Christian Fleischhack Universität Paderborn

Analysis II

Übungsblatt 3

Die Lösungsblätter sind bis

Dienstag, 4. Mai 2010, 11:00 Uhr

in die in Flur D1 befindlichen grünen Schließfächer
Nr. 116 (Gruppen 1 und 4) bzw. Nr. 129 (Gruppen 5 bis 7) zu werfen.

Aufgabe 11 *(16 Punkte)*

Führen Sie für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Kurvendiskussion durch:

1. $$f(x,y) \quad := \quad xy\mathrm{e}^{-(x+y)}.$$

2. $$f(x,y) \quad := \quad x^4 + y^4 - 2x^2.$$

Das heißt jeweils:

- Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f.
- Bestimmen Sie die Hessematrix H_f in jedem kritischen Punkt von f.
- Entscheiden Sie, ob die durch das jeweilige H_f definierte quadratische Form positiv definit, positiv semidefinit, indefinit, negativ semidefinit bzw. negativ definit ist.
- Bestimmen Sie das Verhalten der Funktion in jedem kritischen Punkt (lokales Minimum, lokales Maximum, globales Minimum, globales Maximum, kein Extremum bzw. Sattelpunkt).

Aufgabe 12 *(5 Punkte)*

Bestimmen Sie in Abhängigkeit der komplexen Parameter a und b, ob

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle \quad := \quad a\,\overline{x}_1 y_1 + b\,\overline{x}_2 y_2$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$ ist.

Aufgabe 13 *(6 Punkte)*

Sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Raum und $\|\cdot\|$ die entsprechende induzierte Norm.
Zeigen Sie, daß für alle $x, y \in X$ gilt:

$$\langle x, y\rangle \quad = \quad \frac{1}{4} \sum_{\lambda \in \mathbb{K} \text{ mit } \lambda^4 = 1} \lambda\, \|\lambda x + y\|^2$$

Aufgabe 14 ***(8 Punkte)***

Zeigen Sie, daß ein normierter Raum genau dann ein unitärer Raum ist, wenn in ihm die Parallelogrammidentität gilt. Genauer:

1. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Zeigen Sie:
   a) Durch die in Aufgabe 13 gegebene Formel ist ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definiert, sofern die Parallelogrammidentität
   $$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \quad = \quad 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$
   für alle $x, y \in X$ erfüllt ist.
   b) Die durch dieses Skalarprodukt induzierte Norm ist gleich $\|\cdot\|$.
2. Zeigen Sie, daß in jedem unitären Raum die induzierte Norm die Parallelogrammidentität erfüllt.

Hinweis: Zu 1.a): Direkt abzulesen ist die positive Definitheit und die Symmetrie des Skalarprodukts. Zeigen Sie dann die Additivität durch Betrachtung von $\langle x, y-z\rangle + \langle x, y+z\rangle$ mit Aufgabe 13 und der Parallelogrammidentität. Hieraus folgt $\langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ für λ in $\mathbb{N}$, dann in $\mathbb{Z}$, in $\mathbb{Q}$, mit der Stetigkeit über $\mathbb{R}$ und schließlich über $\mathbb{C}$; ähnlich wie bei der Funktionalgleichung $f(a+b) = f(a) + f(b)$ in Analysis I.