Christian Fleischhack Universität Paderborn

Analysis II

Übungsblatt 1

Die Lösungsblätter sind bis

Dienstag, 20. April 2010, 11:00 Uhr

in die in Flur D1 befindlichen grünen Schließfächer
Nr. 116 (Gruppen 1 und 4) bzw. Nr. 129 (Gruppen 5 bis 7) zu werfen.

Aufgabe 1 *(5 Punkte)*

Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x) := \sqrt{x}$ um den Punkt $x_0 = 4$.

Aufgabe 2 *(6 Punkte)*

Seien X und Y normierte Räume sowie $U \subseteq X$ eine Umgebung des Punktes $a \in X$. Zeigen Sie, daß für alle Funktionen $f, g : U \longrightarrow Y$ die folgenden Rechenregeln gelten:

$$\begin{array}{rcll} o_a(g) & \subseteq & \mathcal{O}_a(g) & \\ o_a(g) + o_a(f) & = & o_a(g) & \text{für } f \in o_a(g) \\ \mathcal{O}_a(g) + \mathcal{O}_a(f) & = & \mathcal{O}_a(g) & \text{für } f \in \mathcal{O}_a(g) \\ \mathcal{O}_a(g) + \mathcal{O}_a(g) & = & \mathcal{O}_a(g) & \end{array}$$

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*

Beweisen Sie $\sqrt{1+x^2} = x + \mathcal{O}_\infty(\frac{1}{x})$.

Aufgabe 4 *(6 Punkte)*

Bestimmen Sie jeweils die Jacobimatrix f' für die folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$:

1. $$f(x,y,z) \quad := \quad \big(x + y^2 z - \mathrm{e}^{4xy}, xy\ln(z)\big)$$
2. $$f(x,y,z) \quad := \quad \big(\sin(x)\sinh(y)\sin(z), \cosh(x)\cos(y)\cosh(z)\big)$$

Aufgabe 5 *(9 Punkte)*

Die Kugelkoordination für den $\mathbb{R}^3$ verallgemeinern die Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$ und sind gegeben durch

$$\begin{array}{rrcl} I: & Q := [0,\infty) \times [0, 2\pi) \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\,, \\ & (r,\varphi,\psi) & \longmapsto & (x,y,z) \end{array}$$

wobei gilt:

$$\begin{array}{rcl} x & := & r\cos\psi\cos\varphi \\ y & := & r\cos\psi\sin\varphi \\ z & := & r\sin\psi\,. \end{array}$$

1. Zeigen Sie, daß I auf $Q_0 := (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ injektiv ist.
   Bestimmen Sie das Bild $I(Q_0)$.
2. Geben Sie $I^{-1} : I(Q_0) \longrightarrow Q_0$ an.
3. Bestimmen Sie die Jacobimatrix von I bzw. I^{-1} und ihre jeweilige Determinante.
4. Berechnen Sie $I'(r, \varphi, \psi) \cdot (I^{-1})'(x, y, z)$ und $(I^{-1})'(x, y, z) \cdot I(r, \varphi, \psi)$. Hierbei gelte jeweils $(x, y, z) = I(r, \varphi, \psi)$.
5. Beschreiben Sie das Bild der folgenden geometrischen Objekte unter I:
   - $r = \text{const}$;
   - $\phi = \text{const}$ und $r = \text{const}$;
   - $\psi = \text{const}$ und $r = \text{const}$.