) erstellt.

Anmerkungen und Hinweise auf Fehler können gerne an max.hoffmann@math.upb.de gesendet werden.

Notation 0.1

- Im Allgemeinen ist $n \in \mathbb{N}$ beliebig.
- Ist $a \in \mathbb{R}^n$, so beschreiben $a_1, \ldots, a_n$ die Komponenten von a. Es gilt also $a = (a_1, \ldots, a_n)$.
- Sind $a, b \in \mathbb{R}^n$, so schreiben wir $a < (\leq) b$, falls $a_k < (\leq) b_k$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt.

1 Mehrdimensionale Quader

Im Rahmen der eindimensionalen Riemann-Integration von Funktionen $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wurde die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen von f und der ersten Koordinatenachse mit Rechtecken ausgefüllt, deren eine Kante ein abgeschlossenes Intervall in $[a, b]$ war. Um das Konzept der Riemann-Integration auf Funktionen der Form $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mehrdimensional erweitern zu können, bedarf es einer mehrdimensionalen Erweiterung des Intervallkonzepts. Dazu definieren wir

Definition 1.1 (Mehrdimensionale Quader)
Seien $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$. Dann definieren wir durch

$$Q := [a, b] := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a \leq x \leq b\} .$$

einen *Quader* Q der Dimension n. Außerdem definieren wir für $k = 1, \ldots, n$

$$I_k(Q) := [a_k, b_k] = \{x_k \in \mathbb{R} \mid a_k \leq x_k \leq b_k\} .$$

Ist klar, welcher Quader gemeint ist, so schreiben wir einfach I_k.

Solchen Quadern kann man nun auf natürliche geometrische Art und Weise einen Inhalt und einen Durchmesser zuweisen.

Definition 1.2 (Kenngrößen mehrdimensionaler Quader)
Sei $Q = [a, b] \subset \mathbb{R}^n$ ein n-dimensionaler Quader. Wir definieren den *(elementargeometrischen) Inhalt* von Q durch

$$\operatorname{vol}_n (Q) := \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k) = \prod_{k=1}^{n} \operatorname{vol}_1 (I_k) .$$

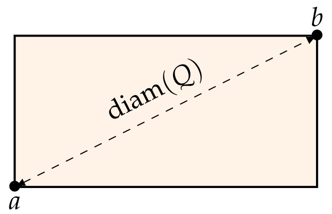
Weiter definieren wir den *Durchmesser* von Q durch

$$\operatorname{diam}(Q) := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \operatorname{vol}_1 (I_k)^2}.$$

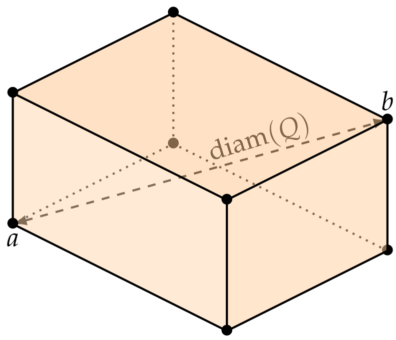
Beispiel 1.3
Für die Dimensionen 1, 2 und 3 kann man sich Quader anschaulich vorstellen:

(i) Für die Dimension 1, ist der Quader $[a, b]$ genau das Intervall $[a, b]$. Somit sind die Notationen konsistent.

(ii) Für die Dimension 2 ist der Quader $[a, b]$ genau ein ausgefülltes Rechteck, bei dem a und b diagonal gegenüberliegende Eckpunkte sind.



(iii) Für die Dimension 3 Ist der Quader $[a, b]$ genau ein ausgefüllter Quader im geometrischen Sinne, bei dem a und b gegenüberliegende Eckpunkte sind.



Hat ein Quader in einer Dimension „keine Ausdehnung", so hat er den Inhalt null. Beispielsweise haben eine Strecke im $\mathbb{R}^2$ oder ein Rechteck im $\mathbb{R}^3$ den Flächeninhalt bzw. das Volumen null. Diese Aussage ist Bestandteil der folgenden Bemerkung.

Bemerkung 1.4 (i) Ist $Q = [a, b] \subset \mathbb{R}^n$ ein n-dimensionaler Quader und es gibt $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $a_k = b_k$, dann ist $\mathrm{vol}_n(Q) = 0$.

(ii) Ist Q ein nichttrivialer n-dimensionaler Quader, so ist $\mathrm{vol}_n(Q) > 0$.

Analog zur eindimensionalen Riemann-Integration wollen wir auch für mehrdimensionale Definitionsbereiche einen Quader in kleinere Quader unterteilen können.

Definition 1.5 (Zerlegung eines Quaders)
Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein nichttrivialer Quader. Eine *Zerlegung* $\mathcal{Z}$ von Q mit endlicher Indexmenge $\mathcal{I}$ ist definiert als eine Menge

$$\mathcal{Z} = \{Q_i \mid i \in \mathcal{I}\}.$$

von nichttrivialen Teilquadern $Q_i \subset Q$ ($i \in \mathcal{I}$), sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(1) $Q = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} Q_i$,

(2) Für $i, j \in \mathcal{I}$ paarweise verschieden gilt $\mathring{Q}_i \cap \mathring{Q}_j = \emptyset$.

Außerdem definieren wir die *Feinheit* von $\mathcal{Z}$ durch

$$\|\mathcal{Z}\| := \max\{\mathrm{diam}(Q_i) \mid i \in \mathcal{I}\}.$$

Der folgende Satz liefert uns die Existenz von Zerlegungen im Sinne der obigen Definition.

Satz 1.6 (Existenz von Zerlegungen)
Sei $Q = [a, b] = I_1 \times \ldots \times I_n$ ein nichttrivialer Quader im $\mathbb{R}^n$. Die Intervalle I_k seien jeweils in p_k Teilintervalle $I_k^{i_k} := \left[x_k^{(i_k - 1)}, x_k^{(i_k)}\right]$ mit $1 \le i_k \le p_k$ und $p := (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ aufgeteilt, wobei die Anordnung

$$a_k =: x_k^{(0)} < x_k^{(1)} < \ldots < x_k^{(p_k - 1)} < x_k^{(p_k)} := b_k$$

für $k = 1, \dots, n$ gilt.

Ferner sei

$$\mathcal{N} := \{i \in \mathbb{N}^n \mid 1 \leq i_k \leq p_k \ \textit{für} \ \ 1 \leq k \leq n\} \subset \mathbb{N}^n.$$

Für $i \in \mathcal{N}$ definieren wir dann den Teilquader

$$Q_i := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_k^{(i_k-1)} \leq x_k \leq x_k^{(i_k)},\ 1 \leq k \leq n \right\}.$$

Dann gelten die folgenden zwei Aussagen

(i) $\mathcal{Z} := \{Q_i \mid i \in \mathcal{N}\}$ *ist eine Zerlegung von Q.*

(ii) Es gilt $\mathrm{vol}_n(Q) = \sum\limits_{i \in \mathcal{N}} \mathrm{vol}_n Q_i$.

Beispiel 1.7 (zur Situation von Satz 1.6)
In Abbildung 1 ist ein Beispiel für die in Satz 1 beschriebene Situation aufgezeichnet. Dabei ist $p = (3, 2)$ und $\mathcal{N} = \{(1,1), (2,1), (3,1), (1,2), (2,2), (3,2)\}$.

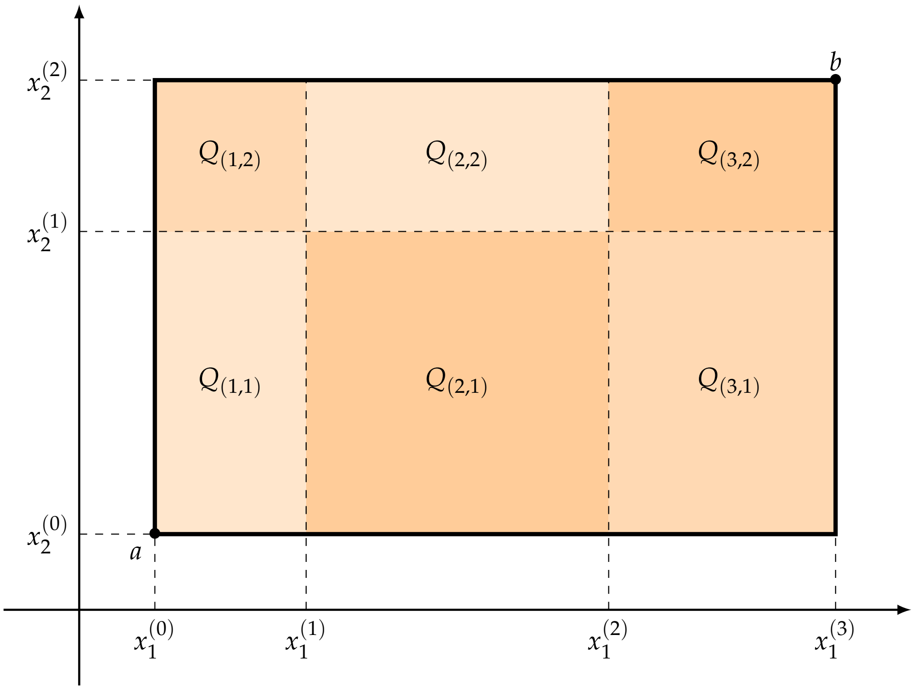


Abbildung 1: Skizze für die Situation in Satz 1.6

Beweis. **(von Satz 1.6)**

(i) Wir beweisen (1) und (2) aus Definition 1.5. Seien $x \in Q$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$. Wegen $x \in Q$ gilt $x_k \in I_k$. Nach Konstruktion gibt es dann $i^{(k)} \in \mathcal{N}$ mit $x_k \in I_k^{\left(i_k^{(k)}\right)}$. Nach Definition von $\mathcal{N}$ ist $\tilde{i} := \left(i_1^{(1)}, i_2^{(2)}, \ldots, i_n^{(n)}\right) \in \mathcal{N}$, also $x \in Q_{\tilde{i}} \in \mathcal{Z}$. Außerdem gilt für $Q_i \in \mathcal{Z}$ und $x \in Q_i$ beliebig nach Definition sofort $a \leq x \leq b$, also $x \in Q$. Somit ist (1) bewiesen.
Seien nun $i, j \in \mathcal{N}$ paarweise verschieden. Somit gibt es $1 \leq k \leq n$ mit $i_k \neq j_k$. Das bedeutet nach Konstruktion sofort

$$\overset{\circ}{I}{}_k^{(i_k)} \cap \overset{\circ}{I}{}_k^{(j_k)} = \emptyset.$$

Für einen inneren Punkt $x \in \overset{\circ}{Q}_i$ von Q_i gilt $x_k \in \overset{\circ}{I}{}_k^{(i_k)}$. Somit kann x_k kein innerer Punkt von $I_k^{(j_k)}$ sein und es folgt $x \notin \overset{\circ}{Q}_j$, was (2) beweist.
$\mathcal{Z}$ ist somit zusammen mit der Indexmenge $\mathcal{N}$ eine Zerlegung.

(ii) Für den Beweis der Aussage rechnen wir wie folgt:

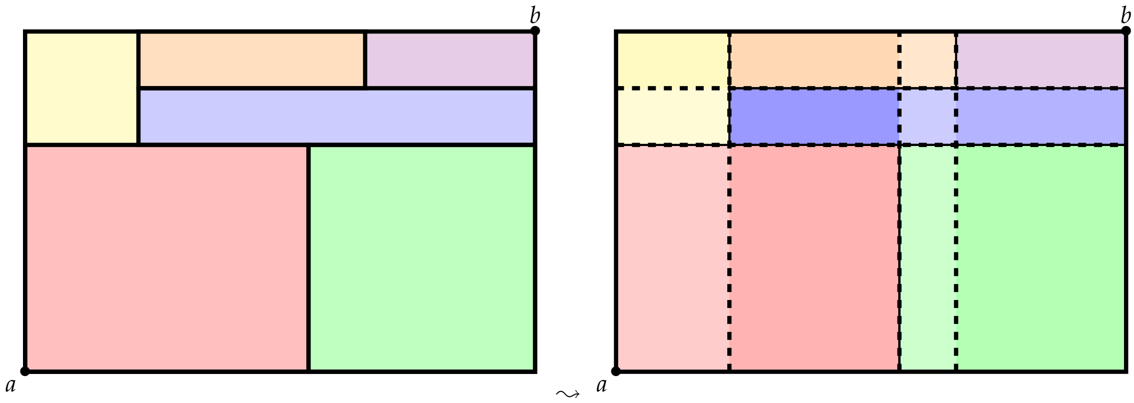
$$\mathrm{vol}_n(Q) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{vol}_1(I_k) = \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{1 \le i_k \le p_k} \mathrm{vol}_1\left(I_k^{(i_k)}\right) \right) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \left(\prod_{k=1}^{n} \mathrm{vol}_1\left(I_k^{(i_k)}\right) \right) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \mathrm{vol}_n(Q_i).$$

□

Satz 1.8
Sei $Q \in \mathbb{R}^n$ ein nichttrivialer Quader, $\mathcal{I}$ eine Indexmenge und $\mathcal{Z} = \{Q_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ eine Zerlegung von Q. Dann gilt

$$\mathrm{vol}_n(Q) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \mathrm{vol}_n Q_i.$$

Beweis. *Idee:* Konstruiere aus $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}'$, die von der Form wie in Satz 1.6 ist.



Für jedes $1 \le k \le n$ betrachten wir für alle Quader aus $\mathcal{Z}$ die k-te Koordinate der Endpunkte. Diese bilden die $x_k^{(i)}$, wie in Satz 1.6. So erhält man eine Zerlegung $\mathcal{Z}'$ mit Indexmenge $\mathcal{N}$ wie in Satz 1.6, sodass es für jedes $Q_j' \in \mathcal{Z}'$ genau ein $Q_i \in \mathcal{Z}$ gibt mit $Q_j' \subset Q_i$. Dann ist $\left\{Q_j' \in \mathcal{Z}' \;\middle|\; Q_j' \subset Q_i\right\}$ eine Zerlegung eines $Q_i \in \mathcal{Z}$, die wie in 1.6 aufgebaut ist. Somit folgt nach Satz 1.6 (ii):

$$\mathrm{vol}_n(Q_i) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \mathrm{vol}_n\left(Q_j'\right).$$

Somit ist dann

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \mathrm{vol}_n(Q_i) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{\left\{j \in \mathcal{N} \;\middle|\; Q_j' \subset Q_i\right\}} \mathrm{vol}_n\left(Q_j'\right) = \sum_{j \in \mathcal{N}} \mathrm{vol}_n\left(Q_j'\right) = \mathrm{vol}_n(Q).$$

□

Definition 1.9 (Verfeinerung)
Sei Q ein nichttrivialer Quader im $\mathbb{R}^n$ und seien $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ Zerlegungen von Q. Wir nennen $\mathcal{Z}_2$ eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}_1$, wenn es für jedes $Q_i \in \mathcal{Z}_1$ eine Menge von $Q_j \in \mathcal{Z}_2$ gibt, die eine Zerlegung von Q_i bildet.

Beispiel 1.10
In Satz 1.8 ist die im Beweis konstruierte Zerlegung $\mathcal{Z}'$ eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}$.

Corollar 1.11
Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein (nichttrivialer) Quader und seien $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ Zerlegungen von Q. Dann besitzen $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ eine gemeinsame Verfeinerung.

Beweis. Diese Aussage zeigt man schnell unter Verwendung der Strategie aus dem Beweis von 1.8. □

Bemerkung 1.12
Die Definitionen und Theoreme in diesem Abschnitt lassen sich alle für den Fall trivialer Quader auf natürliche Art und Weise verallgemeinern.

Bemerkung 1.13
Im Folgenden meinen wir aus technischen Gründen mit Zerlegungen immer Zerlegungen, die wie in Satz 1.6 aufgebaut sind. Man beachte, dass man – wie im obigen Beweis gezeigt – jede andere Zerlegung in diese Form bringen und verfeinern kann.

Die bis hierhin vorgestellte Theorie über mehrdimensionale Quader liefert nun die Grundlage für die Erweiterung des Riemann-Integrals ins Mehrdimensionale.

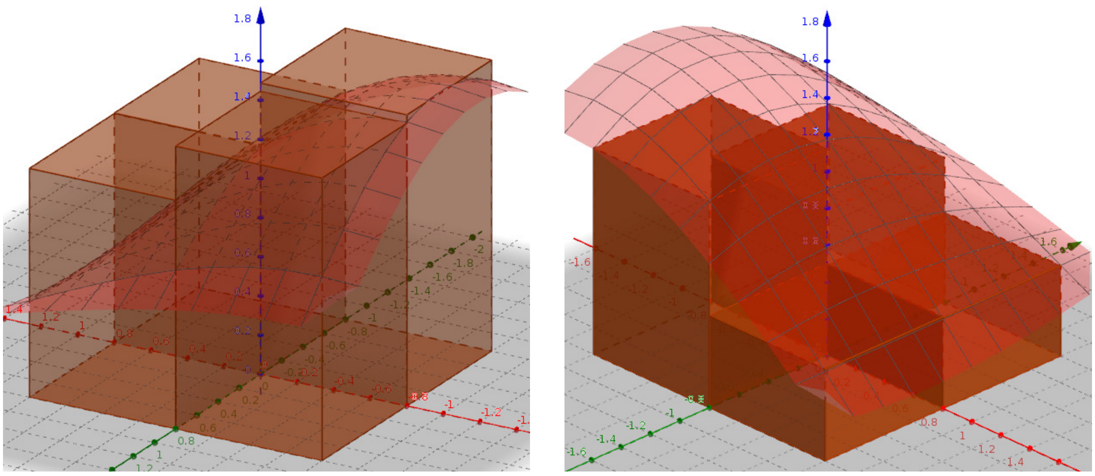
2 Ober- und Untersummen

In den folgenden Abschnitten sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein nichttrivialer Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt. Analog zum eindimensionalen Fall definieren wir zunächst Ober- und Untersummen.

Definition 2.1 (Ober- und Untersumme)
Sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung mit Indexmenge $\mathcal{I}$ von Q. Wir definieren die *Obersumme* $S(f, \mathcal{Z})$ und die *Untersumme* $s(f, \mathcal{Z})$ durch

$$s(f,\mathcal{Z}) := \sum_{i\in\mathcal{I}} \inf_{x\in Q_i} f(x)\cdot \operatorname{vol}_n(Q_i) \quad \text{und} \quad S(f,\mathcal{Z}) := \sum_{i\in\mathcal{I}} \sup_{x\in Q_i} f(x)\cdot \operatorname{vol}_n(Q_i)\,.$$

Beispiel 2.2
Beispiele für Ober- (links) und Untersummen (rechts).



Lemma 2.3 *(i) Sei $\mathcal{Z}'$ eine Verfeinerung von $\mathcal{Z}$ mit Indexmenge $\mathcal{J}$. Dann gilt*

$$s(f,\mathcal{Z}) \le s(f,\mathcal{Z}') \le S(f,\mathcal{Z}') \le S(f,\mathcal{Z}).$$

(ii) Für zwei beliebige Zerlegungen $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ von Q gilt

$$s(f,\mathcal{Z}_1) \le S(f,\mathcal{Z}_2).$$

Beweis.

(i) Seien $Q'_j \in \mathcal{Z}'$ und $Q_i \in \mathcal{Z}$ mit $Q'_j \subset Q_i$. Dann gilt

$$\inf_{x\in Q_i} f(x) \leq \inf_{x\in Q'_j} f(x).$$

Mit Satz 1.8 erhalten wir dann

$$\begin{aligned} s(f,\mathcal{Z}) &= \sum_{i\in\mathcal{I}} \inf_{x\in Q_i} f(x)\cdot \mathrm{vol}_n\,(Q_i) = \sum_{i\in\mathcal{I}} \inf_{x\in Q_i} f(x) \sum_{\left\{j\in\mathcal{J}\;\middle|\; Q'_j\subset Q_i\right\}} \mathrm{vol}_n\left(Q'_j\right) \\ &\leq \sum_{i\in\mathcal{I}} \sum_{\left\{j\in\mathcal{J}\;\middle|\; Q'_j\subset Q_i\right\}} \inf_{x\in Q'_j} f(x)\cdot \mathrm{vol}_n\left(Q'_j\right) = \sum_{i\in\mathcal{J}} \inf_{x\in Q'_j} f(x)\cdot \mathrm{vol}_n\left(Q'_j\right) \\ &= s(f,\mathcal{Z}') \end{aligned}$$

Damit ist die erste Ungleichung gezeigt. Die dritte zeigt man analog und die zweite folgt direkt aus der Definition von Supremum und Infimum.

(ii) Die Aussage folgt, wenn man (i) und Corollar 1.11 zusammen verwendet.

□

Definition 2.4
Die Funktion f heißt über den Quader Q *Riemann-integrierbar* genau dann, wenn

$$\underline{\int_Q} f(x)\;dx = \overline{\int_Q} f(x)\;dx =: \int_Q f(x)dx$$

gilt. Dabei meint

$$\underline{\int_Q} f(x)\;dx := \sup_{\mathcal{Z}} s(f,\mathcal{Z})$$

das *untere Integral von f über Q* und

$$\overline{\int_Q} f(x)\;dx := \inf_{\mathcal{Z}} S(f,\mathcal{Z})$$

das *obere Integral von f über Q*.

Corollar 2.5
Für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von Q gilt

$$s(f,\mathcal{Z}) \leq \underline{\int_Q} f(x)\;dx \leq \overline{\int_Q} f(x) \leq S(f,\mathcal{Z}).$$

Beweis. Die Aussage folgt aus Lemma 2.3. □

Im Sinne der Anschauung, dass die Unter- und die Obersummen für eine geeignete Folge von Zerlegungen gegen einen gemeinsamen Grenzwert konvergieren, beweisen wir nun den folgenden Satz.

Satz 2.6
Die Funktion f ist auf dem Quader Q genau dann Riemann-integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine

Zerlegung $\mathcal{Z}_\varepsilon$ von Q derart gibt, dass

$$S(f, \mathcal{Z}_\varepsilon) - s(f, \mathcal{Z}_\varepsilon) < \varepsilon$$

gilt.

Beweis. „⇒“ Sei f Riemann-integrierbar über Q. Für $\varepsilon > 0$ gibt es dann Zerlegungen $\mathcal{Z}_1$, $\mathcal{Z}_2$ von Q, sodass

$$S(f, \mathcal{Z}_1) < \int_Q f(x)\, dx + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad s(f, \mathcal{Z}_2) > \int_Q f(x)\, dx - \frac{\varepsilon}{2}$$

gelten. Sei nun $\mathcal{Z}_\varepsilon$ die gemeinsame Verfeinerung (siehe Corollar 1.11) von $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$. Dann folgt sofort

$$S(f, \mathcal{Z}) - s(f, \mathcal{Z}) \leq S(f, \mathcal{Z}_1) - s(f, \mathcal{Z}_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

„⇐“ In diesem Fall folgt mit Corollar 2.5 für jedes $\varepsilon > 0$ schon

$$\overline{\int_Q} f(x)\, dx - \underline{\int_Q} f(x)\, dx < \varepsilon,$$

was die gewünschte Aussage beweist. □

Anschaulich einleuchtend ist die Tatsache, dass man sich dem Wert des Integrals annähert, wenn man die Zerlegungen feiner macht. Dieses wollen wir formal ausdrücken.

Definition 2.7 (Ausgezeichnete Folgen von Zerlegungen)
Eine Folge $\{\mathcal{Z}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ von Zerlegungen von Q heißt *ausgezeichnet*, wenn gilt

$$\lim_{j\to\infty} \|\mathcal{Z}_j\| = 0.$$

Satz 2.8
Sei $\{\mathcal{Z}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Folge von Zerlegungen. Dann gelten

$$\underline{\int_Q} f(x)\, dx = \lim_{j\to\infty} s(f, \mathcal{Z}_j) \quad \textit{und} \quad \overline{\int_Q} f(x)\, dx = \lim_{j\to\infty} S(f, \mathcal{Z}_j).$$

Um diesen Satz zu beweisen, müssen wir berücksichtigen, dass eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge nicht zwingend bedeutet, dass eine Zerlegung immer weiter verfeinert wird. Das folgende Lemma liefert uns eine nützliche Aussage, um Zerlegungen zu vergleichen, die nicht „feiner als“ geordnet sind.

Lemma 2.9
Seien $m := \inf\{f(x) \mid x \in Q\}$ und $M := \sup\{f(x) \mid x \in Q\}$.

Es gibt eine nur von der Zerlegung $\mathcal{Z}$ von Q abhängige Zahl $\Theta = \Theta(\mathcal{Z}) \in (0, +\infty)$, so dass für jede Zerlegung $\mathcal{Z}^*$ von Q die Ungleichung

$$S(f, \mathcal{Z}^*) \leq S(f, \mathcal{Z}) + \Theta(Z) \cdot (M - m) \cdot \|\mathcal{Z}^*\|$$

gilt mit der Feinheit $\|\mathcal{Z}^*\| = \max\{\operatorname{diam}(Q_k^*) : k \in \mathcal{I}^*\}$ und der Indexmenge

$$\mathcal{I}^* := \{k \in \mathbb{N}^n \mid 1 \leq k_\nu \leq q_\nu \text{ für } 1 \leq \nu \leq n\}$$

mit dem Multiindex $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{N}^n$.

Beweis.

1. Wir können durch den Übergang von f zur Funktion $g(x) := f(x) - m,\ x \in Q$ ohne Einschränkungen $m = 0$ annehmen. Sei nun $\mathcal{Z}^*$ eine beliebige weitere Zerlegung von Q mit den Zerlegungsquadern $Q_k^* = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_\nu^{*(k_\nu - 1)} \leq x_\nu \leq x_\nu^{*(k_\nu)}, 1 \leq \nu \leq n \right\}, k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathcal{I}^*$. Somit sind insbesondere die Identitäten

$$Q = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} Q_i = \bigcup_{k \in \mathcal{I}^*} Q_k^*, \quad Q_i = I_1^{(i_1)} \times \ldots \times I_n^{(i_n)} \quad \text{bzw.} \quad Q_k^* = I_1^{*(k_1)} \times \ldots \times I_n^{*(k_n)}$$

erfüllt.

2. Dann können genau zwei Fälle bzgl. der Teilquader Q_k^* eintreten:

Fall (a): $Q_k^* \in \mathcal{A}$ gilt, falls es einen Quader Q_i der Zerlegung $\mathcal{Z}$ mit $Q_k^* \subset Q_i$ gibt, d.h. $I_\nu^{*(k_\nu)} \subset I_\nu^{(i_\nu)}$ ist für $\nu = 1, \ldots, n$ erfüllt.

Fall (b): $Q_k^* \in \mathcal{B}$ gilt, falls eine Komponente $\nu \in \{1, \ldots, n\}$ und ein zugehöriges $k_\nu \in \{1, \ldots, q_\nu\}$ derart existieren, dass das Intervall $I_k^{*(k_n)}$ einen der Punkte $x_\nu^{(1)}, \ldots, x_\nu^{(p_\nu - 1)}$ der Teilung des Intervalls $I_\nu = [a_\nu, b_\nu]$ von $\mathcal{Z}$ im Inneren enthält.

Es sei K_ν die Menge aller natürlichen Zahlen k_ν mit $1 \leq k_\nu \leq q_\nu$ und obiger Eigenschaft. Dann besitzt die Menge K_ν höchstens $p_\nu - 1$ Elemente. Für die Klasse $\mathcal{B}$ folgt die Inklusion

$$\bigcup_{Q_k^* \in \mathcal{B}} Q_k^* \subset \bigcup_{\nu=1}^{n} \left\{ \bigcup_{k_\nu \in K_\nu, \mu \neq \nu : 1 \leq k_\mu \leq q_\mu} \left[I_1^{*(k_1)} \times \ldots \times I_\nu^{*(k_\nu)} \times \ldots \times I_n^{*(k_n)} \right] \right\}.$$

Mit diesen Vorüberlegungen schätzen wir die Klasse $\mathcal{B}$ wie folgt ab:

$$\begin{aligned} \sum_{Q_k^* \in \mathcal{B}} |Q_k^*| &\leq \sum_{\nu=1}^{n} \left[\sum_{k_\nu \in K_\nu, \mu \neq \nu : 1 \leq k_\mu \leq q_\mu} |I_1^{*(k_1)}| \cdot \ldots \cdot |I_\nu^{*(k_\nu)}| \cdot \ldots \cdot |I_n^{*(k_n)}| \right] \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \left[(b_1 - a_1) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{k_\nu \in K_\nu} |I_\nu^{*(k_\nu)}| \right) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n) \right] \\ &\leq \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|Q|}{|b_\nu - a_\nu|} \cdot (p_\nu - 1) \cdot \|\mathcal{Z}^*\| =: \Theta(\mathcal{Z}) \cdot \|\mathcal{Z}^*\|. \end{aligned}$$

3. Unter Beachtung der Abschätzungen

$$M_k^* := \sup \{ f(x) : x \in Q_k^* \} \leq \sup \{ f(x) : x \in Q_i \} := M_i \text{ für } Q_k^* \subset Q_i \text{ und}$$

$$M_k^* = \sup \{ f(x) : x \in Q_k^* \} \leq M \text{ für alle } k \in \mathcal{N}^*$$

können wir die gewünschte Ungleichung für $m = 0$ wie folgt herleiten:

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{Z}^*) &= \sum_{k \in \mathcal{I}^*} M_k^* \cdot |Q_k^*| = \sum_{Q_k^* \in \mathcal{A}} M_k^* \cdot |Q_k^*| + \sum_{Q_k^* \in \mathcal{B}} M_k^* \cdot |Q_k^*| \\ &\leq \sum_{i \in \mathcal{I}} M_i \cdot |Q_i| + M \cdot \sum_{Q_k^* \in \mathcal{B}} |Q_k^*| \leq S(f, \mathcal{Z}) + M \cdot \Theta(\mathcal{Z}) \cdot \|\mathcal{Z}^*\|. \end{aligned}$$

□

Beweis. **(von Satz 2.8)** Es genügt, die Gleichheit nur für das obere Integral von f zu beweisen. Nach Definition gibt es eine Folge von Zerlegungen $\{\mathcal{Z}_l^*\}_{l \in \mathbb{N}}$ von Q mit $\lim\limits_{l \to \infty} S(f, \mathcal{Z}_l^*) = \bar{\int}_Q f(x)\, dx$.

Sei nun $\left\{ \mathcal{Z}_j \right\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge von Q, so liefert Lemma 2.9

$$\bar{\int}_Q f(x)\, dx \leq S(f, \mathcal{Z}_j) \leq S(f, \mathcal{Z}_l^*) + \Theta(\mathcal{Z}_l^*) \cdot (M - m) \cdot \|\mathcal{Z}_j\|.$$

Beim Grenzübergang $j \to \infty$ und festgehaltenem l erhalten wir

$$\bar{\int}_Q f(x)\, dx \leq \liminf_{j \to \infty} S(f, \mathcal{Z}_j) \leq \limsup_{j \to \infty} S(f, \mathcal{Z}_j) \leq S(f, \mathcal{Z}_l^*) \text{ für alle } l \in \mathbb{N}.$$

Beim Grenzübergang $l \to \infty$ ergibt sich

$$\overline{\int_Q} f(x)\, dx \leq \liminf_{j\to\infty} S(f, \mathcal{Z}_j) \leq \limsup_{j\to\infty} S(f, \mathcal{Z}_j) \leq \lim_{l\to\infty} S(f, \mathcal{Z}_l^*) = \overline{\int_Q} f(x)\, dx$$

und damit $\overline{\int}_Q f(x)\, dx = \lim_{j\to\infty} S(f, \mathcal{Z}_j)$. □

3 Riemann-integrierbare Funktionen

Definition 3.1 (Oszillation auf einer Teilmenge)
Sei $Q' \subset Q$ eine Teilmenge des Quaders Q. Wir definieren die *Oszillation auf* Q' durch

$$\operatorname{osc}\left(f, Q'\right) := \sup\left\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in Q'\right\}.$$

Definition 3.2 (Schwankung)
Sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von Q mit Indexmenge $\mathcal{I}$. Dann nennen wir

$$\sigma(f, \mathcal{Z}) := \sum_{i\in\mathcal{I}} \operatorname{osc}(f, Q_i) \cdot \operatorname{vol}_n(Q_i)$$

die *Schwankung von f auf Q bezüglich der Zerlegung $\mathcal{Z}$*.

Lemma 3.3
Für eine beliebige Zerlegung $\mathcal{Z}$ von Q mit Indexmenge $\mathcal{I}$ gilt

$$\sigma(f, \mathcal{Z}) = S(f, \mathcal{Z}) - s(f, \mathcal{Z}).$$

Beweis. Folgt direkt, da für alle $Q_i \in \mathcal{Z}$ gilt:

$$\operatorname{osc}(f, Q_i) = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in Q_i\} = \sup_{x\in Q_i} f(x) - \inf_{x\in Q_i} f(x).$$

□

Dann lassen sich die Ergebnisse aus dem vorherigen Abschnitt wie folgt zusammenfassen:

Satz 3.4 (Riemannsches Integrabilitätskriterium)
Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann gelten die folgenden Aussagen

(i) Wenn es eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge $\left\{\mathcal{Z}_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ mit der Schwankung $\lim_{j\to\infty} \sigma(f, \mathcal{Z}_j) = 0$ gibt, dann ist f über Q Riemann-integrierbar.

(ii) Wenn f über Q Riemann-integrierbar ist, dann erfüllt jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge $\left\{\mathcal{Z}_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ die Beziehung $\lim_{j\to\infty} \sigma(f, \mathcal{Z}_j) = 0$ für die Schwankung.

Beweis.

(i) Folgt sofort aus Lemma 3.3 und Satz 2.6.

(ii) Folgt sofort aus Lemma 3.3 und Satz 2.8.

$\square$

Satz 3.5 (Stetige Funktionen)
Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f über Q Riemann-integrierbar.

Beweis. Weil Q kompakt ist, ist f auf Q gleichmäßig stetig. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es also $\delta(\varepsilon) > 0$, sodass für alle $x, y \in Q$ mit $\|x - y\|_2 < \delta$ bereits $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ folgt.

Sei nun $\mathcal{Z}(\varepsilon)$ eine beliebige Zerlegung von Q mit Indexmenge $\mathcal{I}$ und $\|\mathcal{Z}(\varepsilon)\| < \delta(\varepsilon)$. Dann folgt

$$\sigma(f, \mathcal{Z}(\varepsilon)) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \operatorname{osc}(f, Q_i) \cdot \operatorname{vol}_n(Q_i) \leq \sum_{i \in \mathcal{I}} \epsilon \cdot \operatorname{vol}_n(Q_i) = \varepsilon \cdot \operatorname{vol}_n(Q).$$

Somit gibt es eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge $\left\{\mathcal{Z}_j\right\}_{j \in \mathbb{N}}$ mit der Schwankung $\lim_{j \to \infty} \sigma(f, \mathcal{Z}_j) = 0$ und nach Satz 3.4 folgt die Aussage. $\square$

Wir können nun zeigen, dass die Riemann-integrierbaren Funktionen einen reellen Vektorraum bilden, der noch weitere Eigenschaften erfüllt:

Satz 3.6 (Vektorraum der Riemann-integrierbaren Funktionen)
Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein mehrdimensionaler Quader und seien $f, g : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt, sowie $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen

$$\lambda f, \quad f + g, \quad fg, \quad |f|$$

über Q Riemann-integrierbar. Wenn es zusätzlich $P > 0$ gibt, sodass für alle $x \in Q$ gilt $|f(x)| \geq P$, dann ist auch $\frac{1}{f}$ Riemann-integrierbar.

Beweis. Wir definieren $K := \sup\{|f(x)| + |g(x)| \mid x \in Q\} < \infty$. Wir definieren $h = fg$. Sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von Q mit Indexmenge $\mathcal{I}$. Für $x, y \in Q_i$ ($i \in \mathcal{I}$) können wir abschätzen:

$$\begin{aligned}
|h(x) - h(y)| &= |f(x)(g(x) - g(y)) + g(y)(f(x) - f(y))| \\
&\leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)| \\
&\leq K \cdot (|g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)|).
\end{aligned}$$

Somit gilt für alle $i \in \mathcal{I}$ die Ungleichung

$$\operatorname{osc}(h, Q_i) \leq K (\operatorname{osc}(f, Q_i) + \operatorname{osc}(g, Q_i)),$$

und wir erhalten

$$\sigma(h, \mathcal{Z}) \leq K (\sigma(f, \mathcal{Z}) + \sigma(g, \mathcal{Z})).$$

Sei nun $\left\{\mathcal{Z}_j\right\}_{j \in \mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge. Mit Satz 3.4 folgt aus der Integrierbarkeit von f und g bereits $\lim_{j \to \infty} \sigma(f, \mathcal{Z}_j) = 0$ bzw. $\lim_{j \to \infty} \sigma(g, \mathcal{Z}_j) = 0$ und damit wieder nach Satz 3.4 und der obigen Abschätzung, dass h integrierbar ist.

Die Integrierbarkeit von Linearkombinationen integrierbarer Funktionen zeigt man analog.

Die Integrierbarkeit von $|f|$ folgt aus der Eigenschaft $\sigma(|f|, \mathcal{Z}) \leq \sigma(f, \mathcal{Z})$ für jede Zerlegung $\mathcal{Z}$ von Q.

Sei nun $P > 0$ wie oben beschrieben. Sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von Q mit Indexmenge $\mathcal{I}$. Für $x, y \in Q_i$ ($i \in \mathcal{I}$) können wir abschätzen:

$$\left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)} \right| = \left| \frac{f(y) - f(x)}{f(x) \cdot f(y)} \right| \leq \frac{1}{P^2} |f(y) - f(x)|.$$

Dann folgt

$$\operatorname{osc}\left(\frac{1}{f}, \mathcal{Z}\right) \leq \frac{1}{P^2} \operatorname{osc}(f, Q_i) \quad \Rightarrow \quad \sigma\left(\frac{1}{f}, \mathcal{Z}\right) \leq \frac{1}{P^2}\sigma(f, Q_i).$$

Die Integrierbarkeit folgert man wie oben. □

Bemerkung 3.7
Man kann sich leicht überlegen, dass der Jordan-Inhalt außerdem *translationsinvariant* ist.

4 Riemannsche Zwischensummen

Eine Alternative zu dem bis hierhin beschriebenen Zugang über Ober- und Untersummen ist Inhalt der folgenden Defnition. Dieser Ansatz wird es uns ermöglichen, weitere Aussagen über Riemann-integrierbare Funktionen zu treffen.

Definition 4.1 (Riemannsche Zwischensumme)
Sei $\mathcal{Z}$ eine Zerlegung von $Q = \bigcup_{i \in \mathcal{N}} Q_i$ und seien die *Zwischenpunkte* $\xi_i \in Q_i$, $i \in \mathcal{N}$ gewählt. Dann nennen wir

$$\Sigma(f, \mathcal{Z}, \xi) := \sum_{i \in \mathcal{N}} f(\xi_i) \cdot \operatorname{vol}_n(Q_i)$$

die *Riemannsche Zwischensumme von f zur Zerlegung $\mathcal{Z}$ und zu den Zwischenpunkten $\xi := \{\xi_i \mid i \in \mathcal{N}\}$.*

Dass sich dieses Konzept mit den bekannten Ober- und Untersummen verträgt, liefert uns der folgende Satz.

Satz 4.2
f ist über Q genau dann Riemann-integrierbar, wenn für jede ausgezeichnete Zerlegungsfolge $\{\mathcal{Z}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ von Q und jede Wahl der Zwischenpunkte

$$\xi^{(j)} := \left\{ \xi_i^{(j)} \in Q_i^{(j)} \,\middle|\, i \in \mathcal{N}_j \right\}$$

die Folge der Riemannschen Zwischensummen

$$\Sigma(f, \mathcal{Z}_j, \xi^{(j)}) := \sum_{i \in \mathcal{N}_j} f(\xi_i^{(j)}) \cdot \operatorname{vol}_n\left(Q_i^{(j)}\right), \quad j = 1, 2, \ldots$$

von f konvergiert. In diesem Fall gilt

$$\lim_{j \to \infty} \Sigma(f, \mathcal{Z}_j, \xi^{(j)}) = \int_Q f(x)\, dx.$$

Beweis. „$\Rightarrow$“ Es sei f über Q Riemann-integrierbar. Dann haben wir für jedes $j \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen

$$s(f, \mathcal{Z}_j) \leq \sum_{i \in \mathcal{N}_j} f(\xi_i^{(j)}) \cdot \operatorname{vol}_n\left(Q_i^{(j)}\right) \leq S(f, \mathcal{Z}_j).$$

Der Grenzübergang $j \to \infty$ liefert dann

$$\begin{aligned}\int_Q f(x)\,dx = \underline{\int}_Q f(x)\,dx &= \lim_{j\to\infty} s(f,\mathcal{Z}_j)\\ &\le \lim_{j\to\infty} \sum_{i\in\mathcal{N}_j} f(\xi_i^{(j)})\cdot \mathrm{vol}_n\left(Q_i^{(j)}\right)\\ &\le \lim_{j\to\infty} S(f,\mathcal{Z}_j) = \overline{\int}_Q f(x)\,dx = \int_Q f(x)\,dx,\end{aligned}$$

also die Konvergenz der Riemannschen Zwischensummen gegen das Intergal.

„$\Leftarrow$“ Sei nun $\left\{\mathcal{Z}_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge von Q. Mit Hilfe der Definitionen von Supremum bzw. Infimum können wir für $j = 1, 2, \ldots$ geeignete Zwischenpunkte

$$\xi^{(j)} := \left\{\xi_i^{(j)} \in Q_i^{(j)} \;\middle|\; i\in\mathcal{N}_j\right\} \quad \text{und} \quad \eta^{(j)} := \left\{\eta_i^{(j)} \in Q_i^{(j)} \;\middle|\; i\in\mathcal{N}_j\right\}$$

mit den Indexmengen $\mathcal{N}_j \subseteq \mathbb{N}^n$ derart wählen, dass die Zwischensummen $\Sigma(f,\mathcal{Z}_j,\xi^{(j)})$ und $\Sigma(f,\mathcal{Z}_j,\eta^{(j)})$ die Ungleichungen

$$\left|\Sigma(f,\mathcal{Z}_j,\xi^{(j)}) - s(f,\mathcal{Z}_j)\right| < \frac{1}{j} \quad \text{und} \quad \left|\Sigma(f,\mathcal{Z}_j,\eta^{(j)}) - s(f,\mathcal{Z}_j)\right| < \frac{1}{j}$$

erfüllen. Somit folgt

$$\lim_{j\to\infty} \Sigma(f,\mathcal{Z}_j,\xi^{(j)}) = \overline{\int}_Q f(x)\,dx \quad \text{und} \quad \lim_{j\to\infty} \Sigma(f,\mathcal{Z}_j,\eta^{(j)}) = \underline{\int}_Q f(x)\,dx.$$

Da nach Voraussetzung auch die gemischte Zahlenfolge

$$\Sigma(f,\mathcal{Z}_1,\xi^{(1)}), \Sigma(f,\mathcal{Z}_1,\eta^{(1)}), \Sigma(f,\mathcal{Z}_2,\xi^{(2)}), \Sigma(f,\mathcal{Z}_2,\eta^{(2)}), \ldots$$

konvergiert, erhalten wir

$$\overline{\int}_Q f(x)\,dx = \underline{\int}_Q f(x)\,dx.$$

Also ist f über Q Riemann-integrierbar. □

Satz 4.3 (Linearitätsregel)
Seien $f, g : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar und seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\int_Q \left(\lambda f(x) + \mu g(x)\right)\,dx = \lambda \int_Q f(x)\,dx + \mu \int_Q g(x)\,dx.$$

Beweis. Die Integrierbarkeit von $\lambda f + \mu g$ folgt aus 3.6. Die Gleichheit der Integrale rechnet man sofort nach, indem man eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge wählt und den Grenzwert der Riemannschen Zwischensummen betrachtet. □

5 Der Satz von Fubini für das Riemann-Integral

Um Riemann-Integrale auf mehrdimensionalen Quadern ausrechnen zu können, können Sie unter bestimmten Umständen auf eindimensionale Integrale zurückgeführt werden. Dies ist Bestandteil dieses Abschnitts.

Lemma 5.1 (Erinnerung)
Die (komplexe) Doppelfolge (a_{mn}) sei konvergent, und für jedes m bzw. n sollen die (komplexen) Grenzwerte

$\lim\limits_{n\to\infty}$ *und* $\lim\limits_{m\to\infty}$ *existieren. Dann existieren auch die iterierten Grenzwerte und es gilt:*

$$\lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} a_{mn}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} a_{mn}\right) = \lim_{m,n\to\infty} a_{mn}.$$

Beweis. Siehe Analysis I/II. □

Satz 5.2 (Fubini)
Seien $Q_k \subset \mathbb{R}^k$ und $Q_l \subset \mathbb{R}^l$ nichttriviale Quader und $Q := Q_k \times Q_l \subset \mathbb{R}^{k+l}$. Weiter sei $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar auf Q und für jedes $y \in Q_l$ existiere das Riemann-Integral

$$g(y) := \int_{Q_k} f(x,y)\, dx.$$

Dann ist $g : Q_l \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_Q f(x,y)\, d(x,y) = \int_{Q_l}\left(\int_{Q_k} f(x,y)\, dx\right) dy.$$

Beweis. Für $m,n \in \mathbb{N}$ sein $\mathcal{Z}_k^{(m)}$ und $\mathcal{Z}_l^{(n)}$ Zerlegungen (mit Indexmengen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$) von Q_k und Q_l mit zugehörigen Zwischenpunktvektoren $\xi_k^{(m)} = \left(\xi_{k,i}^{(m)}\right)$ und $\xi_l^{(n)} = \left(\xi_{l,j}^{(n)}\right)$. Dann wird durch $\mathcal{Z}^{(m,n)} := \mathcal{Z}_k^{(m)} \times \mathcal{Z}_l^{(n)}$ eine Zerlegung von Q mit zugehörigem Zwischenpunktvektor $\xi^{(m,n)} := \xi_k^{(m)} \times \xi_l^{(n)}$ definiert. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Sigma\left(f, \mathcal{Z}^{(m,n)}, \xi^{(m,n)}\right) &= \sum_{i,j\in\mathcal{I}\times\mathcal{J}} f\left(\xi_{k,i}^{(m)}, \xi_{l,j}^{(n)}\right)\cdot \mathrm{vol}_n\, Q_{k,i}^{(m)} \cdot \mathrm{vol}_n\, Q_{l,j}^{(n)} \\ &= \sum_{j\in\mathcal{J}}\left(\sum_{i\in\mathcal{I}} f\left(\xi_{k,i}^{(m)}, \xi_{l,j}^{(n)}\right)\cdot \mathrm{vol}_n\, Q_{k,i}^{(m)}\right)\cdot \mathrm{vol}_n\, Q_{l,j}^{(n)}. \quad (\star)\end{aligned}$$

Seien nun $\left(\mathcal{Z}_k^{(m)}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ und $\left(\mathcal{Z}_l^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ausgezeichnete Zerlegungsfolgen. Dann ist offensichtlich auch $\left(\mathcal{Z}^{(m,n)}\right)_{(m,n)}$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge.

Da f auf Q Riemann-integrierbar ist, konvergiert für $(m,n) \to \infty$ nach Satz 4.2 die linke Seite von $(\star)$ gegen $\int_Q f(x,y)\, d(x,y)$.

Außerdem konvergiert für jedes feste $\xi_{l,j}^{(n)}$ und $m \to \infty$ der Klammerterm auf der rechten Seite von $(\star)$:

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i\in\mathcal{I}} f\left(\xi_{k,i}^{(m)}, \xi_{l,j}^{(n)}\right)\cdot \mathrm{vol}_n\, Q_{k,i}^{(m)} = \int_{Q_k} f\left(x, \xi_{l,j}^{(n)}\right)\, dx = g\left(\xi_{l,j}^{(n)}\right).$$

Mit 5.1 folgt dann die Existenz von

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j\in\mathcal{J}} g\left(\xi_{l,j}^{(n)}\right)\cdot \mathrm{vol}_n\, Q_{l,j}^{(n)} = \int_{Q_l} g(y)\, dy = \int_{Q_l}\left(\int_{Q_k} f(x,y)\, dx\right) dy,$$

der wiederum mit

$$\lim_{(m,n)\to\infty}\Sigma\left(f, \mathcal{Z}^{(m,n)}, \xi^{(m,n)}\right) = \int_Q f(x,y)\, d(x,y)$$

übereinstimmt. □

Corollar 5.3 (Vertauschung der Integrationsreihenfolge)
Sei alles wie in Satz 5.2. Ist f auf $Q = Q_k \times Q_l$ Riemann-integrierbar, und existieren die Integrale

$$\int_{Q_k} f(x,y)\, dx \quad \text{für jedes } y \in Q_l \qquad \text{und} \quad \int_{Q_l} f(x,y)\, dy \quad \text{für jedes } x \in Q_k,$$

so existieren alle iterierten Integrale und es gilt

$$\int_Q f(x,y)\, d(x,y) = \int_{Q_l}\left(\int_{Q_k} f(x,y)\, dx\right) dy = \int_{Q_k}\left(\int_{Q_l} f(x,y)\, dy\right) dx.$$

Beweis. Folgt sofort aus Satz 5.2. □

6 Integration über Jordanbereiche

In diesem Abschnitt wollen wir kompiziertere Definitionsbereiche anschauen, auf denen eine Funktion Riemann-integrierbar ist.

Definition 6.1 (Charakteristische Funktion)
Seien $B \subset A$ Mengen. Dann definieren wir die *charakteristische Funktion von B* durch

$$\mathbb{1}_B : A \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \mathbb{1}_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \in A \setminus B. \end{cases}$$

Definition 6.2
Sei $J \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer und beschränkt und Q ein nichttrivialer Quader mit $J \subset Q$. Eine beschränkte Funktion $f : J \to \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrierbar auf J*, falls die Funktion

$$f_J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_J(x) = \begin{cases} f(x), & x \in J \\ 0, & x \notin J \end{cases}$$

Riemann-integrierbar auf Q ist. In diesem Fall heißt

$$\int_J f(x)\, dx := \int_Q f_J(x)\, dx$$

das *Riemann-Integral* von f über J.

Definition 6.3 (Jordan-Messbarkeit, Jordan-Inhalt und Jordan-Nullmenge)
Eine nichtleere beschränkte Menge $J \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Jordan-messbar*, wenn $\mathbb{1}_J$ Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall heißt

$$\text{J-vol}_n(J) := \int_J 1\, dx$$

der *(n-dimensionale) Jordan-Inhalt* von J.
J heißt *Jordansche Nullmenge*, wenn $\text{J-vol}_n(J) = 0$ ist.

Bemerkung 6.4
Offensichtlich gilt für einen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ bereits $\text{J-vol}_n(Q) = \text{vol}_n(Q)$. Außerdem ist auch $\text{J-vol}_n\left(\mathring{Q}\right) = \text{J-vol}_n(Q) = \text{J-vol}_n\left(\overline{Q}\right)$.

Lemma 6.5 (Charakterisierung von Jordanschen Nullmengen)
$J \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Jordansche Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Anzahl $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

an (nichttrivialen) Quadern $Q_1, \ldots, Q_{N(\varepsilon)}$ derart gibt, dass die folgenden beiden Eigenschaften gelten:

$$J \subset \bigcup_{k=1}^{N} Q_k, \quad \textit{und} \quad \sum_{k=1}^{N} \mathrm{vol}_n\,(Q_k) < \varepsilon.$$

Beweis. „⇒“ Sei $J \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordansche Nullmenge und sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader mit $J \subset Q$. Dann gilt nach Definition

$$\int_J 1\, dx = \int_Q \mathbb{1}_J\, dx = 0.$$

Sei $\left\{\mathcal{Z}_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge. Nach Satz 2.8 gilt dann

$$\lim_{j\to\infty} S(f, \mathcal{Z}_j) = \int_Q \mathbb{1}_J\, dx = 0.$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Somit gibt es $N := N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodass für alle $j \geq N$ gilt

$$S(f, \mathcal{Z}_j) = \sum_i \sup_{x\in Q_i} \mathbb{1}_J(x) \cdot \mathrm{vol}_n\,(Q_i) < \varepsilon.$$

Wählen wir nun die Teilmenge der Quader aus $\mathcal{Z}_N$ für die $\sup\limits_{x\in Q_i} = 1$ ist, so ist Eigenschaft zwei sofort erfüllt. Außerdem ist diese Teilmenge auch eine Überdeckung im Sinne der ersten Eigenschaft, da wir eine Obersumme betrachten. Da die Zerlegungen endlich sind, ist die zweite Eigenschaft gezeigt.

”⇐“ Sei J eine Menge, die die obigen Eigenschaften erfüllt. Für $\varepsilon > 0$ beschreiben wir die überdeckenden Quader mit $Q_1^{(\varepsilon)}, \ldots, Q_{N(\varepsilon)}^{(\varepsilon)}$. Ohne Einschränkung sind die offenen Kerne der Quader disjunkt. (Das Wegfallen von Überlappungen verkleinert das Gesamtvolumen höchstens; eventuell muss man verfeinern.) Wir müssen zeigen, dass $\int_J 1\, dx = 0$ ist.

Wir können annehmen, dass es einen Quader $Q \subset \mathbb{R}^n$ gibt, so dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt: $J \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N(\varepsilon)} Q_k^{(\varepsilon)} \subset Q$. Dann ist

$$\int_J 1\, dx = \int_Q \mathbb{1}_J\, dx = 0.$$

Wegen $\mathbb{1}_J \in \{0, 1\}$, ist offensichtlich $s(\mathbb{1}_J, \{Q\}) = 0$, was $\underline{\int}_J 1\, dx \geq 0$ bedeutet. Außerdem hat jede Obersumme mindestens den Wert 0.

Man kann sich leicht überlegen, dass wir für jedes $\varepsilon > 0$ zu $Q_1^{(\varepsilon)}, \ldots, Q_{N(\varepsilon)}^{(\varepsilon)}$ endlich viele Quader hinzufügen können, sodass die Gesamtmenge eine Zerlegung $\mathcal{Z}(\varepsilon)$ von Q bildet. Da diese zusätzlichen Quader disjunkt zu J sind, spielen sie für den Wert der Obersumme $S(\mathbb{1}_J, \mathcal{Z}(\varepsilon))$ keine Rolle. Nun gilt, da $\mathcal{Z}(\varepsilon)$ mit Sicherheit eine Verfeinerung von Q ist:

$$S(\mathbb{1}_J, \mathcal{Z}(\varepsilon)) - s(\mathbb{1}_J, \mathcal{Z}(\varepsilon)) \leq S(\mathbb{1}_J, \mathcal{Z}(\varepsilon)) - s(\mathbb{1}_J, \{Q\}) = S(\mathbb{1}_J, \mathcal{Z}(\varepsilon)) = \sup_{x\in Q_i^{(\varepsilon)}} \mathbb{1}_J(x) \cdot \mathrm{vol}_n \left(Q_i^{(\varepsilon)}\right) = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{vol}_n\,(Q_k) < \varepsilon.$$

Mit 2.6 und 2.8 folgt die Aussage.

□

Corollar 6.6
Ist $J \subset \mathbb{R}^n$ eine Jordansche Nullmenge und $I \subset J$, dann ist auch I eine Jordansche Nullmenge.

Beweis. Folgt sofort aus Satz 6.5. □

Mit Hilfe dieser Charakterisierung können wir nun den folgenden wichtigen Satz über die Riemann-Integrierbarkeit von nicht zwingend stetigen Funktionen zu beweisen.

Satz 6.7
Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt. Wenn f überall bis auf eine Jordansche Nullmenge E stetig ist, dann ist f über Q Riemann-integrierbar.

Beweis. Nach 6.5 existierten für $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N = N(\varepsilon)$ und Quader $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \dots, \tilde{Q}_N$ mit

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{N} \tilde{Q}_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{n} \mathrm{vol}_n \left(\tilde{Q}_k\right) < \varepsilon.$$

Zu jedem $\tilde{Q}_k$ bestimmen wir einen Quader Q_k^* mit $\tilde{Q}_k \subset \overset{\circ}{Q_k^*}$, sodass die Abschätzung $\sum_{k=1}^{N} \mathrm{vol}_n \left(Q_k^*\right) < 2\varepsilon$ erfüllt ist. Für $k \in \{1, \dots, N\}$ definieren wir nun $Q_k := Q_k^* \cap Q$ und erhalten dann

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{N} Q_k =: M \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{N} \mathrm{vol}_n \left(Q_k\right) < 2\varepsilon.$$

Behauptung: Es gilt $\overline{Q \setminus M} \cap E = \emptyset$.
Beweis: Angenommen dieser Durchschnitt wäre nichtleer. Dann existiert $x \in E$ und eine Punktfolge $\{x_l\}_{l \in \mathbb{N}} \subset Q \setminus M$ mit $x_l \overset{l \to \infty}{\to} x$. Wegen der Definition der $\tilde{Q}_k$ muss es dann $k \in \{1, \dots, N\}$ geben, sodass $x \in \tilde{Q}_k$ erfüllt ist. Dann existiert ein $\eta > 0$ mit

$$\{y \in Q \mid \|y - x\| < \eta\} \subset Q_k^* \cap Q = Q_k \subset M.$$

Dies schließt aber die Existenz einer solchen Folge aus. Widerspruch.

Sei nun $\mathcal{Z}$ eine beliebige Zerlegung von Q mit Indexmenge $\mathcal{I}$. Wir können $\mathcal{Z}$ derart verfeinern, sodass für jeden Teilquader Q_k entweder $Q_k \subset M$ oder $Q_k \subset \overline{Q \setminus M}$ ist. Hierzu nehmen wir die Zerlegungspunkte der überdeckenden Quader $Q_1, \dots, Q_N$ als Zerlegungspunkte für die Zerlegung $\mathcal{Z}$ auf. Wegen der Behauptung ist die Funktion $f : \overline{Q \setminus M} \to \mathbb{R}$ auf ihrem kompakten Definitionsbereich gleichmäßig stetig. Somit eixstiert zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ derart, dass für alle $x, y \in \overline{Q \setminus M}$ mit $\|x - y\| < \delta$ gilt $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Wir wählen jetzt eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ mit Indexmenge $\mathcal{I}$, die die Feinheit $\|\mathcal{Z}\| < \delta$ hat. Weil f auf Q beschränkt ist, gibt es $K := \sup\{|f(x)| \mid x \in Q\} < \infty$. Nun können wir wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned}
\sigma(f, \mathcal{Z}) &= \sum_{i \in \mathcal{I}} \mathrm{osc}\,(f, Q_i) \cdot \mathrm{vol}_n\,(Q_i) \\
&= \sum_{k \in \mathcal{I}: Q_k \subset M} \mathrm{osc}\,(f, Q_k) \cdot \mathrm{vol}_n\,(Q_k) + \sum_{k \in \mathcal{I}: Q_k \subset \overline{Q \setminus M}} \mathrm{osc}\,(f, Q_k) \cdot \mathrm{vol}_n\,(Q_k) \\
&\le 2K \cdot \sum_{k \in \mathcal{I}: Q_k \subset M} \mathrm{vol}_n\,(Q_k) + \varepsilon \sum_{k \in \mathcal{I}: Q_k \subset \overline{Q \setminus M}} \mathrm{vol}_n\,(Q_k) \\
&\le 2K \cdot 2\varepsilon + \varepsilon \cdot \mathrm{vol}_n\,(Q) \\
&= \varepsilon \cdot (4K + \mathrm{vol}_n\,(Q)).
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge, deren Schwankung gegen 0 konvergiert und mit Satz 3.4 folgt die Riemann-Integrierbarkeit von f.

□

Corollar 6.8
Eine Menge $J \subset \mathbb{R}^n$ ist Jordan-messbar, wenn ihr Rand ∂J eine Jordansche Nullmenge ist.

Beweis. Die Unstetigkeitsstellen von $\mathbb{1}_J$ sind genau bei ∂J. Dann folgt die Aussage aus Satz 6.7. □

Lemma 6.9
Eine Menge $J \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann Jordan-messbar, wenn ihr Rand ∂J eine Jordansche Nullmenge ist.

Beweis. Die eine Richtung folgt direkt aus obigem Corollar. Sei nun $J \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar. Sei $Q \supset J$ ein Quader. Es existiert also

$$\int_J 1 \, dx = \int_Q \mathbb{1}_J(x) \, dx.$$

Nach Satz 2.6 gibt es für $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}_\varepsilon$ mit $S(\mathbb{1}_J, \mathcal{Z}_\varepsilon) - s(\mathbb{1}_J, \mathcal{Z}_\varepsilon) < \varepsilon$. Wir betrachten die Mengen

$$\mathcal{I}_A := \left\{ k \in \mathcal{I} \;\middle|\; \inf_{x \in Q_k} \mathbb{1}_J(x) = 1 \right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{I}_B := \left\{ k \in \mathcal{I} \;\middle|\; \sup_{x \in Q_k} \mathbb{1}_J(x) = 1 \right\}$$

und definieren

$$A = \bigcup_{k \in \mathcal{I}_A} Q_k \quad \text{und } B = \bigcup_{k \in \mathcal{I}_B} Q_k.$$

Nach Konstruktion gilt dann $A \subset J \subset B$. Man überlegt sich mit dem obigen Corollar und der Tatsache, dass Quader trivialerweise Jordan-messbar sind, dass $\mathring{A}$ und $\overline{B}$ ebenfalls Jordan-messbar sind, und dass gilt $\text{J-vol}_n(A) = \text{J-vol}_n\left(\mathring{A}\right)$ bzw. $\text{J-vol}_n(B) = \text{J-vol}_n(\overline{B})$. Da auf jedem Quader in B die Funktion $\mathbb{1}_J$ nach Definition den Wert 0 hat, folgt aus der obigen Abschätzung bereits

$$\overline{B} - \mathring{A} < \varepsilon.$$

Somit ist $\overline{B} \setminus \mathring{A}$ eine Jordansche Nullmenge. Offenbar gilt $\partial J \subset \overline{B} \setminus \mathring{A}$. Aus Lemma 6.5 folgert man sofort, dass Teilmengen von Jordanschen Nullmengen wiederum Jordansche Nullmengen sind. Damit ist die Aussage gezeigt. □

Lemma 6.10
Sei $J \subset \mathbb{R}^n$ Jordan messbar und , $f : J \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt. Dann ist f auf J Riemann-integrierbar.

Beweis. Die Unstetigkeitsstellen sind genau ∂J. Da J Jordan-messbar ist, ist ∂J nach Lemma 6.9 eine Jordansche Nullmenge. Mit Satz 6.7 folgt dann die Riemann-Integrierbarkeit von f. □

Satz 6.11
Sei $J \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f : J \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist der Graph von f, d. h.. die Menge

$$\Gamma(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in J,\ y = f(x)\},$$

eine Jordansche Nullmenge im $\mathbb{R}^{n+1}$.

Beweis. Sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader mit $J \subset Q$. Wir betrachten die Einschränkung $\hat{f}$ von f_J auf Q. Nach Satz 2.6 gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $\mathcal{Z}_\varepsilon$ von Q mit $S(\hat{f}, \mathcal{Z}_\varepsilon) - s(f, \mathcal{Z}_\varepsilon) < \varepsilon$. Damit haben wir sofort eine Überdeckung für endlich viele abgeschlossene Intervalle mit Inhaltssumme $< \varepsilon$. Wegen $\Gamma(f) \subset \Gamma(\hat{f})$ gilt dies erst recht für $\gamma(f)$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung. □

Satz 6.12 (Prinzip des Cavalieri)
Seien $Q \subset \mathbb{R}^n, I \subset \mathbb{R}$ Quader und $A \subset Q \times I \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Jordan-messbare Menge. Für $h \in I$ definieren wir den Querschnitt auf der Höhe h durch

$$A_h := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, h) \in A\}.$$

Ist A_h für jedes $h \in I$ Jordan-messbar, so gilt

$$\text{J-vol}_{n+1}(A) = \int_I \text{J-vol}_n(A_h)\ dh.$$

Beweis. Nach Definition ist $\text{J-vol}_{n+1}(A) = \int_{Q \times I} \mathbb{1}_A(y)\ dy$. Mit dem Satz von Fubini (5.2) erhalten wir

$$\int_{Q \times I} \mathbb{1}_A(y)\ dy = \int_I \left(\int_Q \mathbb{1}_A(x, h)\ dx \right)\ dh.$$

Für ein festes $h \in I$ ist $\mathbb{1}_A(x, h) = \mathbb{1}_{A_h}(x)$ für alle $x \in Q$ und wir erhalten

$$\int_Q \mathbb{1}_A(x, h)\ dx = \int_Q \mathbb{1}_{A_h}(x)\ dx = \text{J-vol}_n(A_h).$$

□

Literaturverzeichnis

A'Campo-Neuen, A. (2011). *Skript zur Vorlesung Mathematische Methoden III. Herbstsemester 2011. Kapitel 4. Reelle Analysis: Integration.* Zugriff auf http://jones.math.unibas.ch/~annette/vorlesung11_files/SkriptMatheIII/skript9.pdf (20. August 2016)

Duistermaat, J. J. & Kolk, J. A. (2004). *Multidimensional Real Analysis II: Integration*. Camebridge University Press. (Cambridge studies in advanced mathematics)

Roch, S. (2013). *Skript zur Vorlesung Analysis II. SS 2013.* Zugriff auf http://www3.mathematik.tu-darmstadt.de/index.php?eID=tx_nawsecuredl&u=0&g=0&t=1471961447&hash=945963b50afbb76e125229b7959fae48faa1ff98&file=fileadmin/home/users/186/Skripte_Roch/analysis_II_ss13.pdf (20. August 2016)

Sauvigny, F. (2014). *Analysis*. Springer Spektrum.