Christian Fleischhack Universität Paderborn

Analysis II

Übungsblatt 4

Die Lösungsblätter sind bis

Dienstag, 11. Mai 2010, 11:00 Uhr

in die in Flur D1 befindlichen grünen Schließfächer
Nr. 116 (Gruppen 1 und 4) bzw. Nr. 129 (Gruppen 5 bis 7) zu werfen.

Aufgabe 15 *(8 Punkte)*

Untersuchen Sie fur x, y, z und w, ob das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x & + & y & - & z & + & w^2 & = & 0 \\ x & - & y & + & 2z & + & w & = & 0 \\ 2x & + & 2y & - & 3z & + & 2w & = & 0 \end{array}$$

nach den jeweils anderen drei Variablen aufgelöst werden kann.

Aufgabe 16 *(12 Punkte)*

1. Ideale Gase erfüllen die Zustandsgleichung
$$pV = cT$$
mit einer geeigneten Konstanten $c > 0$. Stellen Sie jede der positiven reellen Größen p, V und T in Abhängigkeit der jeweils anderen Größen dar, und berechnen Sie
$$\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p}.$$
2. Reale Gase erfüllen die Zustandsgleichung
$$\Big(p + \frac{a}{V^2}\Big)\big(V - b\big) = cT$$
wobei hier a und b nichtnegative Konstanten sind. In welchen Punkten $(p, V, T) \in \mathbb{R}^3_+$ ist diese Gleichung nach jeder der drei Variablen auflösbar? Berechnen Sie in diesen Punkten erneut
$$\frac{\partial p}{\partial V} \cdot \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial p}.$$
3. Verallgemeinern Sie Ihre Ergebnisse auf den Fall einer Gleichung $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$ mit $n + 1$ Variablen.

Hinweis: Kürze keine partiellen Ableitungen!

Aufgabe 17 ***(11 Punkte)***

Sei $X := \mathbb{K}^n$, wobei die Elemente als Spaltenvektoren geschrieben seien. Wir definieren

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}\varphi \ \equiv\ \nabla\varphi \ &:=\ \begin{pmatrix}\partial_1\varphi\\ \vdots\\ \partial_n\varphi\end{pmatrix} && \text{für glattes } \varphi : X \longrightarrow \mathbb{K}\\
\operatorname{div}\mathbf{f} \ \equiv\ \nabla\mathbf{f} \ &:=\ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} && \text{für glattes } \mathbf{f} \equiv \begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix} : X \longrightarrow X\\
\Delta \ &:=\ \sum_{i=1}^{n} \partial_i^2
\end{aligned}$$

Ist zudem $n = 3$, so definieren wir

$$\operatorname{rot}\mathbf{f} \ \equiv\ \nabla\times\mathbf{f} \ :=\ \begin{pmatrix}\partial_3 f_2 - \partial_2 f_3\\ \partial_1 f_3 - \partial_3 f_1\\ \partial_2 f_1 - \partial_1 f_2\end{pmatrix} \qquad \text{für glattes } \mathbf{f} \equiv \begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ f_3\end{pmatrix} : X \longrightarrow X$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen für $\varphi, \mathbf{f}$ wie oben:

$$\begin{aligned}
\nabla\times(\nabla\times\mathbf{f}) &= \nabla(\nabla\mathbf{f}) - \Delta\mathbf{f} && \text{(für } n = 3)\\
\nabla\times(\nabla\varphi) &= \mathbf{0} && \text{(für } n = 3)\\
\nabla(\nabla\times\mathbf{f}) &= 0 && \text{(für } n = 3)\\
\nabla\times(\varphi\mathbf{f}) &= \varphi\,\nabla\times\mathbf{f} + (\nabla\varphi)\times\mathbf{f} && \text{(für } n = 3)\\
\nabla(\varphi\mathbf{f}) &= \langle\nabla\varphi, \mathbf{f}\rangle + \varphi\,\nabla\mathbf{f} && \text{(für } \mathbb{K} = \mathbb{R})
\end{aligned}$$

Berechnen Sie ferner explizit $\nabla\varphi$, $\Delta\varphi$ und (falls $n = 3$) $\nabla\times(\nabla\varphi)$ für $\varphi(x) := \|x\|^\alpha$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.