Christian Fleischhack Universität Paderborn

Analysis II

Übungsblatt 2

Die Lösungsblätter sind bis

Dienstag, 27. April 2010, 11:00 Uhr

*in die in Flur D1 befindlichen grünen Schließfächer
Nr. 116 (Gruppen 1 und 4) bzw. Nr. 129 (Gruppen 5 bis 7) zu werfen.*

Aufgabe 7 *(4 Punkte)*

Sei X ein normierter Raum und $x \in X$ ein Punkt.
Zeigen Sie, daß jede Umgebung von x eine konvexe Umgebung von x enthält, d. h., daß diese mit je zwei Punkten x_1 und x_2 auch deren Verbindungsstrecke enthält.

Aufgabe 8 *(8 Punkte)*

1. Seien $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen und sei $h := f \circ g$. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\partial_{11}h, \partial_{12}h, \partial_{21}h, \partial_{22}h$ in Abhängigkeit der partiellen Ableitungen von f und g.
2. Testen Sie Ihre Formel für den folgenden Fall:
   - $f(x_1, x_2) := x_2^2 + 3x_1$ und $g(y_1, y_2) := \big(y_1 y_2^2, y_1 y_2\big)$.

Hinweis: Sollten Sie inkonsistente Ergebnisse erhalten, so hilft möglicherweise ein genauerer Blick auf die Kettenregel. Merke: Nicht nur die Kurzform lernen!

Aufgabe 9 *(7 Punkte)*

Bestimmen Sie die lokalen Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) \quad := \quad xy \ln(x^2 + y^2).$$

Welche der Punkte sind lokale Minima, welche lokale Maxima? Gibt es globale Extrema?

Aufgabe 10 *(5 Punkte)*

Beweisen Sie, daß die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := (y - x^2)(y - 3x^2)$ kein lokales Extremum im Ursprung besitzt, obwohl jede Einschränkung auf eine Gerade durch den Ursprung in diesem Punkt ein lokales Minimum besitzt.

Aufgabe 11 *(9 Punkte)*

Sei $\mathcal{P}$ die Menge aller Wege im $\mathbb{R}^m$ durch $x_0 \in \mathbb{R}^m$, also die Menge aller stetig differenzierbaren Abbildungen $\gamma : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\gamma(0) = x_0$. Für $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{P}$ sei $\gamma_1 \sim \gamma_2$ genau dann, wenn $d\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big) = o(t)$ für $t \to 0$ gilt.

1. Zeigen Sie, daß $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{P}$ definiert.
2. Beweisen Sie, daß es eine Bijektion zwischen Vektoren im $\mathbb{R}^m$ und den Äquivalenzklassen von Wegen durch x_0 gibt.
3. Führen Sie auf der Menge der Äquivalenzklassen von Wegen vermöge des vorangegangenen Punktes die Struktur eines $\mathbb{R}$-Vektorraums ein.