Analysis I
Übungsblatt 07 – Schnittstellenaufgabe

Christian Fleischhack
Max Hoffmann

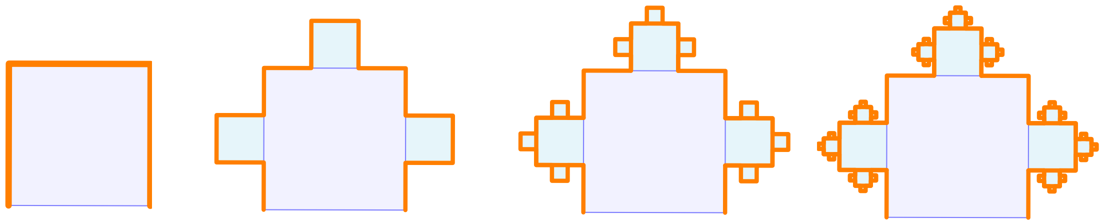
Stand: 30. November 2016

Abgabe
08. Dezember, 11:00 Uhr
Kasten 114, 115 (D1-Flur)

Verwenden Sie die Titelseitenvorlage.

Schnittstellenaufgabe 1 (Die geometrische Reihe)
Im Mathematik Schulbuch *Neue Wege, Analysis II (2011), S.102* wird der Einstieg in das Thema Folgen und Grenzwerte am Beispiel eines einfachen Fraktals gegeben, der sogenannten *Quadratpflanze*:

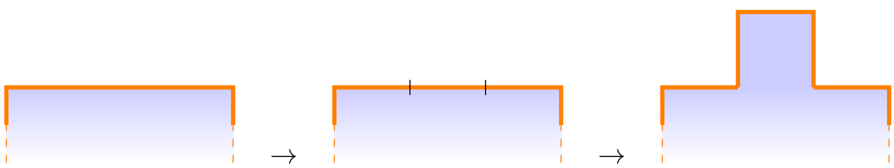
Hinweis: Die folgenden Texte stammen aus obigem Schulbuch, die Grafiken sind ähnlich zum Schulbuch selbst erstellt worden.

> Mit Funktionen und Graphen lassen sich viele Situationen und Vorgänge beschreiben bzw. modellieren. Folgen können als spezielle Funktionen mit dem Definitionsbereich $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ aufgefasst werden. Mit ihnen lassen sich besonders gut Prozesse beschreiben, die aus der Aufeinanderfolge von einzelnen Schritten bestehen. Typische Beispiele dafür sind Wachstumsprozesse, bei denen sich eine Größe von Jahr zu Jahr verändert, die Annäherung des Flächeninhalts eines Kreises durch die Einbeschreibung von Vielecken mit immer größer werdender Eckenzahl oder auch einfach die Entwicklung bestimmter Zahlenmuster von Stufe zu Stufe.
>
> *Aufgabe 1 – Die Quadratpflanze*
>
> 
>
> Die Quadratpflanze wächst schrittweise von Jahr zu Jahr nach einer genauen Vorschrift. Die ersten vier Stufen sind abgebildet. Man sagt ihr eine seltsame Eigenschaft nach:
>
> Umfang und Flächeninhalt werden von Stufe zu Stufe immer größer. Während der Umfang über alle Grenzen wächst, bleibt der Flächeninhalt immer unter einer festen Schranke. Im Unendlichen würde dies dann bedeuten, dass wir zur Umgrenzung einer Fläche mit endlichem Flächeninhalt eine unendlich lange Schnur benötigen. Kann das sein?

Im Folgenden wird eine Möglichkeit aufgezeigt, das – im Schulbuch sehr anschaulich dargestellte – Wachstum der Quadratpflanze präzise zu beschreiben. Auf diese Art und Weise können dann auch mathematisch saubere Argumentationen über die Eigenschaften der Quadratpflanze geführt werden.

Zunächst definieren wird das *Wachsen einer Quadratkante* durch die folgende Konstruktion:

1. Drittele die Kantenlänge
2. Erstelle über dem mittleren Drittel ein Quadrat
3. Definiere die Außenkontur der Gesamtfigur neu und füge das Quadrat der Gesamtfigur hinzu.



Nun können wir induktiv den Flächeninhalt und den Umfang der Quadratpflanze für eine Ausgangsseitenlänge $a > 0$ zu einer Generation $n \in \mathbb{N}$ definieren.

Als Quadrat der Generation 0 definieren wir nun ein Quadrat mit der Seitenlänge $a > 0$; die Außenkontur entspricht den Quadratkanten. Für die Quadrate der Generation 1 wird auf drei der vier Kanten *Wachsen einer Quadratkante* angewendet.

Für die Quadrate der Generation n mit $n > 1$ wird *Wachsen einer Quadratkante* auf alle freien Quadratkanten von Quadraten der Generation $n - 1$ angewendet. Dabei sind freie Kanten die Kanten eines Quadrates, die nicht auf einer Kante eines Quadrates der Vorgängergeneration liegen.

Zu einer Generation n ist der Flächeninhalt der Gesamtfigur gleich der Summe der Flächeninhalte aller Quadrate aus den Generationen k mit $0 \leq k \leq n$ und der Umfang die Länge der durch die n Generationen entstandenen Außenkontur.

a) Finden Sie geschlossene Vorschriften (keine rekursiven!) zur Berechnung des Umfangs $U(n)$ bzw. des Flächeninhalts $A(n)$ der Figur für eine Generation $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie Ihre Antworten.

   Hinweis: Vollständige Induktion.

b) Beweisen Sie die im Schulbuchtext (letzter Absatz) getroffenen Behauptungen über Monotonie und (Un-) Beschränktheit.

c) Finden Sie das größte ganzzahlige a (Seitenlänge der 0-ten Generation), sodass die Grenzfigur ($n \to \infty$) noch auf ein quer gelegtes DinA0-Blatt passt und bestimmen Sie für dieses a die Anzahl der Generationen, die es braucht, damit der Umfang der Entfernung „Mond–Erde" entspricht (384 400 km).

d1) **(Nur Lehramt)** Im Schulbuch *Neue Wege* werden nach diesem Einführungsbeispiel verschiedene Aspekte der Themenbereiche Folgen, Reihen und Konvergenz behandelt. Abschließend (S. 119) wird erneut Bezug auf das Beispiel der Quadratpflanze genommen. Bezogen auf den letzten Abschnitt des oben vorgestellten Textes heißt es:

> Mit den Erkenntnissen aus diesem [dem aktuellen] Lernabschnitt können Sie dies [die erwähnten Eigenschaften] nun begründen.

Gehen Sie davon aus, dass Sie mit einer Schulklasse die beiden Beispiele aus der letzten Schnittstellenaufgabe behandelt haben: Für beide Beispiele haben Sie die entsprechenden Terme aufgestellt, Spinnwebdiagramme gezeichnet und die Konvergenz untersucht.

Entwickeln Sie eine Aufgabe, die dieses Vorwissen nutzt, um die Schülerinnen und Schüler an eine Argumentation der Beschränktheit und der Konvergenz des Flächeninhalts der Quadratpflanze zu führen. Analysieren Sie, welche Aspekte des Grenzwertbegriffs durch Ihren Zugang angesprochen werden. (vgl. *Didaktik der Analysis (2016), Greefrath at al., S. 106*).

Hinweis: Die drei besten Aufgaben werden prämiert.

d2) **(Nur Nichtlehramt)** Sei $k \in \mathbb{N}_+$. Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{k^n}$.